

具有Gilpin–Ayala增长的随机捕食–食饵模型的动力学行为

陈乾君, 蒋媛, 刘子建, 谭远顺

Dynamic Behavior of a Stochastic Predator Prey Model With the Gilpin–Ayala Growth

CHEN Qianjun, JIANG Yuan, LIU Zijian, and TAN Yuanshun

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420203>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

捕食者和食饵均带有扩散的随机捕食–食饵模型动力学分析

Dynamics of Dual–Dispersal Predator–Prey Systems Under Stochastic Perturbations

应用数学和力学. 2017, 38(3): 355–368

一类具有非线性脉冲的捕食与被捕食系统的定性分析

Analysis of the Predator–Prey Model With Nonlinear Impulsive Control

应用数学和力学. 2020, 41(5): 568–580

周期环境中捕食者具有尺度结构的三物种捕食–食饵系统的最优收获

Optimal Harvesting in a Periodic 3–Species Predator–Prey Model With Size Structure in Predators

应用数学和力学. 2021, 42(5): 510–521

同时具有logistic出生和Markov切换的随机SIRS传染病模型的动力学

Dynamics of a Class of Stochastic SIRS Infectious Disease Models With Both Logistic Birth and Markov Switching

应用数学和力学. 2021, 42(12): 1327–1337

具有Holling IV型功能反应捕食系统的状态反馈控制

State Feedback Control of Predator–Prey Systems With Holling IV Functional Responses

应用数学和力学. 2020, 41(12): 1369–1380

捕食者食饵均染病的入侵反应扩散捕食系统中扩散的作用

Influence of Diffusion on an Invasion Diffusion Prey–Predator Model With Disease Infection in Both Populations

应用数学和力学. 2019, 40(3): 321–331



关注微信公众号，获得更多资讯信息

具有 Gilpin-Ayala 增长的随机捕食-食饵模型的 动力学行为*

陈乾君, 蒋媛, 刘子建, 谭远顺

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要: 该文研究了一类具有 Gilpin-Ayala 增长的随机捕食-食饵模型的动力学行为, 证明了系统全局正解的存在性和唯一性, 得到了灭绝性和持久性的充分条件. 在此基础上, 给出了控制捕食-食饵系统随机持久和灭绝的阈值, 并且讨论了系统解的一些渐近性态. 最后通过数值模拟, 验证了结果的有效性.

关键词: Gilpin-Ayala 增长; 捕食-食饵模型; Markov 状态切换; 脉冲扰动; 持久性

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420203

Dynamic Behavior of a Stochastic Predator Prey Model With the Gilpin-Ayala Growth

CHEN Qianjun, JIANG Yuan, LIU Zijian, TAN Yuanshun

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China)

Abstract: The dynamic behavior of a stochastic predator-prey model with the Gilpin-Ayala growth was studied. The existence and uniqueness of the global positive solution to the system were proved, and sufficient conditions for system extinction and persistence were obtained. On this basis, the thresholds for controlling the stochastic persistence and extinction of the predator-prey system were given, and some asymptotic behaviors of the solution were discussed. Finally, the effectiveness of the results was verified through numerical simulation.

Key words: Gilpin-Ayala growth; predator-prey model; Markov switching; impulsive disturbance; persistence

引 言

自然界中, 各个生物种群之间存在着竞争与合作、捕食与被捕食等多种复杂的相互作用关系, 其中捕食关系是普遍存在的物种之间相互作用的基本关系^[1-2]. 1926 年, Lotka-Volterra 模型被意大利数学家 Volterra 在解释 Finme 鱼港的鱼群数量变化规律的文章中提出. 迄今为止, Lotka-Volterra 模型仍是生物数学领域中反映捕食者与食饵所构成的, 两种群相互作用的最经典和最重要的模型. 一直以来, 很多专家学者对捕食-食饵模型进

* 收稿日期: 2021-07-16; 修订日期: 2022-03-05

基金项目: 国家自然科学基金 (11801047); 重庆市自然科学基金 (cstc2019jcyj-msxm2151); 重庆市教委基金 (KJQN20190707); 重庆市研究生导师团队建设项目 (JDDSTD201802); 重庆市高校创新研究群体项目 (CXQT21021)

作者简介: 陈乾君 (1991—), 女, 硕士生 (E-mail: 1143451443@qq.com);

刘子建 (1982—), 男, 博士, 硕士生导师 (通讯作者. E-mail: hbliuzijian@126.com).

引用格式: 陈乾君, 蒋媛, 刘子建, 谭远顺. 具有 Gilpin-Ayala 增长的随机捕食-食饵模型的动力学行为[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(4): 453-468.

行了研究^[3-5],捕食-食饵模型也应用到了经济学^[6]、物理学^[7]及统计力学^[8]等各个方面.

经典的 Lotka-Volterra 模型在考虑捕食-食饵种群相互作用关系时有一些不足之处:未考虑捕食者的捕食能力,即捕食者对食饵的功能反应.1965年,Holling^[9]在实验和分析的基础上提出了三类适应不同生物的功能反应函数.陈兰荪等^[10-11]对具有第二类功能性反应函数的捕食-食饵模型进行了系统的研究,得到了模型正平衡态的全局稳定和极限环存在唯一的充分条件.为了更真实地反映自然界发展的过程,研究者们通过脉冲微分方程来描述在固定或不固定时刻的快速变化或跳跃的现象.如付胜男等^[12]研究了一类具有状态脉冲控制的捕食-食饵模型,证明了正平衡点的全局稳定性,以及当脉冲值大于正平衡点的捕食者密度时,系统周期解的存在唯一性.Liu等^[13]研究了一个具有阶段结构的脉冲三种群捕食-食饵系统,讨论了不同时刻的脉冲效应和捕食者的阶段结构因素对种群动力学行为的影响.

