应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

非线性弹性杆波动方程的显式精确解

郭 鹏，唐荣安，孙小伟，洪学仁，石玉仁

Explicit Exact Solutions to the Wave Equation for Nonlinear Elastic Rods

GUO Peng, TANG Rongan, SUN Xiaowei, HONG Xueren, and SHI Yuren

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.420245 http://www.applmathmech.cn

非线性弹性杆波动方程的显式精确解*

郭　鹏[1,2,3]，　唐荣安[4]，　孙小伟[2]，　洪学仁[4]，　石玉仁[4]

（1. 兰州交通大学 材料科学与工程学院，兰州 730070；
2. 兰州交通大学 数理学院，兰州 730070；
3. 兰州交通大学 铁道车辆热工教育部重点实验室，兰州 730070；
4. 西北师范大学 物理与电子工程学院，兰州 730070）

摘要： 应用 sine-cosine 方法对非线性弹性杆波动方程进行了求解, 得到了该方程的一些新的周期波解和孤波解 (材料常数 n 为不等于 1 的常数). 对部分结果通过数学软件得到了解的图像, 获得的结果有助于非线性弹性杆中孤波存在性问题的进一步研究.

关　键　词： sine-cosine 方法；　非线性弹性杆；　精确解；　孤波
中图分类号： O343; O175.2　　　**文献标志码：** A　　　DOI：10.21656/1000-0887.420245

Explicit Exact Solutions to the Wave Equation for Nonlinear Elastic Rods

GUO Peng[1,2,3]，　TANG Rongan[4]，　SUN Xiaowei[2]，　HONG Xueren[4]，　SHI Yuren[4]

（1. *School of Materials Science and Engineering*, *Lanzhou Jiaotong University*, *Lanzhou* 730070, *P.R.China*；
2. *School of Mathematics and Physics*, *Lanzhou Jiaotong University*, *Lanzhou* 730070, *P.R.China*；
3. *Key Laboratory of Railway Vehicle Thermal Engineering*, *Ministry of Education*,
Lanzhou Jiaotong University, *Lanzhou* 730070, *P.R.China*；
4. *College of Physics and Electronic Engineering*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *P.R.China*）

Abstract: The sine-cosine method was applied to the wave equation for nonlinear elastic rods, and some new periodic and solitary solutions to the equation were obtained (with material constant n other than 1). The graphs of some solutions were given through the math software. The results are helpful to further research on existence of solitary waves in the nonlinear elastic rods.

Key words: sine-cosine method; nonlinear elastic rod; exact solution; solitary wave

引　　言

杆是重要的工程应用元件, 杆件中的波动特别是非线性波的研究日益引起科研人员的关注, 现已成为工程领域的一个研究热点[1-6]. 在文献 [1] 中, 张善元和庄蔚建立了计入横向惯性效应任意形状截面的非线性弹性杆波动方程, 其形式为

* **收稿日期：** 2021-08-17; **修订日期：** 2021-11-25
基金项目： 国家自然科学基金 (11765017; 12065022; 12165018); 甘肃省重点人才项目 (2020RCXM100)
作者简介： 郭鹏(1978—), 男, 副教授, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: guopenglzjtu@126.com).
引用格式： 郭鹏, 唐荣安, 孙小伟, 洪学仁, 石玉仁. 非线性弹性杆波动方程的显式精确解[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(8): 869-876.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\left[1+na_n\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n-1}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\nu^2 J_\rho}{s}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}=0, \tag{1}$$

