

考虑磁通流动效应的超导薄膜基底结构界面断裂行为研究

丁洁莹, 薛峰, 苟晓凡

**A Study on Interfacial Fracture Behaviors of Superconducting Thin Film/Substrate Structures on Taking the Account of Effects of Flux Flow**

DING Jieying, XUE Feng, and GOU Xiaofan

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420353>

您可能感兴趣的其他文章

**Articles you may be interested in**

构成单材料裂纹和双材料界面裂纹有限应力集中的一般解析函数

Construction of General Analytic Functions With Finite Stress Concentration for Mono-Material Cracks and Bi-Material Interface Cracks

应用数学和力学. 2018, 39(12): 1364-1376 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390030>

集中力作用下多铁性板状复合材料的断裂分析

Fracture Analysis on Multiferroic Composite Plates Under Concentrated Forces

应用数学和力学. 2018, 39(12): 1390-1399 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390013>

界面弧形裂纹对混凝土开裂强度的影响研究

Study on Effects of Interfacial Arc Cracks on Cracking Strengths of Concrete

应用数学和力学. 2019, 40(9): 1011-1024 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390330>

裂纹面局部均布荷载下 I 型裂纹有限宽板应力强度因子

The Stress Intensity Factor of a Finite Width Plate With a Mode-I Center Crack Subjected to Uniform Stress on the Crack Surface Near the Crack Tip

应用数学和力学. 2020, 41(10): 1083-1091 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410130>

求解双材料裂纹结构全域应力场的扩展边界元法

Computation of Total Stress Fields for Cracked Bi-Material Structures With the Extended Boundary Element Method

应用数学和力学. 2019, 40(8): 926-937 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400013>

层状弹性材料界面 J 积分的产生和特征

Characteristics and Generation of Interface J integrals in Layered Elastic Materials

应用数学和力学. 2017, 38(10): 1155-1165 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370270>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 考虑磁通流动效应的超导薄膜基底 结构界面断裂行为研究\*

丁洁莹, 薛峰, 苟晓凡

(河海大学 力学与材料学院, 南京 211100)

(本刊编委苟晓凡来稿)

**摘要:** 超导薄膜是一种采用化学涂层制备而成的多层薄膜结构, 作为性能优越的导电功能结构材料, 其载流能力与结构完整性直接相关. 在超导薄膜制备过程中, 超导层与金属基底之间的界面裂纹很难避免. 因此, 在载流运行过程中, 由于外磁场的存在, 这类界面裂纹的强度问题成为关键. 为此, 该文针对超导薄膜结构, 以磁通量子穿透薄膜理论和线弹性断裂理论为基础, 建立了研究超导层与基底界面裂纹强度问题的解析模型. 深入分析了外加磁场作用下界面裂纹强度问题, 得到了超导磁通流动对裂纹尖端应力场和能量释放率的影响. 结果表明: 磁通流动速度越大, 界面裂纹尖端处应力越大且能量释放率越大, 这将导致界面更容易发生裂纹破坏. 该文所得结果有助于分析相关的界面裂纹问题.

**关键词:** 超导薄膜; 磁通流量; 界面裂纹; 裂尖应力场

**中图分类号:** O343; O346 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420353

## A Study on Interfacial Fracture Behaviors of Superconducting Thin Film/Substrate Structures on Taking the Account of Effects of Flux Flow

DING Jieying, XUE Feng, GOU Xiaofan

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, P.R.China)

(Contributed by GOU Xiaofan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The superconducting thin film is a kind of multilayer structure prepared by chemical coating. As a conductive functional structure material with excellent performance, its structural integrity is directly related to the current-carrying capacity. During the preparation of superconducting thin films, it is hard to avoid the interface cracks between the superconducting layer and the metal substrate. In this case, along with the current-carrying operation, the strength of the interface crack in an external magnetic field makes a key problem. Therefore, based on the theory of flux through the thin film and the linear elastic fracture, an analytical model was established for the strength of the interface crack between the superconducting film and the substrate. The effects of the viscous flux flow on the stress field and the energy release rate at the crack tip were obtained. The results show that, the higher the flux flow velocity is, the greater the stress and the energy release rate at the crack tip of the interface will be, which will lead to crack propagation along the interface. The work is

\* 收稿日期: 2021-11-23; 修订日期: 2022-01-10

基金项目: 国家自然科学基金 (12072101)

作者简介: 丁洁莹(1995—), 女, 硕士生(E-mail: [jiyingding@hhu.edu.cn](mailto:jiyingding@hhu.edu.cn));

薛峰(1985—), 男, 副教授(通讯作者. E-mail: [xuefeng12@hhu.edu.cn](mailto:xuefeng12@hhu.edu.cn));

苟晓凡(1971—), 男, 教授(通讯作者. E-mail: [xfgou@hhu.edu.cn](mailto:xfgou@hhu.edu.cn)).

引用格式: 丁洁莹, 薛峰, 苟晓凡. 考虑磁通流动效应的超导薄膜基底结构界面断裂行为研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(6): 631-638.

helpful for the analysis of interface cracks mentioned above.