事实上,生态环境复杂多样,各种各样随机因素的干扰无时不在,不同程度地影响着生物生长的各个方面^[14].所以在确定性捕食-食饵模型丰富的研究基础上,提出了各种考虑环境白噪声和彩色噪声的随机捕食-食饵模型.Kumar等^[15]研究了随机影响下具有Holling第三类功能反应函数的捕食-食饵模型,并对模型的局部和全局稳定性进行了分析.Zhang等^[16]提出了一个具有跳跃随机Holling II型的一捕食者两食饵系统,研究了系统解的相关性质,并证明出正跳变噪声对系统有利但负跳变噪声对系统不利.2009年,一个具有随机扰动的修正 Leslie-Gower 和Holling II型的捕食-食饵模型被 Ji等^[17]提出,他们研究了系统解的性质,给出了系统灭绝的条件,并得到了系统持久性生存的条件.张树文^[18]研究了一个具 Markov 转换和脉冲扰动的捕食-食饵系统,给出了种群灭绝和平均非持续生存的充分条件.Jiang等^[19]研究了 Markov 状态切换下随机Holling II型的捕食-食饵模型,得到了捕食者种群的强持久性和灭绝的充分条件,并得到了它们之间的阈值等结论.随机捕食-食饵模型丰富的研究成果,让我们能更具体地了解环境随机扰动对生物种群动力学行为的影响,并应用在保护濒危物种和害虫防治及流行病预防等各个方面.

在种群生态学研究之初,许多的种群模型都假设生态系统中物种增长是线性的.这样虽然简化了模型,便于利用数学理论进行研究,但却与真实情况不同.因此,为了更好地反映现实问题,1973年,Ayala和 Gilpin 等对 logistic 模型进行了改进,在文献 [20] 中提出了如下模型:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(r - kx^\theta(t)).$$

他们将 θ 参数引入模型中,使得模型成为非线性系统,增加了研究难度.但是指数参数 θ 消除了经典 logistic 人口增长理论的限制,即每一个种群个体加入到人口中都会使人口的增长率下降一个常数,这样能更好地描述种群生物的相关种群动力学行为.关于 Gilpin-Ayala 模型各种形式的研究在很多文献^[21-23]中已经出现,并取得了丰富的研究成果.2020年,Jiang等^[24]研究了一个在 Markov 切换和脉冲干扰下,允许 Gilpin-Ayala 参数随状态切换变化的 Gilpin-Ayala 种群模型:

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)r(\xi(t)) \left[1 - \frac{x^{\theta(\xi(t))}(t)}{K(\xi(t))} \right] dt + \sigma(\xi(t))x(t)dB(t), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ x(t_k^+) = x(t_k) + h_k x(t_k), & h_k \in (-1, \infty), k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

他们讨论了系统全局正解的存在性和唯一性,研究了其种群动力学行为,并且求得了灭绝性和持久性之间的阈值.

本文主要研究在 Markov 状态切换和脉冲扰动下,具有随机 Gilpin-Ayala 增长的捕食-食饵模型的动力学行为,讨论模型如下:

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)[r(\xi(t)) - k(\xi(t))x^{\theta_1(\xi(t))}(t) - c(\xi(t))y(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))x(t)dB_1(t), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ dy(t) = y(t)[m(\xi(t)) - n(\xi(t))y^{\theta_2(\xi(t))}(t) + f(\xi(t))x(t)]dt + \sigma_2(\xi(t))y(t)dB_2(t), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ x(t_k^+) = x(t_k) + g_k x(t_k), & t = t_k, g_k \in (0, \infty), h_k \in (0, \infty), \\ y(t_k^+) = y(t_k) + h_k y(t_k), & t = t_k, g_k \in (0, \infty), h_k \in (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示食饵和捕食者的数量; $r(\xi(t))$ 和 $m(\xi(t))$ 表示相应种群的内在增长率; $k(\xi(t))$ 和 $n(\xi(t))$ 表示相应种群的密度依赖函数; $c(\xi(t))$ 表示捕食者的捕食率; $f(\xi(t))$ 表示营养物质转化为捕食者种群繁殖的比率;

$g_k > 0$ 和 $h_k > 0$ 表示补给, $g_k \in (-1, 0)$ 和 $h_k \in (-1, 0)$ 表示收获.

本文主要研究了 Markov 状态切换和白噪声及脉冲扰动如何影响系统的灭绝性和持久性. 第 1 节介绍了本文证明过程中需要的预备知识; 第 2 节证明了系统 (1) 的全局正性; 第 3 节讨论了系统 (1) 的灭绝性和持久性; 第 4 节讨论了系统 (1) 解的渐近性态; 第 5 节用数值模拟验证了相关结论的有效性; 最后为全文结论.

1 预备知识

在本文中, 除非另有规定, 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备的概率空间, 其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是其上满足通常条件的滤子. 白噪声 $(B_1(t), B_2(t))$ 是该完备概率空间的独立标准 Brown 运动, 且白噪声强度用 $\sigma_i = \text{Var}(B_i(t)) (i = 1, 2)$ 表示; 彩色噪声 $\xi(t), t \geq 0$ 是该概率空间中一个取值于有限状态空间 $S = \{1, 2, \dots, k\}$ 的右连续的 Markov 链. 令 $\xi(t)$ 是从生成元矩阵 $Q = (q_{ij})_{m \times m}$ 中产生的, 也就是说

$$P\{\xi(t + \Delta t) = j | \xi(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & j \neq i, \\ 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), & j = i, \end{cases}$$

其中 $\Delta t > 0$, 对任意 $i \neq j, q_{ij} \geq 0$ 称为从 i 到 j 的转移率, 且 $\sum_{j=1}^m q_{ij} = 0$. 本文假设 Markov 链 $(\xi(t))_{t \geq 0}$ 是不可约的, 即系统能在任意状态转换到其他状态. 在此假设下^[25], Markov 链具有唯一的平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ 满足 $\pi Q = 0$ 且 $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1, \pi_i > 0, \forall i \in S$. 同时还假设 Markov 链 $\xi(t)$ 和 Brown 运动 $(B_1(t), B_2(t))$ 是独立的. 为讨论方便, 本文做如下假设及概念性说法:

(H1) $\hat{r}(i), \hat{h}(i), \hat{c}(i), \hat{m}(i), \hat{n}(i), \hat{f}(i), \hat{\sigma}_j(i) (j = 1, 2)$ 均大于 0, 其中

$$\hat{f} = \min_{i \in S} f(i), \check{f} = \max_{i \in S} f(i), \langle f(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds.$$

(H2) 脉冲时刻 t_k 满足 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty, k \in \mathbb{N}$.