其中, s为杆截面积, J_ρ为杆截面的极惯性矩, $c_0^2=E/\rho$为线弹性纵波波速平方, E 为弹性模量, ρ为杆的密度, ν为 Poisson 比, a_n和n均为材料常数. 取材料常数$n=2$, 通过变换将方程变换为 KdV 方程并用逆散射方法获得了 KdV 方程的孤波解, 证明了在材料常数$n=2$时, 非线性弹性杆中存在孤波. 很多学者对非线性弹性杆中的孤波问题进行了研究. 在文献 [7] 中, 胡伟鹏等取材料常数$n=2$, 用多辛方法对方程 (1) 进行了数值模拟, 讨论了非线性效应和几何弥散效应对孤波传播的影响. 在文献 [8] 中, Duan 和 Zhao 取材料常数$n=3$, 用约化摄动方法将方程 (1) 变换为非线性 Schrödinger 方程, 得到了方程的包络孤波解. 在文献 [9] 中, 郭鹏等取材料常数$n\geqslant 2$, 用约化摄动方法将方程 (1) 变换为变形 KdV 方程. 在文献 [10] 中, 吕克璞等取材料常数$n\geqslant 2$, 用约化摄动方法将方程 (1) 变换为非线性 Schrödinger 方程. 以上研究证明了在材料常数$n\geqslant 2$时, 非线性弹性杆中存在孤波和包络孤波. 但是需要注意的是, 用约化摄动方法获得的解还是方程的近似解. 在文献 [11] 中, Kabir 取材料常数$n=2$, 用修正的 Kudryashov 方法、(G'/G) 展开法和 exp 函数法获得了方程 (1) 的精确解. 在文献 [12] 中, Çelik 等取材料常数$n=2$, 用 Lie 群分析方法和 F-展开法获得了方程 (1) 的精确解. 在文献 [13-14] 中, Li 等用平面动力系统方法研究了材料常数$n=2, 3, 5$以及大于 5 的奇数情况下的精确解.

非线性弹性杆波动方程的求解尽管已经有了上述研究工作, 但是对于方程 (1) 中材料常数n取不同数值时 (包括分数), 求解 (特别是精确解) 仍然是很困难的. 值得注意的是, 对于非线性方程的求解, 经过相关学者近几十年来的努力, 目前已经发展出了很多精确求解的方法 [15-36]. 在这些求解方法中, sine-cosine 方法是一种较为简便的方法. 这种方法的思路是将方程的解拟设为正弦或余弦函数形式, 然后将正弦或余弦函数形式的解代入原方程, 用待定系数法确定相应的常数, 从而获得方程的精确解. 本文应用 sine-cosine 方法[29-33] 对非线性弹性杆波动方程进行了求解, 得到了该方程的一些新的周期波解和孤波解. 对材料常数n不等于 1(包括材料常数n为不等于 1 的分数) 的非线性弹性杆中孤波的存在性给出了理论证明.

1 非线性弹性杆波动方程的求解

对方程 (1) 引入如下变换:

$$\xi=kx-ct, \tag{2}$$

其中k, c为待定常数. 将方程 (2) 代入方程 (1) 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{na_n c_0^2 k^3}{c^2-c_0^2k^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\nu^2 J_\rho c^2k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}=0. \tag{3}$$

将方程 (3) 对ξ积分一次, 并取积分常数为零可得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{a_n c_0^2 k^3}{c^2-c_0^2k^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^{n}-\frac{\nu^2 J_\rho c^2k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}=0. \tag{4}$$

令

$$w=\frac{\partial u}{\partial \xi}, \tag{5}$$

则方程 (4) 的形式可简化为

$$w-\alpha w^n-\beta\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=0, \tag{6}$$

其中

$$\alpha=\frac{a_n c_0^2k^3}{c^2-c_0^2k^2},\ \beta=\frac{\nu^2 J_\rho c^2 k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}. \tag{7}$$

假设方程 (6) 的解为

$$w(\xi)=\lambda\sin^m(\mu\xi). \tag{8}$$

将方程 (8) 代入方程 (6) 可得

$$\lambda(1+\beta m^2\mu^2)\sin^m(\mu\xi)-\alpha\lambda^n\sin^{nm}(\mu\xi)-\beta(m-1)m\lambda\mu^2\sin^{m-2}(\mu\xi)=0. \tag{9}$$