**Key words:** superconducting thin film; flux flow; interface crack; crack tip stress

## 引言

超导薄膜是一种采用化学涂层制备而成的多层薄膜结构,因其具有极佳的低温高场电性能,广泛应用于电力、交通、医疗等各个领域.对于超导薄膜结构,通常超导层与基底结合界面较为脆弱<sup>[1-2]</sup>.这种超导薄膜界面强度不仅关乎超导薄膜结构的破坏与完整性,更为重要的是,与导电能力密切关联.为此,针对超导薄膜界面裂纹破坏及其影响规律的研究非常必要.截至目前,已有不少针对薄膜基底结构的界面裂纹问题的研究<sup>[3-4]</sup>.Hutchinson等<sup>[5-6]</sup>通过理论推导,提出了稳态开裂下双层膜的界面裂纹计算模型,可用于分析裂纹尖端处的应力分布.由于解析方法的局限性,以有限单元法和边界元法为代表的数值解法纷纷涌现<sup>[7-8]</sup>.Ma和Su等<sup>[9]</sup>使用拓展有限元法(X-FEM),解决了静态双材料界面断裂问题;Gu等<sup>[10]</sup>提出了基于边界元法的新型裂纹尖端单元,可用于分析复合材料的界面裂纹.以上方法为分析超导薄膜界面处断裂性能提供了帮助.

超导薄膜受到的电磁力是导致其界面发生裂纹破坏的重要因素.Gruss等<sup>[11]</sup>观察到外加磁场变化和温度变化都会对薄膜内电磁场产生影响,进而影响超导薄膜所受的电磁力.Zeldov等<sup>[12]</sup>对无限长的II型超导薄膜的临界状态进行了理论分析,指出磁通穿透区域内电流密度的幅值等于临界电流密度 $j_c$ .Brandt和Indenbom等<sup>[13]</sup>给出了在外部磁场垂直作用下,II型超导薄膜在临界状态下的电流密度和总磁场分布.然而,上述方法的临界电流密度都是恒定的,McDonald等<sup>[14]</sup>在临界电流密度 $J_c(B)$ 任意给定的前提下,分析了无限长II型超导薄膜的电磁场.此外,磁通钉扎效应引起磁致伸缩对不同形状的II型超导体的应力、应变的影响不容忽视<sup>[15-16]</sup>,Zhao等<sup>[17]</sup>考虑了在磁通钉扎效应影响下,通量流动速度对超导薄膜的磁化强度和应力的影响,结合以上方法,考虑磁通钉扎效应的影响,可以更为合理地描述超导薄膜受到的电磁力.

为此,针对超导薄膜,在外磁场作用下,引入了超导磁通钉扎效应所引起的黏性通量流动对于薄膜结构电磁力的影响,并优化了电磁力计算方法,深入研究了磁通流动速度对薄膜基底结构界面裂纹的影响.

## 1 计算模型与公式

### 1.1 计算模型

如图1(a)所示,长 $L$ 、宽 $2a$ 的超导薄膜(1#)被沉积在基底(2#)上,厚度分别为 $h_1$ 和 $h_2$ ,且满足 $h_1 \ll h_2$ .超导薄膜和基底之间的界面与 $y$ 轴重合,在界面上存在初始裂纹.问题满足以下假设:超导薄膜和基底都是各向同性和线弹性的;初始裂纹长度为超导膜厚度的数倍,初始裂纹尺寸不影响裂纹开裂; $2a \ll L$ ,问题满足平面应力条件.

在垂直于超导薄膜、平行于 $z$ 轴方向施加密度为 $B_a$ 的外加磁场,图1(b)为超导薄膜内电磁力分布的示意图,在临界状态下,磁通 $B_z$ 垂直于 $xOy$ 平面穿透超导薄膜,使得超导薄膜内产生密度为 $j_c$ 的矩形环状电流,同一个电流环上的任意点到外部边界的距离相等<sup>[15]</sup>.屏蔽区对应薄膜内磁场强度为零的区域,图中 $2b$ 对应屏蔽区的宽度, $2\tilde{b}$ 为薄膜内电磁分布的另一个间断点,满足 $a > \tilde{b} > b$ .由于电流回路的特性,可以将薄膜划分成四个区域.为了便于描述薄膜内的电磁场分布,选取横截面A,截面A满足 $y = L/2$ 且平行于 $xOz$ 平面.

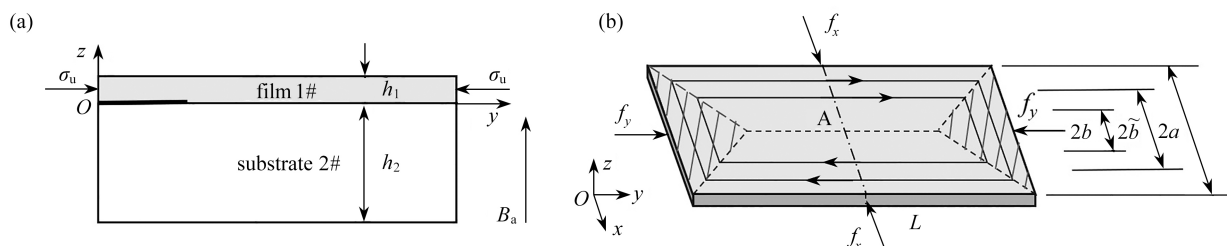


图1 计算模型示意图: (a) 超导薄膜/基底结构界面裂纹问题; (b) 电磁力分布

Fig. 1 The schematic drawing for calculation: (a) interface crack between superconducting thin film and substrate; (b) electromagnetic force distribution

## 1.2 电磁场公式

场冷和零场冷是使得 II 型超导体内产生俘获磁场的两种常用方法, 场冷指的是超导体在一个固定的外加磁场中冷却, 最后撤去外加磁场的过程; 零场冷指的是先冷却然后再施加外加磁场, 最后撤去外加磁场的过程. 这两种方法在超导体内产生的俘获磁场分布不同, 与路径有关<sup>[18]</sup>. 本文研究零场冷的磁化过程.