定义 1^[26] 令 $x(t)$ 是系统 (1) 的解, 且 θ_i 是正常数. 那么

- (i) 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 则称 $x(t)$ 为灭绝;
- (ii) 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle x^{\theta_i}(t) \rangle = 0 (i = 1, 2)$, 则称 $x(t)$ 为均方非持久;
- (iii) 若 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0$, 则称 $x(t)$ 为均方弱持久.

定义 2^[19] 若对所有的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在一对正常数 $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon), \beta_2 = \beta_2(\varepsilon)$, 使得对任意初始值 $x_0 \in (0, \infty)$, 系统 (1) 的解 $x(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| \leq \beta_1\} &\geq 1 - \varepsilon, \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| \geq \beta_2\} &\geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

则系统 (1) 称为随机持久.

由文献 [27] 中定义 2, 给出了脉冲随机微分方程解的定义.

定义 3^[27] 脉冲随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t))dt + G(t, x(t))dB(t), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ x(t_k^+) = x(t_k) + B_k x(t_k), & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2)$$

初始值为 $x(0)$, 如果

- ① $x(t)$ 是 \mathcal{F}_t 适应, 且在 $(0, t_1)$ 和每个间隔 $(t_k, t_{k+1}) \subset \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{N}$ 上是连续的. $f(t, x(t)) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n), G(t, x(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$, 其中, 对所有 $T > 0, \mathcal{L}^k(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ 是所有 \mathbb{R}^n 值可测量的 \mathcal{F} 适应过程, 满足 $\int_0^T |f(t)|^k dt < \infty$.
- ② 对所有的 $t_k, k \in \mathbb{N}, x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t)$ 和 $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ 存在, 且 $x(t_k) = x(t_k^-)$ 概率为 1.
- ③ 对所有的 $t \in [0, t_1], x(t_k)$ 服从积分

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t G(s, x(s))dB(s);$$

对所有 $t \in [t_k, t_{k+1}], x(t_k)$ 服从积分

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_k^+) + \int_{t_k}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds + \int_{t_k}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{x}(s)) dB(s),$$

$\mathbf{x}(t)$ 在每个 $t = t_k, k \in \mathbb{N}$ 处满足脉冲条件, 且概率为 1. 则随机过程 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, t \in \mathbb{R}_+$ 即为系统 (2) 的解.

2 解的全局正性

本节中, 我们将讨论系统 (1) 全局正解的存在性.

定理 1 对任意给定的初值 $((x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2) = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 | x(0) > 0, y(0) > 0\}$, 系统 (1) 在 $t \geq 0$ 时存在唯一正解 $(x(t), y(t))$, 且正解将保持在 \mathbb{R}_+^2 上.

证明 考虑具有 Markov 状态切换无脉冲的捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} dX(t) = X(t) \left\{ r(\xi) - k(\xi) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right]^{\theta_1(\xi)} - c(\xi) \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right\} dt + \sigma_1(\xi) X(t) dB_1(t), \\ dY(t) = Y(t) \left\{ m(\xi) - n(\xi) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right]^{\theta_2(\xi)} + f(\xi) \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right\} dt + \sigma_2(\xi) Y(t) dB_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

初值为 $(x(0), y(0))$. 为了简便, 将 $r(\xi(t)), k(\xi(t))$ 等参数中的 t 省略. 由文献 [28-29] 中定理的证明知, 系统 (3) 在 $t \in [0, \tau_e]$ 上有一个唯一连续最大局部解 $(x(t), y(t))$, 其中 τ_e 是爆破时间. 为了证明解是全局的, 需要说明 $\tau_e = \infty$, 应用文献 [30-31] 中的证明方法, 易得此结论.

令

$$\begin{cases} x(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t), \\ y(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t). \end{cases}$$

下面要证 $(x(t), y(t))$ 是系统 (1) 的解, 且初始值为 $(x(0), y(0))$. 可以看出 $(x(t), y(t))$ 在 $(0, t_1)$ 和每个间隔 $(t_k, t_{k+1}) \subset [0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ 上连续. 对 $t \neq t_k$, 有

$$\begin{aligned} dx(t) &= d \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right] = \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) dX(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \left\{ r(\xi) - k(\xi) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right]^{\theta_1(\xi)} - \right. \\ &\quad \left. c(\xi) \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right\} dt + \sigma_1(\xi) \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) dB_1(t) = x(t) [r(\xi) - k(\xi) x^{\theta_1(\xi)}(t) - c(\xi) y(t)] dt + \sigma_1(\xi) x(t) dB_1(t), \\ dy(t) &= d \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right] = \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) dY(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \left\{ m(\xi) - n(\xi) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right]^{\theta_2(\xi)} + \right. \\ &\quad \left. f(\xi) \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right\} dt + \sigma_2(\xi) \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) dB_2(t) = y(t) [m(\xi) - n(\xi) y^{\theta_2(\xi)}(t) + f(\xi) x(t)] dt + \sigma_2(\xi) y(t) dB_2(t). \end{aligned}$$

对每个 $t_k \in \mathbb{R}_+, k \in [0, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned} x(t_k^+) &= \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \prod_{0 < t_j < t} (1 + g_j) X(t) = \prod_{0 < t_j \leq t_k} (1 + g_j) X(t_k^+) = (1 + g_k) \prod_{0 < t_j < t_k} (1 + g_j) X(t_k) = (1 + g_k) x(t_k), \\ x(t_k^-) &= \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \prod_{0 < t_j < t} (1 + g_j) X(t) = \prod_{0 < t_j < t_k} (1 + g_j) X(t_k^-) = \prod_{0 < t_j < t_k} (1 + g_j) X(t_k) = x(t_k), \end{aligned}$$

即 $x(t_k^+) = x(t_k) + g_k x(t_k)$.

同理 $y(t_k^+) = y(t_k) + h_k y(t_k)$.

下证系统 (1) 解的唯一性.