为使方程 (9) 有非零解, 需要平衡其中第二和第三项正弦函数的指数, 使得

$$nm=m-2. \tag{10}$$

从方程 (10) 可以很方便地确定出$m=-2/(n-1)$. 这样材料常数n只能取为不等于 1 的常数. 将m代入方程 (9) 并合并正弦函数的同次项, 可得

$$\lambda\left[1+\frac{4\beta\mu^2}{(1-n)^2}\right]\sin^{-\frac{2}{n-1}}(\mu\xi)-\left[\alpha\lambda^n+\frac{2\beta(1+n)\lambda\mu^2}{(1-n)^2}\right]\sin^{-\frac{2n}{n-1}}(\mu\xi)=0. \tag{11}$$

令方程 (11) 中正弦函数前的系数为零, 可得

$$\begin{cases}\lambda\left[1+\dfrac{4\beta\mu^2}{(1-n)^2}\right]=0,\\ \alpha\lambda^n+\dfrac{2\beta(1+n)\lambda\mu^2}{(1-n)^2}=0.\end{cases} \tag{12}$$

由方程 (12) 解得

$$\lambda=\sqrt[n-1]{\frac{n+1}{2\alpha}},\ \mu=\pm(n-1)\sqrt{-\frac{1}{4\beta}}. \tag{13}$$

将方程 (13) 及α, β代入方程 (8), 可得

$$w_1=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\csc^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right], \tag{14}$$

$$w_2=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\csc^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]. \tag{15}$$

同理, 若假设方程 (6) 的解为

$$w(\xi)=\lambda\cos^m(\mu\xi). \tag{16}$$

将方程 (16) 代入方程 (6), 得到的解为

$$w_3=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\sec^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right], \tag{17}$$

$$w_4=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\sec^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]. \tag{18}$$

当$c_0^2k^2-c^2<0$时, 用双曲函数与三角函数之间的关系式

$$\csc(\mathrm{i}x)=-\mathrm{i}\,\mathrm{csch}\,x,\ \sec(\mathrm{i}x)=\mathrm{sech}\,x, \tag{19}$$

可将方程 (14)、(15)、(17)、(18) 化为

$$w_5=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}(-\mathrm{i})^{\frac{2}{n-1}}\mathrm{csch}^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right], \tag{20}$$

$$w_6=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}(-\mathrm{i})^{\frac{2}{n-1}}\mathrm{csch}^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right], \tag{21}$$

$$w_7=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\mathrm{sech}^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right], \tag{22}$$

$$w_8=\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\operatorname{sech}^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right].\tag{23}$$

根据方程 (5), 将方程 (14)、(15)、(17)、(18) 对ξ积分一次, 可得

$$u_1=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\csc^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi,\tag{24}$$

$$u_2=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\csc^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi,\tag{25}$$

$$u_3=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\sec^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi,\tag{26}$$

$$u_4=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}\sec^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi.\tag{27}$$

方程 (24)~(27) 即为非线性弹性杆波动方程的三角函数周期波解.

同理, 将方程 (20)~(23) 对ξ积分一次, 可得

$$u_5=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}(-\mathrm{i})^{\frac{2}{n-1}}\operatorname{csch}^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi,\tag{28}$$

$$u_6=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}(-\mathrm{i})^{\frac{2}{n-1}}\operatorname{csch}^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi,\tag{29}$$

$$u_7=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}(-\mathrm{i})^{\frac{2}{n-1}}\operatorname{sech}^{\frac{2}{n-1}}\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi,\tag{30}$$

$$u_8=\int\sqrt[n-1]{\frac{(n+1)(c^2-c_0^2k^2)}{2a_nc_0^2k^3}}(-\mathrm{i})^{\frac{2}{n-1}}\operatorname{sech}^{\frac{2}{n-1}}\left[-\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(n-1)\xi\right]\mathrm{d}\xi.\tag{31}$$

方程 (28)~(31) 即为非线性弹性杆波动方程的孤波解.