根据磁通量子穿透薄膜的理论, 结合 Zhao 等<sup>[17]</sup>的分析, 当外加磁场  $B_a$  从零开始增加时, 可以得到考虑磁通速度  $v_0$  的临界电流密度为

$$j_c(v_0) = j_{c0} + \frac{\eta v_0}{\varphi_0}, \quad (1)$$

其中,  $j_{c0}$  是初始临界电流密度,  $\eta$  是和通量运动有关的黏度,  $v_0$  是局部磁通流动速度,  $\varphi_0 = 2.07 \times 10^{-5}$  Wb. 根据式 (1), 将  $j_c/j_{c0}$  记作  $c_0$ , 为了简化讨论<sup>[19]</sup>, 近似取  $\eta v_0/(j_{c0}\varphi_0) = v_0/a$ .

根据  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , 结合 Yong 等<sup>[4]</sup>的分析, 可以得到屏蔽区域尺寸与外加磁场的关系为

$$b = a/\cosh(B_a/B_p), \quad B_p = \frac{\mu_0 j_{c0} h_1}{\pi}, \quad (2)$$

其中,  $b$  表示屏蔽区域尺寸,  $B_a$  表示外加磁场强度, 为了归一化表示外加磁场强度, 定义一个常量  $B_p$ .

根据 McDonald 等<sup>[14]</sup>的分析, 可以得到外加磁场强度  $B_a/B_p$  与临界电流密度  $j_c/j_{c0}$  的关系为

$$B_a/B_p = \int_b^a \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - x^2}} \left( \frac{j_c}{j_{c0}} \right). \quad (3)$$

当外加磁场和临界电流给定时, 可由上式解出屏蔽区域尺寸  $b$ .

根据式 (2), 可将式 (1) 与式 (3) 结合, 得到考虑磁通流动速度的屏蔽区尺寸的表达式为

$$b = a/\cosh(B_a/(c_0 \cdot B_p)), \quad B_p = \frac{\mu_0 j_{c0} h_1}{\pi}. \quad (4)$$

外加磁场  $B_a$  在最大值  $\pm B_m$  之间变化, 选取  $B_m = 2B_p$ , 可将磁场变化的阶段划分为磁场上升阶段和磁场下降阶段, 其中, 磁场上升阶段对应外加磁场从零增大到最大值的过程, 磁场下降阶段对应外加磁场从最大值减小到零的过程.

超导膜内的电流密度分布和磁通密度分布如下<sup>[14]</sup>:

### 1) 磁场上升阶段

$$j(x) = \begin{cases} \frac{2j_c}{\pi} \arctan(cx/\sqrt{b^2 - x^2}), & x < b, \\ j_c, & b < x < a, \end{cases} \quad (5)$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x < b, \\ \frac{\mu_0 j_c h_1}{\pi} \operatorname{arctanh}(\sqrt{x^2 - b^2}/(cx)), & b < x < a, \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $b = a/\cosh(B_a/(c_0 \cdot B_p))$ ,  $c = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ . 根据定义,  $b$  表示薄膜内屏蔽区的尺寸,  $c$  由  $b$  决定.

### 2) 磁场下降阶段

$$j(x) = \begin{cases} \frac{2j_c}{\pi} \arctan(cx/\sqrt{b^2 - x^2}) - \frac{4j_c}{\pi} \arctan(\tilde{c}x/\sqrt{\tilde{b}^2 - x^2}), & 0 < x < b, \\ j_c - \frac{4j_c}{\pi} \arctan(\tilde{c}x/\sqrt{\tilde{b}^2 - x^2}), & b < x < \tilde{b}, \\ -j_c, & \tilde{b} < x < a, \end{cases} \quad (7)$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < b, \\ \frac{\mu_0 j_c h_1}{\pi} \operatorname{arctan} h(\sqrt{x^2 - b^2}/(cx)), & b < x < \tilde{b}, \\ \frac{\mu_0 j_c h_1}{\pi} [\operatorname{arctan} h(\sqrt{x^2 - b^2}/(cx)) - 2 \operatorname{arctan} h(\sqrt{x^2 - \tilde{b}^2}/(\tilde{c}x))], & \tilde{b} < x < a, \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $b = a/\cosh(B_m/(c_0 \cdot B_p))$ ,  $\tilde{b} = a/\cosh((B_m - B_a)/(2(c_0 \cdot B_p)))$ ,  $c = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ,  $\tilde{c} = \sqrt{1 - \tilde{b}^2/a^2}$ . 根据定义, 在磁场下降阶段,  $b$  表示屏蔽区的尺寸且决定  $c$  的值,  $\tilde{b}$  是一个新的分段点, 此处薄膜内的电流密度达到极值, 且决定了  $\tilde{c}$  的大小, 以上变量满足  $a > \tilde{b} > b, \tilde{c} < c < a$ .