对每一个 $t \in (0, t_1]$, 系统 (1) 的解满足下列等式:

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)[r(\xi(t)) - k(\xi(t))x^{\theta_1(\xi(t))}(t) - c(\xi(t))y(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))x(t)dB_1(t), & t \in (0, t_1], \\ dy(t) = y(t)[m(\xi(t)) - n(\xi(t))y^{\theta_2(\xi(t))}(t) + f(\xi(t))x(t)]dt + \sigma_2(\xi(t))y(t)dB_2(t), & t \in (0, t_1], \end{cases} \quad (4)$$

由于系统 (4) 的局部 Lipschitz 连续性, 由文献中定理知, 系统 (4) 有唯一解. 对任意 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, 系统 (1) 满足

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)[r(\xi(t)) - k(\xi(t))x^{\theta_1(\xi(t))}(t) - c(\xi(t))y(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))x(t)dB_1(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], \\ dy(t) = y(t)[m(\xi(t)) - n(\xi(t))y^{\theta_2(\xi(t))}(t) + f(\xi(t))x(t)]dt + \sigma_2(\xi(t))y(t)dB_2(t), & t \in (t_k, t_{k+1}]. \end{cases} \quad (5)$$

由于系统 (5) 是局部 Lipschitz 连续的, 则系统 (5) 有唯一解. 因此, 系统 (1) 有唯一解, 换句话说, $(x(t), y(t))$ 是系统 (1) 的唯一解, 且初值为 $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$.

3 灭绝性和持久性

本节中, 我们将讨论系统 (1) 中种群的灭绝性和持久性.

定理 2 定义

$$\begin{aligned} b_1(i) &= r(i) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(i), \quad \bar{b}_1 = \sum_{i=1}^m \pi_i b_1(i), \quad b_2(i) = m(i) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(i), \quad \bar{b}_2 = \sum_{i=1}^m \pi_i b_2(i), \quad i \in S, \\ \bar{g} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k), \quad \bar{h} = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k), \\ p_1 &= \bar{b}_1 + \bar{g}, \quad p_2 = \bar{b}_2 + \bar{h}, \end{aligned}$$

若 $p_1 < 0$ 且 $p_2 < 0$, 则系统 (1) 中种群 $x(t)$ 和种群 $y(t)$ 均灭绝, a.s..

证明 对系统 (3) 使用广义的 Itô 公式, 可得到

$$\begin{aligned} d \ln X(t) &= \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2(X(t))^2} (dX(t))^2 = \left\{ r(\xi(t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\xi(t)) - k(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right]^{\theta_1(\xi)} - \right. \\ &\quad \left. c(\xi(t)) \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right\} dt + \sigma_1(\xi(t)) dB_1(t) = [b_1(\xi(t)) - k(\xi(t))x^{\theta_1(\xi(t))}(t) - c(\xi(t))y(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))dB_1(t), \\ d \ln Y(t) &= \frac{1}{Y(t)} dY(t) - \frac{1}{2(Y(t))^2} (dY(t))^2 = \left[m(\xi(t)) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(\xi(t)) - n(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) Y(t) \right]^{\theta_2(\xi)} + \right. \\ &\quad \left. f(\xi(t)) \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t) \right] dt + \sigma_2(\xi(t)) dB_2(t) = [b_2(\xi(t)) - n(\xi(t))y^{\theta_2(\xi(t))}(t) + f(\xi(t))x(t)]dt + \sigma_2(\xi(t))dB_2(t), \end{aligned}$$

其中

$$x(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) X(t), \quad y(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) y(t).$$

对上面两个等式两端从 0 到 t 积分有

$$\ln X(t) - \ln X(0) = \int_0^t b_1(\xi(s)) ds - \int_0^t k(\xi(s))x^{\theta_1(\xi(s))}(s) ds - \int_0^t c(\xi(s))y(s) ds + M_1(t),$$

$$\ln Y(t) - \ln Y(0) = \int_0^t b_2(\xi(s)) ds - \int_0^t n(\xi(s))y^{\theta_2(\xi(s))}(s) ds + \int_0^t f(\xi(s))x(s) ds + M_2(t),$$

其中 $M_i(t) = \int_0^t \sigma_i(s) dB_i(s)$, $i = 1, 2$. $M_i(t)$ 的二次变分为

$$\langle M_i(t), M_i(t) \rangle = \int_0^t \sigma_i^2(\xi(s)) ds \leq \hat{\sigma}_i^2 t.$$

利用 Martingale 的强大数定律, 易得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0, \quad \text{a.s.} \quad (6)$$

明显地, 由上述分析及 $x(0) = X(0), y(0) = Y(0)$ 易得

$$\ln x(t) - \ln x(0) = \sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \int_0^t b_1(\xi(s)) ds - \int_0^t k(\xi(s)) x^{\theta_1(\xi(s))}(s) ds - \int_0^t c(\xi(s)) y(s) ds + M_1(t), \quad (7)$$

$$\ln y(t) - \ln y(0) = \sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \int_0^t b_2(\xi(s)) ds - \int_0^t n(\xi(s)) y^{\theta_2(\xi(s))}(s) ds + \int_0^t f(\xi(s)) x(s) ds + M_2(t) \quad (8)$$

成立. 由式 (7) 有

$$t^{-1} [\ln x(t) - \ln x(0)] \leq t^{-1} \left(\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \int_0^t b_1(\xi(s)) ds \right) + \frac{M_1(t)}{t}.$$

由 Markov 链 $\xi(t)$ 的遍历性

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_j(\xi(s)) ds = \sum_{i=1}^m \pi_i b_j(i), \quad j = 1, 2$$

和式 (6) 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \int_0^t b_1(\xi(s)) ds \right] = p_1 < 0.$$

从而有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, a.s., 故种群 $x(t)$ 灭绝, a.s..

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个充分大的 T , 使得当 $t > T$ 时, 有

$$x(t) < \frac{\varepsilon}{2\hat{f}}, \quad \frac{M_2(t)}{t} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

则式 (8) 可改写为

$$t^{-1} (\ln y(t) - \ln y(0)) \leq t^{-1} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \int_0^t b_2(\xi(s)) ds \right] + \varepsilon.$$

由 Markov 链 $\xi(t)$ 的遍历性和 ε 的任意性, 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \int_0^t b_2(\xi(s)) ds \right] = p_2 < 0,$$

即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, a.s.. 故种群 $y(t)$ 也灭绝, a.s., 所以定理结论成立.

定理 3 系统 (1) 下述结论成立:

① 若 $p_1 \geq 0$, 则有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x^{\theta_1(\xi(s))}(s) ds \leq \frac{p_1}{\hat{k}}, \quad \text{a.s.}$$

特别地, 若 $p_1 = 0$, 则食饵种群 $x(t)$ 是均方非持久生存, a.s..