有了以上精确解的表达式, 只要确定了材料常数n, 即可通过积分获得非线性弹性杆波动方程的精确解. 例如, 当材料常数$n=1.5$时, 由方程 (24)~(31) 可得

$$u_1=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4\nu^2J_\rho c^2k^2}{s(c_0^2k^2-c^2)}}\cot\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[2+\csc^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C,\tag{32}$$

$$u_2=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4\nu^2J_\rho c^2k^2}{s(c_0^2k^2-c^2)}}\cot\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[2+\csc^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C,\tag{33}$$

$$u_3=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4\nu^2J_\rho c^2k^2}{s(c_0^2k^2-c^2)}}\tan\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[2+\sec^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C,\tag{34}$$

$$u_4=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4\nu^2J_\rho c^2k^2}{s(c_0^2k^2-c^2)}}\tan\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[2+\sec^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4\nu^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C,\tag{35}$$

$$u_5=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4v^2J_\rho c^2k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}}\coth\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[-2+\operatorname{csch}^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C, \tag{36}$$

$$u_6=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4v^2J_\rho c^2k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}}\coth\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[-2+\operatorname{csch}^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C, \tag{37}$$

$$u_7=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4v^2J_\rho c^2k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}}\tanh\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[2+\operatorname{sech}^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C, \tag{38}$$

$$u_8=-\frac{(2.5)^2(c^2-c_0^2k^2)^2}{6a_n^2c_0^4k^6}\sqrt{\frac{4v^2J_\rho c^2k^2}{s(c^2-c_0^2k^2)}}\tanh\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\times\left[2+\operatorname{sech}^2\left[0.5\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]\right]+C, \tag{39}$$

其中，C为积分常数.

当材料常数$n=3$时，由方程 (24)~(31) 可得

$$u_1=\sqrt{-\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}\ln\tan\left[\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]+C, \tag{40}$$

$$u_2=\sqrt{-\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}\ln\cot\left[\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]+C, \tag{41}$$

$$u_3=\sqrt{-\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}\ln\frac{1+\tan\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)}{1-\tan\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)}+C, \tag{42}$$

$$u_4=\sqrt{-\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}\ln\frac{1+\tan\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)}{1-\tan\sqrt{\frac{s(c_0^2k^2-c^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)}+C, \tag{43}$$

$$u_5=\sqrt{\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}(-\mathrm{i})\ln\tanh\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]+C, \tag{44}$$

$$u_6=\sqrt{\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}(-\mathrm{i})\ln\coth\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]+C, \tag{45}$$

$$u_7=2\sqrt{\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}(-\mathrm{i})\arctan\tanh\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]+C, \tag{46}$$

$$u_8=2\sqrt{\frac{8v^2J_\rho c^2}{a_nc_0^2ks}}(-\mathrm{i})\arctan\tanh\left[\sqrt{\frac{s(c^2-c_0^2k^2)}{4v^2J_\rho c^2k^2}}(kx-ct)\right]+C, \tag{47}$$

其中，C为积分常数. 当材料常数$n=3$时，在文献 [13] 中得到了方程 (1) 如下形式的精确解：

$$u=\pm\left(\frac{4\sqrt{\delta}}{\gamma}\right)\arctan(\mathrm{e}^{\sqrt{\delta}(x-\omega t)}), \tag{48}$$

$$u=\pm\left(\sqrt{\frac{2}{-\gamma}}\right)\ln\cosh\left[\sqrt{\frac{(-\delta)}{2}}(x-\omega t)\right],\tag{49}$$

其中, $\delta=\frac{s(c^2-c_0^2)}{c^2\nu^2J_\rho}$, $\gamma=\frac{sc_0^2a_n}{c^2\nu^2J_\rho}$, ω为波速.通过比较可以看出,本文所得结果为形式不同的新解.