超导膜内的电流密度和磁通密度分布明确后,磁化过程的电磁体力可以通过 $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 得到.由于垂直于 $yOz$ 平面的力 $f_x$ 对沿 $y$ 轴的裂纹几乎没有影响,因此我们只考虑 $f_y$ :

$$f_y(x) = j_x(x) \times B_z(x). \quad (9)$$

### 1.3 断裂公式

如图1(b)所示,由于电流回路的特性,超导薄膜横截面区域可被分为四个区域,仅三角形区域(对应 $f_y$ )会对界面裂纹有影响.由于 $2a \ll L$ ,可以将 $f_y$ 的合力替换为作用在薄膜边缘的均匀力 $\sigma_u, \sigma_v$ 可通过积分得到<sup>[15]</sup>:

$$\sigma_u = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cdot x \cdot dx. \quad (10)$$

将式(5)~(9)代入式(10),可以得到施加在薄膜边界上的均匀面力.

接着,根据 Hutchinson 等<sup>[5-6]</sup>的工作,可以解决界面裂纹问题. Dundurs 参数描述了材料的特性对界面的影响,分别用 $\alpha$ 和 $\beta$ 来表示:

$$\alpha = \frac{\mu_1(\kappa_2 + 1) - \mu_2(\kappa_1 + 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}, \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}, \quad (12)$$

其中, $\mu, \kappa, \nu$ 分别表示材料的剪切模量、体积模量和 Poisson 比, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 为平面应力问题对应的体积模量,用下标 1 和 2 来分别表示材料 1 与材料 2.在大多数情况下,较小的非零 $\beta$ 对界面的影响可以忽略<sup>[20]</sup>,故近似取 $\beta = 0$ .

复应力强度因子由下式定义:

$$K = K_I + iK_{II}, \quad (13)$$

其中, $K_I$ 和 $K_{II}$ 分别为 I 型和 II 型应力强度因子. I 型裂纹场关于裂纹线对称,与裂纹侧翼的法向分离有关; II 型裂纹场是反对称的,控制着裂纹翼侧的相对剪切位移.

接着,距离裂纹尖端距离为 $r$ 处的应力场被表示为

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{K_I + K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (14)$$

由于超导薄膜的厚度远小于基底的厚度,即 $h_1 \ll h_2$ ,则厚度比 $\eta = h_1/h_2 \approx 0$ ,此时,应力强度因子可以由下式得到:

$$K_I + iK_{II} = (h_1/2)^{1/2} \sqrt{1 - \alpha} \sigma_u \exp(i\omega), \quad (15)$$

其中, $\omega$ 是有关 Dundurs 参数的函数, $\eta$ 为厚度比.定义 $\sigma_0 = \frac{\mu_0 j_{c0}^2 a h_1}{\pi}$ , $K_0 = (h_1/2)^{1/2} \sigma_0$ ,进而对应应力强度因子进行归一化处理,此时式(15)可写为

$$\frac{K_I + iK_{II}}{K_0} = \sqrt{1 - \alpha} \frac{\sigma_u}{\sigma_0} \exp(i\omega). \quad (16)$$

由上式可知,不同的 $\alpha$ 只会影响 $\sigma_u$ 的系数,为了简化计算,突出磁通流动速度的影响,考虑一个简单的情况 $\alpha = 0$ .当 $\alpha = 0, \beta = 0, \eta = 0$ 时,可在表中查得 $\omega = 52.1^\circ$ <sup>[6]</sup>.当应力强度因子已知时,可以得到裂纹开裂单位体积的能量释放率为

$$G = \frac{c_1 + c_2}{16} |K|^2, \quad (17)$$

其中

$$c_1 = \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1}, c_2 = \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2}.$$

需要说明的是,如图2所示,如果裂纹在界面中间且关于中轴对称,则可以将问题简化为图1(a)的简化计算模型<sup>[6]</sup>,此时断裂公式(11)~(17)依旧可用,注意需要满足前面部分所作的假设: $h_1 \ll h_2, 2a \ll L$ 且初始裂纹长度为薄膜厚度的数倍.



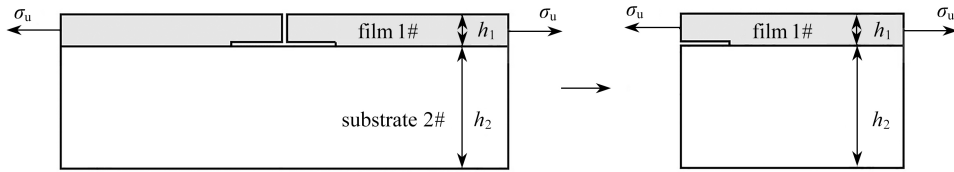


图 2 薄膜与基底结构界面中心处裂纹计算模型示意图

Fig. 2 The calculation model of a crack at the center of the interface between the thin film and the substrate

## 2 结果与讨论

### 2.1 磁场上升阶段薄膜内电磁场分布

当外加磁场  $B_a/B_p = 2$  时, 截面 A 的电流密度和磁通密度分布分别如图 3、图 4 所示, 为了清楚地反映变化趋势, 选定磁通流动速度  $v_0/a = 0 \text{ s}^{-1}, 0.5 \text{ s}^{-1}, 3 \text{ s}^{-1}$ . 由图 3 可知, 随着磁通流动速度的增大, 膜内电流密度的最大值将会增大, 并且电流密度分布的变化速率加快, 这意味着维持膜内最大电流密度的能力变弱. 从图 4 可以看出, 随着磁通流动速度的增大, 磁通密度的极值随之增大. 此外, 注意到图 4 薄膜内磁通密度为零对应的  $x$  轴范围为屏蔽区的尺寸, 即图 1(b) 中所示的  $2b$ , 较大的磁通流动速度将会导致较大的屏蔽区尺寸.