② 若 $p_2 \geq 0$, 则有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t y^{\theta_2(\xi(s))}(s) ds \leq \frac{p_2}{\hat{f}}, \quad \text{a.s.}$$

特别地, 若 $p_2 = 0$, 则捕食者种群 $y(t)$ 是均方非持久生存, a.s..

证明 ① 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$ 使得

$$\frac{\ln x(0)}{t} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{t} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \int_0^t b_1(\xi(s)) ds \right] \leq p_1 + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{M_1(t)}{t} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

将上述不等式代入式 (7), 可得

$$\ln x(t) \leq (p_1 + \varepsilon)t - \hat{k} \int_0^t x^{\hat{\theta}_1}(s) ds.$$

利用文献 [21] 中引理 3.1 和 ε 的任意性, 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x^{\theta_1(\xi(s))}(s) ds \leq \frac{p_1}{k}, \quad \text{a.s.}$$

因此当 $p_1 = 0$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle x^{\theta_1}(s) \rangle = 0,$$

即食饵种群 $x(t)$ 是均方非持久生存的, a.s..

② 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个充分大的 $T_1 > T$, 使得当 $t > T_1$ 时, 有

$$\frac{\ln y(0)}{t} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{1}{t} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \int_0^t b_2(\xi(s)) ds \right] \leq p_2 + \frac{\varepsilon}{4}, \quad x(t) < \frac{\varepsilon}{4\hat{f}}, \quad \frac{M_2(t)}{t} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

将上述不等式代入式 (8), 易得

$$\ln y(t) \leq (p_2 + \varepsilon)t - \hat{n} \int_0^t y^{\hat{\theta}_2}(s) ds.$$

利用文献 [21] 中引理 3.1 和 ε 的任意性, 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t y^{\hat{\theta}_2}(s) ds \leq \frac{p_2}{\hat{n}}, \quad \text{a.s.}$$

因此当 $p_2 = 0$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle y^{\hat{\theta}_2}(s) \rangle = 0,$$

即捕食者种群 $y(t)$ 是均方非持久生存的, a.s..

定理 4 若 $p_1 > 0, p_2 > 0$, 则食饵种群 $x(t)$ 和捕食者种群 $y(t)$ 都将均方弱持久生存, a.s..

证明 为了证明此结论, 我们需要证明 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) > 0, \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) > 0$. 假设结论不成立, 则 $P(U) > 0$, 其中

$$U = \left\{ \omega : \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t, \omega) = 0, \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t, \omega) = 0 \right\}.$$

由式 (7) 知

$$\begin{aligned} \frac{\ln x(t)}{t} &= \frac{\ln x(0)}{t} + \frac{1}{t} \sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \frac{1}{t} \int_0^t b_1(\xi(s)) ds - \\ &\quad \frac{1}{t} \int_0^t k(\xi(s)) x^{\theta_1(\xi(s))}(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t c(\xi(s)) y(s) ds + \frac{M_1(t)}{t}. \end{aligned} \tag{9}$$

若对所有 $\omega \in U, \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t, \omega) = 0, \limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t, \omega) = 0$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t, \omega)}{t} \leq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t k(\xi(s)) x^{\theta_1(\xi(s))}(s) ds = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t c(\xi(s)) y(s) ds = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0.$$

将上述结果代入式 (9), 有

$$0 \geq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t, \omega)}{t} = p_1 > 0, \quad \text{a.s.}$$

与假设矛盾.

同理, 可以证明 $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) > 0$. 即 $p_1 > 0, p_2 > 0$, 食饵种群 $x(t)$ 和捕食者种群 $y(t)$ 都将均方弱持久生存, a.s..

注 1 定理 2~4 有一个清晰而有趣的生物学解释. 观察到食饵种群 $x(t)$ 和捕食者种群 $y(t)$ 的灭绝和持久生存仅依赖于表达式:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{\xi=1}^m \pi_i \left(r(i) - \frac{1}{2} \sigma_1^2(i) \right) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k)}{t}, \\ p_2 &= \sum_{\xi=1}^m \pi_i \left(m(i) - \frac{1}{2} \sigma_2^2(i) \right) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k)}{t}. \end{aligned}$$

若 $p_1 > 0, p_2 > 0$, 种群 $x(t), y(t)$ 是弱持久生存的. 若 $p_1 < 0, p_2 < 0$, 种群 $x(t), y(t)$ 开始灭绝. 这也暗示了系统 (1) 中捕食者和食饵的长期行为与脉冲条件和白噪声强度及 Markov 切换的平稳分布有密切的关系.

注 2 通过 p_1, p_2 看出, 白噪声主要影响食饵和捕食者种群的内禀增长率, 从而影响两种群的灭绝和持久生存.

引理 1^[32] 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在一个正数 $M = M(\varepsilon)$, 使得对任意初值 $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$, 系统 (1) 的解 $(x(t), y(t))$ 对所有 $t \geq 0$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{x(t) > M(\varepsilon)\} < \varepsilon, \limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{y(t) > M(\varepsilon)\} < \varepsilon. \tag{10}$$

定理 5 定义

$$p_{11}(t) = \frac{1}{t} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \int_0^t b_1(\xi(s)) ds \right],$$

$$p_{22}(t) = \frac{1}{t} \left[\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \int_0^t b_2(\xi(s)) ds \right],$$

若 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (p_{11}(t) - \langle \check{\zeta} H \rangle - 2\check{\kappa}\beta_1^{\theta_1}) > 0, \hat{\theta}_2 > 1/2$, 且 $\liminf_{t \rightarrow \infty} p_{22}(t) > 0$, 则系统 (1) 随机持久. 其中 H 的定义将在式 (16) 中给出.

证明 由定理 1 知, 系统 (1) 有唯一全局正解 $(x(t), y(t))$, 由系统 (1) 第一个等式可知

$$dx(t) \leq x(t)[r(\xi(t)) - k(\xi(t))x^{\theta_1(\xi(t))}(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))x(t)dB_1(t).$$

考虑如下随机方程:

$$\begin{cases} d\phi(t) = \phi(t)[r(\xi(t)) - k(\xi(t))\phi^{\theta_1(\xi(t))}(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))\phi(t)dB_1(t), \\ \phi(t_k^+) = \phi(t_k) + g_k\phi(t_k), \\ \phi(0) = x(0). \end{cases} \tag{11}$$

由定理 1 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个正数 $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$, 使得 $\phi(t) \leq \beta_1$. 由比较定理可知, $x(t) \leq \phi(t) \leq \beta_1$.