由材料常数n取其他不同的数值,我们还可以获得更多新的精确解,此处不再一一列出.

2 结果与讨论

应用 sine-cosine 方法对非线性弹性杆波动方程进行了求解,得到了一些新的周期波解和孤波解.根据获得的精确解,还可以很方便地绘制精确解的图像.例如图 1 绘制了当$c=1.5$, $k=1$, $a_n=0.7$, $c_0=100$, $\nu=0.4$, $J_\rho=0.3$, $s=3.5$, $C=0$时,方程 (34) 的三角函数周期波解;图 2 绘制了当$c=100$, $k=0.5$, $a_n=0.7$, $c_0=30$, $\nu=0.2$, $J_\rho=0.1$, $s=10$, $C=0$时,方程 (38) 的孤波解.所获得的非线性弹性杆波动方程的新精确解(特别是孤波解)对材料常数n不等于 1 的非线性弹性杆中孤波的存在性给出了理论证明(包括材料常数n为不等于 1 的分数),有助于该问题的进一步研究.从求解非线性弹性杆波动方程的过程可以看出,sine-cosine 方法是一种简便、有效的方法.在文献 [32-33] 中,采用 sine-cosine 方法同样简便地获得了 KdV 方程、修正 KdV 方程、广义 KdV 方程、Boussinesq 方程、RLW 方程、BBM 方程、Phi-4 方程、修正 Degasperis-Procesi 方程、修正 Camassa-Holm 方程的精确解.这种方法还可用于其他非线性方程或方程组的求解.

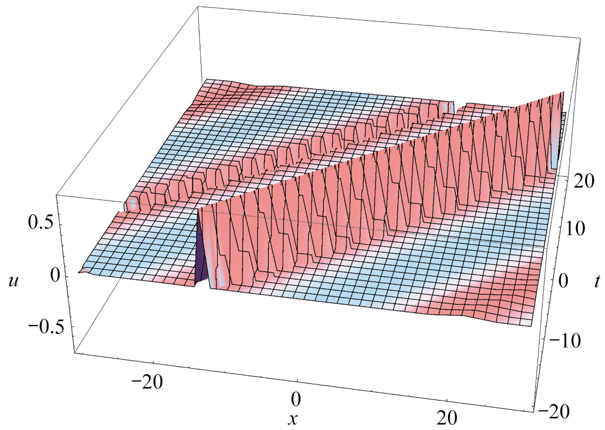

图 1 方程 (34) 解的图像

Fig. 1 Graphical representation of solution (34)

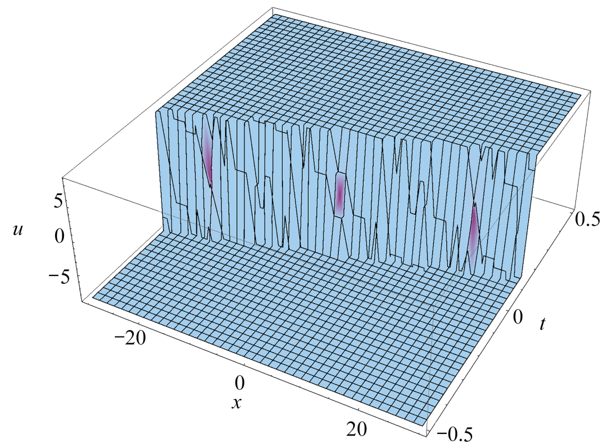

图 2 方程 (38) 解的图像

Fig. 2 Graphical representation of solution (38)

3 结 束 语

非线性弹性杆波动方程的求解尽管已经有了相关参考文献及本文所开展的上述研究工作,但是对于方程 (1) 中材料常数取不同数值时(包括分数)的求解仍然是很困难的.继续研究新的求解方法与获得同类型方程更丰富的解,值得研究工作者们进行更深入的钻研与探索.