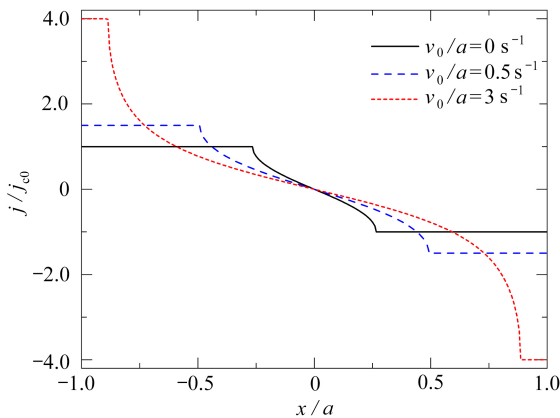


图 3 截面 A 的电流密度分布 (磁场上升阶段)

Fig. 3 The current density distribution in cross-section A (the increasing field)

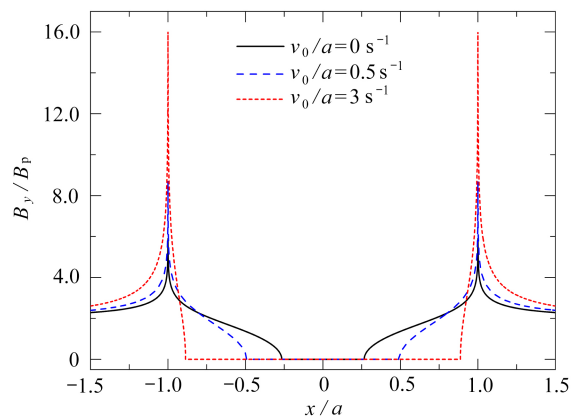


图 4 截面 A 的磁通密度分布 (磁场上升阶段)

Fig. 4 The flux density distribution in cross-section A (the increasing field)

进一步可以得到, 当磁通流动速度增大时, 非零的电磁力将会向膜边缘集中, 且电磁力最大值将增大.

### 2.2 磁场上升阶段裂尖应力场

图 5 和图 6 分别给出了 I 型应力强度因子和 II 型应力强度因子与外加磁场的关系. I 型应力强度因子表示裂纹尖端处法向正应力的强度, II 型应力强度因子则表示裂纹尖端处切应力的强度. 图 5 和图 6 表明, 随着外加磁场逐渐增大, 裂纹尖端处的正应力和切应力均增大. 在外加磁场不变的情况下, 磁通流动速度越大, 裂纹尖端处正应力和切应力越大, 且切应力的增量相对于正应力更大一些. 此外, 较大的磁通流动速度将会导致裂尖应力场的变化速率加快.

通过以上分析可以得到, 磁通流动速度和裂纹尖端处的应力是正相关的, 且磁通流速变化对切应力的影响更大.

### 2.3 磁场下降阶段薄膜内电磁场分布

当  $B_a/B_p = 1.5$  时, 截面 A 的电流密度和磁通密度分布分别如图 7、图 8 所示. 如图 7 所示, 电流密度分布关于零点反对称, 在  $x$  轴正方向, 电流密度从零点开始先增大至极大值, 后减小至极小值随后保持恒定, 两个极值对应的  $x$  轴坐标分别是  $b$  和  $\tilde{b}$ . 图 7 表明, 磁通流动速度的增大将会导致膜内电流密度的最大值增大, 电流密度分布的变化速率也将提高, 同时电流密度的分布将会更加靠近薄膜边缘. 如图 8 所示, 磁通密度分布关于截面 A 的中轴对称, 与电流密度分布一致, 磁通密度分布也存在两个分段点. 图 8 表明, 磁通密度峰值的大小

会随着磁通流动速度的增大而增大.此外,磁通流动速度的增大会导致磁通密度分布更加接近薄膜边缘.

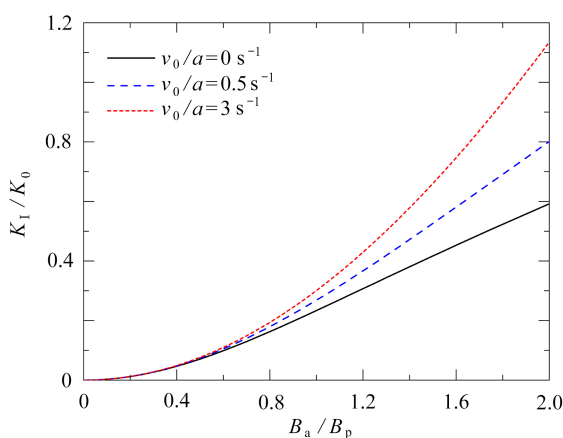


图5 I型应力强度因子  $K_I/K_0$  与外加磁场的关系(磁场上升阶段)