由系统 (1) 的第二个等式可知

$$dy(t) \geq y(t)[m(\xi(t)) - n(\xi(t))y^{\theta_2(\xi(t))}(t)]dt + \sigma_2(\xi(t))y(t)dB_2(t).$$

考虑如下随机方程:

$$\begin{cases} d\psi(t) = \psi(t)[m(\xi(t)) - n(\xi(t))\psi^{\theta_2(\xi(t))}(t)]dt + \sigma_2(\xi(t))\psi(t)dB_2(t), \\ \psi(t_k^+) = \psi(t_k) + h_k\psi(t_k), \\ \psi(0) = y(0). \end{cases} \tag{12}$$

同理可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个正数 $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$, 使得 $\psi(t) \geq \beta_2$. 由比较定理可知, $y(t) \geq \psi(t) \geq \beta_2$.

由引理 1 知, 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{x(t) \leq M(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon, \limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{y(t) \leq M(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon. \tag{13}$$

令 $\Omega_t^\varepsilon = \{\omega \in \Omega | x(t, \omega) \leq M(\varepsilon), y(t, \omega) \leq M(\varepsilon)\}, \Omega_\infty^\varepsilon = \{\omega \in \Omega | \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{\Omega_t^\varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon\}$. 由式 (13) 知, $P\{\Omega_\infty^\varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon$. 对任意 $\varepsilon_0 \in (0, 1 - \varepsilon)$, 存在一个正数 $k_0 > 0$, 当 $t \geq t_{k_0}$ 时, $P\{\Omega_t^\varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon - \varepsilon_0$. 对任意 $\omega \in \Omega_t^\varepsilon$, 当 $t \geq t_{k_0}$ 时, 有

$$0 \leq x(t) \leq M(\varepsilon), 0 \leq y(t) \leq M(\varepsilon). \tag{14}$$

接下来, 我们选择 $\alpha_1(\varepsilon) \in (0, \varepsilon), \alpha_2(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$. 令 $D^\varepsilon \subset \mathbb{R}_+^2$ 表示 $x = \alpha_1(\varepsilon), y = \alpha_2(\varepsilon), x = M(\varepsilon), y = M(\varepsilon)$ 所围成的区域. 要证 $\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{(x(t), y(t)) \in D^\varepsilon\} \geq 1 - \varepsilon$.

由 $x(t) \leq \beta_1$ 知

$$dy(t) \leq y(t)[m(\xi(t)) - n(\xi(t))y^{\theta_2(\xi(t))}(t) + \check{f}\beta_1]dt + \sigma_2(\xi(t))y(t)dB_2(t).$$

考虑如下没有脉冲的随机方程:

$$\begin{cases} dy_1(t) = y_1(t) \left[m(\xi(t)) - n(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) y_1 \right]^{\theta_2(\xi(t))} (t) + \check{f}\beta_1 \right] dt + \sigma_2(\xi(t))y_1(t)dB_2(t), \\ y_1(0) = y_{10}. \end{cases}$$

定义 $V(y_1) = y_1^{\frac{1}{2}}$, 其中 $y \in \mathbb{R}_+$. 应用推广的 Itô 公式可以得到

$$\begin{aligned} dV(y_1(t)) &= \frac{1}{2}y_1^{-\frac{1}{2}}dy_1 + \frac{1}{8}y_1^{-\frac{3}{2}}(dy_1)^2 = \frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}} \left\{ m(\xi) + \check{f}\beta_1 - n(\xi) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) y_1 \right]^{\theta_2(\xi(t))} (t) \right\} dt + \\ &\frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}\sigma_2(t)dB_2(t) + \frac{1}{8}y_1^{-\frac{3}{2}}(\sigma_2(t))^2y_1^2dt = \\ &\frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}} \left\{ m(\xi) + \check{f}\beta_1 - n(\xi) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) y_1 \right]^{\theta_2(\xi(t))} (t) + \frac{1}{4}y_1^{-\frac{3}{2}}(\sigma_2(t))^2y_1^2 \right\} dt + \\ &\left(y_1^{\frac{1}{2}} - V(y_1) \right) dt + \frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}\sigma_2(t)dB_2(t) \leq (G_1 - V(y_1))dt + \frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}\sigma_2(t)dB_2(t), \end{aligned}$$

此处 G_1 为一常数, 用到条件 $\hat{\theta}_2 > 1/2$. 再次使用 Itô 公式, 可以得到

$$\begin{aligned} dV(e^t V(y_1(t))) &= e^t V(y_1(t)) + e^t dV(y_1(t), \xi(t)) \leq \\ &e^t y_1^{\frac{1}{2}} dt + e^t (G_1 - V(y_1)) dt + \frac{1}{2} e^t y_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2(t) dB_2(t) = e^t G_1 dt + \frac{1}{2} e^t y_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2(t) dB_2(t). \end{aligned} \tag{15}$$

令 $k_0 > 0$ 足够大, 且 $y_{10} \in \left[\frac{1}{k_0}, k_0 \right]$, 对每个正数 $k > k_0$, 定义停时 $\tau_k = \inf \left\{ t \geq 0 : y_1(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right) \right\}$. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\tau_k \rightarrow \infty$. 对式 (15) 两端同时取期望, 有

$$E(e^{t \wedge \tau_k} V(y_1(t \wedge \tau_k))) \leq V(y_1(0)) + G_1 \int_0^{t \wedge \tau_k} e^s ds.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 则

$$e^t E(V(y_1(t))) \leq V(y_1(0)) + G_1(e^t - 1),$$

即

$$E(V(y_1(t))) \leq e^{-t} V(y_1(0)) + G_1,$$

从而

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} E|y_1|^{\frac{1}{2}} \leq G_1.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 令

$$H = \frac{G_1^2}{\varepsilon^2}. \tag{16}$$

由 Chebyshev 不等式可得

$$P\{|y_1(t)| > H\} \leq \frac{E(|y_1|^{\frac{1}{2}})}{H^{\frac{1}{2}}},$$

于是

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{|y_1(t)| > H\} \leq \frac{H_1}{H^{\frac{1}{2}}} = \varepsilon,$$

换句话说

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{|y_1(t)| \leq H\} \geq 1 - \varepsilon.$$