参考文献(References):

[1] 张善元, 庄蔚. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 力学学报, 1988, **20**(1): 58-67. (ZHANG Shanyuan, ZHUANG Wei. The strain solitary waves in a nonlinear elastic rod[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1988, **20**(1): 58-67.(in Chinese))

[2] 庄蔚, 杨桂通. 孤波在非线性弹性杆中的传播[J]. 应用数学和力学, 1986, **7**(7): 571-581. (ZHUANG Wei, YANG Guitong. The propagation of solitary waves in a nonlinear elastic rod[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, **7**(7): 571-581.(in Chinese))

[3] 张善元, 刘志芳. 有限变形弹性杆中三种非线性弥散波[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(7): 825-832. (ZHANG Shanyuan, LIU Zhifang. Three kinds of nonlinear-dispersive waves in finite deformation elastic rods[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(7): 825-832.(in Chinese))

[4] SAMSONOV A M. Evolution of a soliton in a nonlinearly elastic rod of variable cross-section[J]. *Soviet Physics*

Doklady, 1985, **29**: 586-587.

[5] SAMSONOV A M, SOKURINSKAYA E V. Solitary longitudinal waves in an inhomogeneous nonlinear elastic rod[J]. *Journal of Applied Mathematics & Mechanics*, 1988, **51**(3): 376-381.

[6] DAI H H, HUO Y. Solitary waves in an inhomogeneous rod composed of a general hyperelastic material[J]. *Wave Motion*, 2002, **35**(1): 55-69.

[7] 胡伟鹏, 韩爱红, 邓子辰. 非线性弹性杆中纵波传播过程的数值模拟[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(1): 8-13.(HU Weipeng, HAN Aihong, DENG Zichen. Numerical simulation on the longitudinal wave in nonlinear elastic rod[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(1): 8-13.(in Chinese))

[8] DUAN W S, ZHAO J B. Solitary waves in a quadratic nonlinear elastic rod[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2000, **11**(8): 1265-1267.

[9] 郭鹏, 张磊, 吕克璞. 高次非线性弹性杆纵向振动方程的摄动分析[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2004, **40**(1): 38-41, 44.(GUO Peng, ZHANG Lei, LÜ Kepu. Perturbation analysis for higher order equation of longitudinal oscillation of a nonlinear elastic rod[J]. *Journal of Northwest Normal University* (*Natural Science*), 2004, **40**(1): 38-41, 44.(in Chinese))

[10] 吕克璞, 郭鹏, 张磊, 等. 非线性弹性杆波动方程的摄动分析[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(9): 1079-1083.(LÜ Kepu, GUO Peng, ZHANG Lei, et al. Perturbation analysis for wave equation of a nonlinear elastic rod[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(9): 1079-1083.(in Chinese))

[11] KABIR M M. Exact traveling wave solutions for nonlinear elastic rod equation[J]. *Journal of King Saud University*: *Science*, 2019, **31**(3): 390-397.

[12] ÇELIK N, SEADAWY A R, ÖZKAN Y S, et al. A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: abundant different type exact solutions and conservation laws[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2021, **143**: 110486.

[13] LI J B, ZHANG Y. Exact travelling wave solutions in a nonlinear elastic rod equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **202**(2): 504-510.

[14] LI J B, HE T L. Exact traveling wave solutions and bifurcations in a nonlinear elastic rod equation[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* (*English Series*), 2010, **26**(2): 283-306.

[15] HIROTA R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. *Physical Review Letters*, 1971, **27**(18): 1192-1194.

[16] PARKES E J, DUFFY B R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations[J]. *Computer Physics Communications*, 1996, **98**(3): 288-300.

[17] YAN C T. A simple transformation for nonlinear waves[J]. *Physics Letters A*, 1996, **224**(1/2): 77-84.