Fig. 5 The relationship between mode I stress intensity factor  $K_I/K_0$  and the magnetic field (the increasing field)

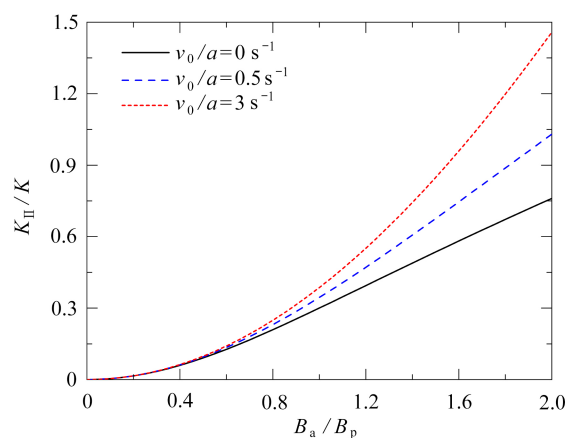


图6 II型应力强度因子  $K_{II}/K_0$  与外加磁场的关系(磁场上升阶段)

Fig. 6 The relationship between mode II stress intensity factor  $K_{II}/K_0$  and the magnetic field (the increasing field)

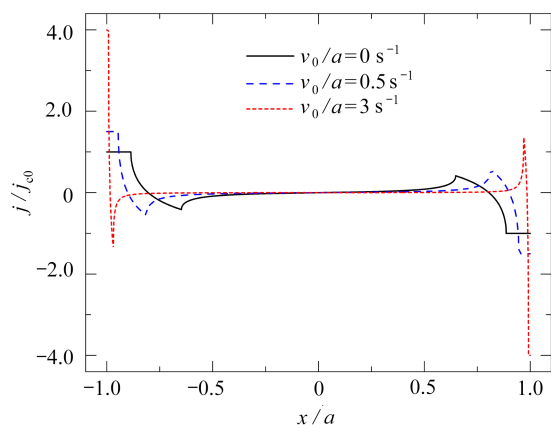


图7 截面A的电流密度分布(磁场下降阶段)

Fig. 7 The current density distribution in cross-section A (the decreasing field)

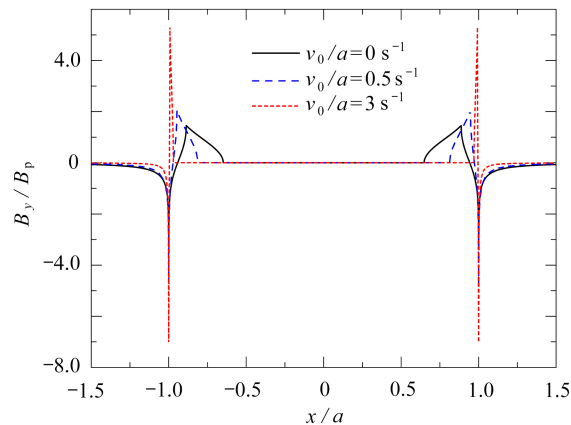


图8 截面A的磁通密度分布(磁场下降阶段)

Fig. 8 The flux density distribution in cross-section A (the decreasing field)

将上述内容与磁场上升阶段的相关内容进行对比,可以得出:超导薄膜在外加磁场的作用下,磁通流动速度越大,膜内屏蔽区尺寸就越大,同时薄膜内电流密度的极值和变化速率也将增大,磁通密度分布同理.相对于磁场上升阶段,上述变化在磁场下降阶段更为明显.

#### 2.4 磁场下降阶段裂尖应力场

I型应力强度因子和II型应力强度因子与外加磁场的关系分别如图9、图10所示.由于裂纹面正向压应力对裂纹张拉破坏没有影响,也就是说  $K_I/K_0$  取负值没有意义,因此将负的  $K_I/K_0$  取为零.由图9和图10可知,磁通流动速度的增大,会导致裂纹尖端的应力(正应力和切应力)增大,以及应力场的变化速率加快.需要注意:大约在外加磁场  $B_a/B_p < 1$  的区域内,裂纹尖端正应力为零,切应力为负,磁通流动速度的增大将会减小出现这一现象的  $B_a/B_p$  的范围.结合式(10)、(15)可以得到,裂纹尖端应力为负值是由于此时作用在裂纹边缘处的合力  $\sigma_n$  为负值造成的,这对应了超导薄膜两端受拉的情况.

将上述内容与磁场上升阶段的相关内容进行对比,可以得出:随着磁通流动速度的增大,裂纹尖端场的应力(正应力和切应力)将会增大,且变化速率加快.特别是在磁场下降阶段中,当外加磁场的取值为靠近零点的一个小范围时,会出现裂纹尖端处拉应力为零且剪应力为负值的现象,磁通流动速度的增大将减小这个范围.