由比较定理可知

$$y(t) \leq y_1(t) \leq H,$$

即

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{\beta_2 \leq y(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon.$$

下证 $x(t)$ 的下界. 由 $y(t) \leq H$ 知

$$dx(t) \geq x(t)[r(\xi(t)) - \check{c}H - k(\xi(t))y^{\theta_1(\xi(t))}(t)]dt + \sigma_1(\xi(t))x(t)dB_1(t).$$

考虑如下没有脉冲的随机方程:

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_1(t) \left[r(\xi(t)) - \check{c}H - k(\xi(t)) \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k)^{\theta_1(\xi(t))} x_1^{\theta_1(\xi(t))}(t) \right] dt + \sigma_1(\xi(t)) x_1(t) dB_1(t), \\ x_1(0) = x(0). \end{cases}$$

存在一个正数 $E(\varepsilon) > 0$, 对所有 $\omega \in \Omega_\infty^\varepsilon$, 有 $x_1(t, \omega) > E(\varepsilon)$.

假设结论不成立, 由定理 2 知

$$\frac{1}{t} [\ln x_1(t) - \ln x_1(0)] = p_1(t) - \langle \check{c}H \rangle - \langle k(\xi(t)) x_1^{\theta_1(\xi(t))}(t) \rangle + \frac{M_1(t)}{t}.$$

由 Martingale 的强大数定律, 可以得到如下不等式:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x_1(t)}{t} \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} (p_{11}(t) - \langle \check{c}H \rangle - 2\check{k}\beta_1^{\check{\theta}_1}) > 0.$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow \infty$ 与式 (14) 矛盾. 再由比较定理知

$$E(\varepsilon) \leq x_1(t) \leq x(t),$$

即

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{E(\varepsilon) \leq x(t) \leq \beta_1\} \geq 1 - \varepsilon.$$

综上所述, 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{(x(t), y(t))\} = P(\Omega_\infty^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

4 解的渐近性态

本节将研究系统 (1) 解的渐近性态.

定理 6 若 $\hat{\theta}_1 \geq 1$, $\hat{k} > \check{f}$, 且存在两对正数 l 和 L 以及 d 和 D 使得

$$l \leq \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) \leq L, d \leq \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) \leq D, \quad (17)$$

则对于给定初始值 $(x(0) > 0, y(0) > 0)$, 系统 (1) 的解 $(x(t), y(t))$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t) + \ln y(t)}{t} \leq \sum_{i=1}^m \pi_i(r(i) + m(i)), \quad \text{a.s.}$$

证明 由系统 (3) 对 $\ln X(t) + \ln Y(t)$ 使用 Itô 公式有

$$\begin{aligned} d(\ln X(t) + \ln Y(t)) = & \left\{ b_1(\xi(t)) + b_2(\xi(t)) - k(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_s < t} (1 + g_k) X(t) \right]^{\theta_1(\xi(t))} + \right. \\ & f(\xi(t)) \prod_{0 < t_s < t} (1 + g_k) X(t) - c(\xi(t)) \prod_{0 < t_s < t} (1 + h_k) Y(t) - \\ & \left. n(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_s < t} (1 + h_k) Y(t) \right]^{\theta_2(\xi(t))} \right\} dt + \sigma_1(\xi(t)) dB_1(t) + \sigma_2(\xi(t)) dB_2(t). \end{aligned}$$

从 0 到 t 对上式积分, 且由 $\hat{\theta}_1 \geq 1$ 和 $\hat{k} > \check{f}$ 有

$$\ln X(t) + \ln Y(t) \leq \ln X(0) + \ln Y(0) + \int_0^t [b_1(\xi(s)) + b_2(\xi(s))] ds + N(t),$$

其中 $N(t) = \int_0^t \sigma_1(\xi(s)) dB_1(s) + \int_0^t \sigma_2(\xi(s)) dB_2(s)$, 且 $N(t)$ 的二次变分为

$$\langle N(t), N(t) \rangle = \int_0^t \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2(\xi(s)) ds.$$

根据指数 Martingale 不等式^[29], 对任意的整数 T , α 和 β 得到

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} [N(t) - \frac{\alpha}{2} \langle N(t), N(t) \rangle] > \beta\right\} \leq e^{-\alpha\beta}.$$

选取 $T = n, \alpha = 1$ 和 $\beta = 2 \ln n$, 从而有

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left[N(t) - \frac{1}{2} \langle N(t), N(t) \rangle\right] > 2 \ln n\right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

由 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, 利用 Borel-Cantelli 引理^[29], 对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 存在一个随机整数 $n_0 = n_0(\omega)$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left[N(t) - \frac{1}{2} \langle N(t), N(t) \rangle\right] \leq 2 \ln n.$$

则当 $0 \leq t \leq n, n \geq n_0$ 时, 有 $N(t) \leq 2 \ln n + \frac{1}{n^2} \langle N(t), N(t) \rangle$, 所以得到

$$\ln X(t) + \ln Y(t) \leq \ln X(0) + \ln Y(0) + \int_0^t [r(\xi(s)) + m(\xi(s))] ds + 2 \ln n. \tag{18}$$

对 $n-1 \leq t \leq n$, 式 (18) 两端除以 t 有

$$\frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{t} \leq t^{-1} [\ln X(0) + \ln Y(0)] + \frac{1}{t} \int_0^t [r(\xi(s)) + m(\xi(s))] ds + \frac{2 \ln n}{n-1}.$$

则有

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{t} &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} [\ln X(0) + \ln Y(0)] + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n}{n-1} + \\ &\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t [r(\xi(s)) + m(\xi(s))] ds \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t [r(\xi(s)) + m(\xi(s))] ds = \\ &\sum_{i=1}^m \pi_i(r(i) + m(i)), \quad \text{a.s..} \end{aligned}$$

根据条件 (17) 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k)}{t} = 0.$$

即可以得到

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t) + \ln y(t)}{t} &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \ln X(t)}{t} + \\ &\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \ln Y(t)}{t} = \\ &\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{t} \leq \sum_{i=1}^m \pi_i(r(i) + m(i)), \quad \text{a.s..} \end{aligned}$$

定理 7 若存在两对正数 l 和 L 以及 d 和 D 使得

$$l \leq \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k) \leq L, \quad d \leq \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k) \leq D,$$