[18] SAKTHIVEL R, CHUN C, LEE J. New travelling wave solutions of Burgers equation with finite transport memory[J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2010, **65**(8/9): 633-640.

[19] ABDOU M A. The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2007, **31**(1): 95-104.

[20] SAKTHIVEL R, CHUN C. New soliton solutions of Chaffee-Infante equations using the exp-function method[J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2010, **65**(3): 197-202.

[21] ZAYED E M E, GEPREEL K A. The (G'/G)-expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2009, **50**(1): 013502.

[22] WANG M L. Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation[J]. *Physics Letters A*, 1996, **213**(5/6): 279-287.

[23] FAN E G. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations[J]. *Physics Letters A*, 2000, **277**(4/5): 212-218.

[24] 李德生, 张鸿庆. 改进的tanh函数方法与广义变系数KdV和MKdV方程新的精确解[J]. 物理学报, 2003, **52**(7): 1569-1573.(LI Desheng, ZHANG Hongqing. Improved tanh-function method and the new exact solutions for the general variable coefficient KdV equation and MKdV equation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, **52**(7): 1569-1573.(in

Chinese))

[25] CHANG J, GAO Y X, CAI H. Generalized extended tanh-function method for traveling wave solutions of nonlinear physical equations[J]. *Communications in Mathematical Research*, 2014, **30**(1): 60-70.

[26] PANDIR Y, YILDIRIM A. Analytical approach for the fractional differential equations by using the extended tanh method[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2018, **28**(3): 399-410.

[27] KHATER M M A, SEADAWY A R, LU D C. Solitary traveling wave solutions of pressure equation of bubbly liquids with examination for viscosity and heat transfer[J]. *Results in Physics*, 2018, **8**: 292-303.

[28] DAI C Q, WANG Y Y. Remarks on chaotic and fractal patterns based on variable separation solutions of (2+1)-dimensional general KdV equation[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2016, **56**: 10-16.

[29] ALQURAN M, JARADAT I, BALEANU D. Shapes and dynamics of dual-mode Hirota-Satsuma coupled KdV equations: exact traveling wave solutions and analysis[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2019, **58**(2): 49-56.

[30] ABDELRAHMAN M A E, SOHALY M A. On the new wave solutions to the MCH equation[J]. *Indian Journal of Physics*, 2019, **93**(7): 903-911.

[31] HE D D. Exact solitary solution and a three-level linearly implicit conservative finite difference method for the generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation with generalized Novikov type perturbation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **85**(1): 479-498.

[32] WAZWAZ A M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, **40**(5/6): 499-508.

[33] WAZWAZ A M. Solitary wave solutions for modified forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations[J]. *Physics Letters A*, 2006, **352**(6): 500-504.

[34] 张诗洁, 套格图桑. (3+1)维变系数Kudryashov-Sinelshchikov(K-S)方程的同宿呼吸波解和高阶怪波解[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(8): 852-858.(ZHANG Shijie, TAOGETUSANG. Homoclinic breathing wave solutions and high-order rogue wave solutions of (3+1)-dimensional variable coefficient Kudryashov-Sinelshchikov equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(8): 852-858.(in Chinese))

[35] 张雪, 孙峪怀. (3+1)维时间分数阶KdV-Zakharov-Kuznetsov方程的分支分析及其行波解[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(12): 1345-1355.(ZHANG Xue, SUN Yuhuai. Dynamical analysis and solutions for (3+1)-dimensional time fractional KdV-Zakharov-Kuznetsov equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(12): 1345-1355.(in Chinese))

[36] 石兰芳, 聂子文. 应用全新$G'/(G+G')$展开方法求解广义非线性Schrödinger方程和耦合非线性Schrödinger方程组[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 539-552.(SHI Lanfang, NIE Ziwen. Solutions to the nonlinear Schrödinger equation and coupled nonlinear Schrödinger equations with a new $G'/(G+G')$-expansion method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 539-552.(in Chinese))