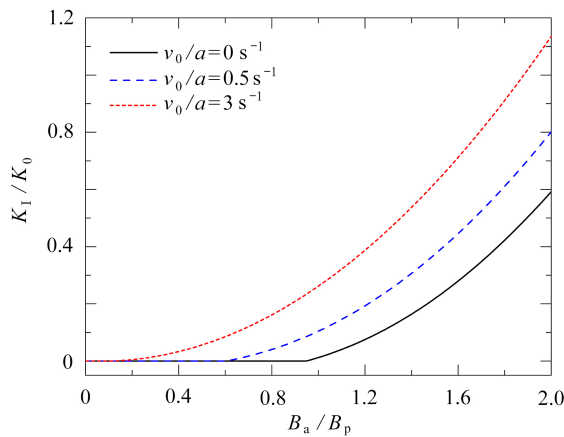


图 9 I 型应力强度因子  $K_I/K_0$  与外加磁场的关系 (磁场下降阶段)  
 Fig. 9 The relationship between mode I stress intensity factor  $K_I/K_0$  and the magnetic field (the decreasing field)

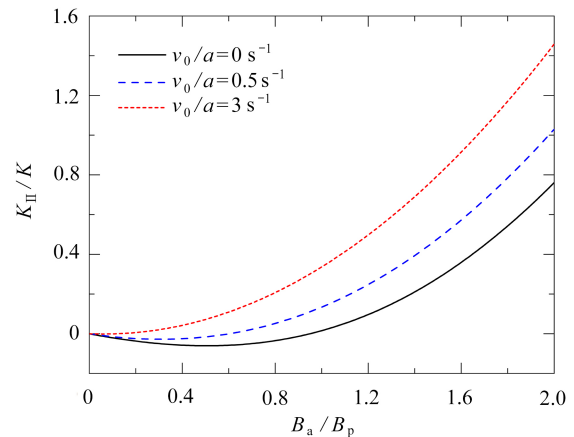


图 10 II 型应力强度因子  $K_{II}/K_0$  与外加磁场的关系 (磁场下降阶段)  
 Fig. 10 The relationship between mode II stress intensity factor  $K_{II}/K_0$  and the magnetic field (the decreasing field)

### 2.5 能量释放率

图 11 展示了不同的磁通流动速度下, 能量释放率  $G$  与外加磁场强度  $B_a$  的关系, 用不带标记的线和带标记的线分别表示磁场上升阶段和磁场下降阶段. 从图 11(a) 可以看出, 磁场上升和下降阶段都在  $B_a = B_m$  时达到  $G$  的最大值. 相同外部条件下, 磁通流动速度越大会导致能量释放率越大, 这意味着裂纹开裂的风险增大. 大多数时候磁场上升阶段的能量释放率都大于磁场下降阶段, 这意味着最大开裂概率发生在磁场上升阶段. 如图 11(b) 所示, 在  $B_a$  接近于零点的一个较小范围内, 磁场下降阶段中的能量释放率大于上升阶段. 需要注意到, 在磁场下降阶段中, 随着外加磁场的增加, 能量释放率有一个先上升至峰值后减小至 0 最后继续上升的山形走势, 通过增大磁通流动速度, 将会使得出现上述山形曲线对应的  $B_a$  的范围减小.

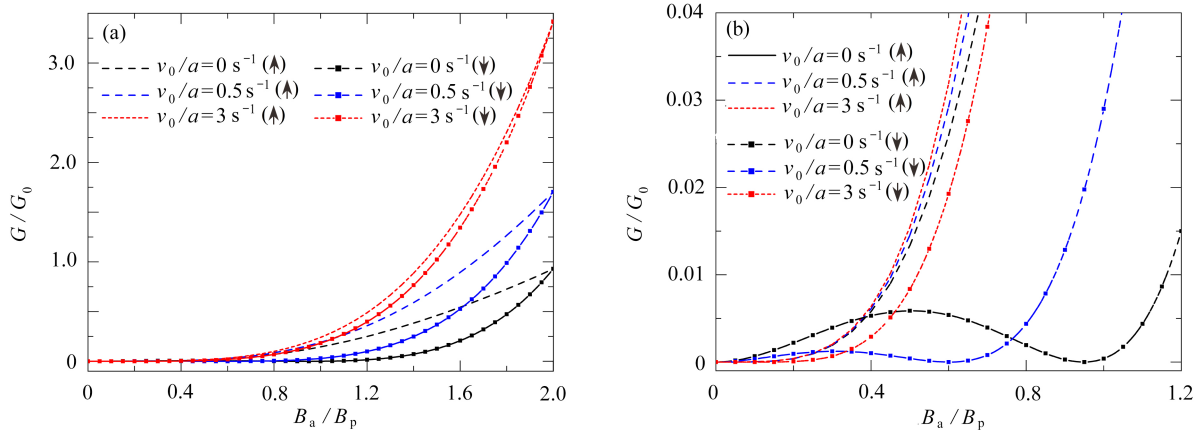


图 11 磁场上升阶段和磁场下降阶段能量释放率与外加磁场的关系: (a)  $B_a \leq 2.0B_p$ ; (b)  $B_a \leq 1.2B_p$ ,  $G/G_0 \leq 0.04$   
 Fig. 11 The relationship between the energy release rate and the external magnetic field in increasing and decreasing fields:  
 (a)  $B_a \leq 2.0B_p$ ; (b)  $B_a \leq 1.2B_p$ ,  $G/G_0 \leq 0.04$

我们得出, 在磁场上升阶段和磁场下降阶段中, 能量释放率均在  $B_a = B_m$  处均达到最大值. 相同条件下, 磁通流动速度越大, 裂纹开裂的风险就越大, 此外, 最大开裂概率发生在磁场上升阶段.

### 3 结 论

为了分析超导薄膜与厚基底在外部磁场作用下的界面裂纹问题, 本文基于磁通量子穿透薄膜理论和线弹性断裂理论, 建立了研究超导层与基底界面裂纹问题的解析模型, 对外加磁场作用下磁通流动速度对裂纹尖端应力场和能量释放率的影响进行了分析. 所得结果表明: 超导薄膜在外加磁场的作下, 磁通流动速度越



大, 裂纹尖端处的应力越大, 能量释放率也越大, 这意味着裂纹开裂的风险越大. 本解析模型有助于分析磁通流动效应对薄膜基底结构界面断裂行为的影响, 但与超导薄膜的实际应用情况相比仍有差距, 例如做出了线弹性假设以及忽略了热应力的影响, 因此, 今后仍需针对更为复杂的情况进行研究.

#### 参考文献(References):

- [1] ZHANG Z X, XUE F, GOU X F. Interaction of two parallel cracks in REBCO bulk superconductors under applied magnetic field[J]. *Chinese Physics Letters*, 2016, **33**(7): 077401.
- [2] 高配峰. 高温超导复合带材力学行为及变形对临界特性影响的研究[D]. 博士学位论文. 兰州: 兰州大学, 2017. (GAO Peifeng. Mechanical behaviors and influence of deformation on critical properties for high temperature superconducting composite tapes[D]. PhD Thesis. Lanzhou: Lanzhou University, 2017. (in Chinese))
- [3] MBAM S O, GOU X F. Interface crack growth rate and fatigue life of multilayer-coated conductor tapes[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **228**: 106910.
- [4] YONG H D, ZHOU Y H. Interface crack between superconducting film and substrate[J]. *Journal of Applied Physics*, 2011, **110**(6): 063924.
- [5] HUTCHINSON J W, SUO Z. Mixed mode cracking in layered materials[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1991, **29**: 63-191.
- [6] SUO Z, HUTCHINSON J W. Interface crack between two elastic layers[J]. *International Journal of Fracture*, 1990, **43**(1): 1-18.
- [7] 李聪, 牛忠荣, 胡宗军, 等. 求解双材料裂纹结构全域应力场的扩展边界元法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(8): 926-937. (LI Cong, NIU Zhongrong, HU Zongjun, et al. Computation of total stress fields for cracked bi-material structures with the extended boundary element method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(8): 926-937.(in Chinese))
- [8] 张厚源. 考虑层间界面失效行为的REBCO超导层合带材裂纹扩展数值研究[D]. 博士学位论文. 兰州: 兰州大学, 2020. (ZHANG Houyuan. Numerical study on crack propagation of REBCO superconducting laminated tapes considering the behavior of interfacial[D]. PhD Thesis. Lanzhou: Lanzhou University, 2020. (in Chinese))
- [9] MA P, SU R K L, FENG W J. Crack tip enrichment functions for extended finite element analysis of two-dimensional interface cracks in anisotropic magneto-electro-elastic bimetals[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, **161**: 21-39.
- [10] GU Y, ZHANG C Z. Novel special crack-tip elements for interface crack analysis by an efficient boundary element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **239**: 107302.
- [11] GRUSS S, FUCHS G, KRABBES G, et al. Superconducting bulk magnets: very high trapped fields and cracking[J]. *Applied Physics Letters*, 2001, **79**(19): 3131-3133.
- [12] ZELDOV E, CLEM J R, MCELFFRESH M, et al. Magnetization and transport currents in thin superconducting films[J]. *Physical Review B*, 1994, **49**(14): 9802-9822.
- [13] BRANDT E H, INDENBOM M V, FORKL A. Type-II superconducting strip in perpendicular magnetic field[J]. *Europhysics Letters*, 1993, **22**(9): 599-610.
- [14] MCDONALD J, CLEM J R. Theory of flux penetration into thin films with field-dependent critical current[J]. *Physical Review B*, 1996, **53**(13): 8643-8650.
- [15] JOHANSEN T H. Flux-pinning-induced stress and strain in superconductors: long rectangular slab[J]. *Physical Review B*, 1999, **60**(17): 11187-11190.
- [16] XUE F, YONG H D, ZHOU Y H. Effect of flux creep and viscous flux flow on flux-pinning-induced stress and magnetostriction in a long rectangular slab superconductor[J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, **108**(10): 103910.
- [17] ZHAO Y F, XIONG K. Magnetization and stress in superconducting film under electromagnetic force with viscous flux flow[J]. *Modern Physics Letters B*, 2020, **34**(26): 2050283.
- [18] 章立源, 张金龙, 崔广霖. 超导物理学[M]. 北京: 电子工业出版社, 1995. (ZHANG Liyuan, ZHANG Jinlong, CUI Guangji. *Superconductivity Physics*[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 1995. (in Chinese))
- [19] YANG Y, XIAO L Y, LI X H. Impact of viscous flux flow on the stress in long rectangular slab superconductors[J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, **107**(2): 023910.
- [20] EVANS A G, HUTCHINSON J W. The thermomechanical integrity of thin films and multilayers[J]. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1995, **43**(7): 2507-2530.