则系统 (1) 的解 $(x(t), y(t))$ 满足

$$\limsup_{0 \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t) + \ln y(t)}{\ln t} \leq 2, \quad \text{a.s..}$$

证明 由系统 (3) 对 $e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t))$ 使用 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned}
 d[e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t))] &= \alpha e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t))dt + e^{\alpha t}d(\ln X(t) + \ln Y(t)) = \\
 &\alpha e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t))dt + e^{\alpha t} \left\{ b_1(\xi(t)) + b_2(\xi(t)) - c(\xi(t)) \prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k)Y(t) - \right. \\
 &k(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k)X(t) \right]^{\theta_1(\xi(t))} - n(\xi(t)) \left[\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k)Y(t) \right]^{\theta_2(\xi(t))} \left. \right\} dt + \\
 &f(\xi(t)) \prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k)X(t) + e^{\alpha t} \sigma_1(\xi(t))dB_1(t) + e^{\alpha t} \sigma_2(\xi(t))dB_2(t).
 \end{aligned}$$

从 0 到 t 对上式进行积分, 可以得到

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t)) &= (\ln X(0) + \ln Y(0)) + \int_0^t \alpha e^{\alpha s}(\ln X(s) + \ln Y(s))ds + \\
 &\int_0^t e^{\alpha s} \left\{ b_1(\xi(s)) - c(\xi(s)) \prod_{0 < t_s < t} (1 + h_k)Y(s) + \right. \\
 &b_2(\xi(s)) - k(\xi(s)) \left[\prod_{0 < t_s < t} (1 + g_k)X(s) \right]^{\theta_1(\xi(s))} - \\
 &\left. n(\xi(s)) \left[\prod_{0 < t_s < t} (1 + h_k)Y(s) \right]^{\theta_2(\xi(s))} \right\} dt + f(\xi(s)) \prod_{0 < t_s < t} (1 + g_k)X(s) + H(t),
 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t)) &\leq \ln X(0) + \ln Y(0) + \int_0^t \alpha e^{\alpha s} \{ \ln X(s) + \ln Y(s) + \check{b}_1 + \check{b}_2 - \\
 &\hat{k}l^{\hat{\theta}_1} X^{\hat{\theta}_1}(s) + \check{f}LX(s) - \hat{n}d^{\hat{\theta}_2} Y^{\hat{\theta}_2}(s) - \hat{c}dY(s) \} ds + H(t),
 \end{aligned}$$

其中 $H(t) = \int_0^t e^{\alpha s} \sigma_1(\xi(s))dB_1(s) + \int_0^t e^{\alpha s} \sigma_2(\xi(s))dB_2(s)$, $H(t)$ 的二次变分为

$$\langle H(t), H(t) \rangle = \int_0^t e^{2\alpha s} [\sigma_1^2(\xi(s)) + \sigma_2^2(\xi(s))] ds.$$

根据指数 Martingale 不等式^[29], 对每一个整数 $n \geq 1$ 有

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \mu a} \left[H(t) - \frac{1}{2e^{\alpha n}} \langle H(t), H(t) \rangle \right] > 2e^{\alpha n} \ln n \right\} \leq \frac{1}{n^2}.$$

由 $\sum_{i=1}^m \frac{1}{n^2} < \infty$, 利用 Borel-Cantelli 引理^[29], 对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 存在一个随机整数 $n_0 = n_0(\omega)$, 当 $n \geq n_0(\omega)$ 时, 有

$$H(t) \leq \frac{1}{2e^{\alpha n}} \langle H(t), H(t) \rangle + 2e^{\alpha n} \ln n, \quad 0 \leq t \leq n.$$

即当 $n \geq n_0(\omega), 0 \leq t \leq n$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t)) &\leq \ln X(0) + \ln Y(0) + \int_0^t e^{\alpha s} \{ \alpha(\ln X(s) + \ln Y(s)) + \check{r} + \check{m} - \\
 &\hat{k}l^{\hat{\theta}_1} X^{\hat{\theta}_1}(s) + \check{f}LX(s) - \hat{n}d^{\hat{\theta}_2} Y^{\hat{\theta}_2}(s) - \hat{c}dY(s) \} ds + 2e^{\alpha n} \ln n,
 \end{aligned}$$

对所有的 $0 \leq s \leq n$ 成立. 系统 (3) 的解 $(X(t), Y(t))$, 存在一个正常数 C 使得

$$\alpha \ln X(s) + \alpha \ln Y(s) + \check{r} + \check{m} - \hat{k}l^{\hat{\theta}_1} X^{\hat{\theta}_1}(s) + \check{f}LX(s) - \hat{n}d^{\hat{\theta}_2} Y^{\hat{\theta}_2}(s) - \hat{c}dY(s) \leq C.$$

换句话说, 对任意的 $0 \leq s \leq n$ 和 $n > n_0(\omega)$,

$$e^{\alpha t}(\ln X(t) + \ln Y(t)) \leq \ln X(0) + \ln Y(0) + C(e^{\alpha t} - 1) + 2e^{\alpha n} \ln n.$$

因此, 当 $n - 1 \leq t \leq n$ 及 $n \geq n_0(\omega)$ 时, 有

$$\frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{\ln t} \leq e^{-\alpha t} \frac{\ln X(0) + \ln Y(0)}{\ln t} + \frac{C(1 - e^{-\alpha t})}{\ln t} + \frac{2e^{\alpha n} \ln n}{\ln t}.$$

即有

$$\frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{\ln t} \leq 2e^{\alpha n}, \quad \text{a.s.}$$

令 $\alpha \rightarrow 0$ 可以得到

$$\frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{\ln t} \leq 2, \quad \text{a.s.} \tag{19}$$

根据条件 (17) 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{0 < t_k < t} (1 + g_k)}{\ln t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{0 < t_k < t} (1 + h_k)}{\ln t} = 0. \tag{20}$$

由式 (19) 和 (20) 有

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t) + \ln y(t)}{\ln t} &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + g_k) + \ln X(t)}{\ln t} + \\ &\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{0 < t_k < t} \ln(1 + h_k) + \ln Y(t)}{\ln t} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln X(t) + \ln Y(t)}{\ln t} \leq 2, \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

注 3 通过对系统 (1) 解的渐近性态的讨论, 可以发现: 当脉冲扰动有界时, 脉冲对种群的灭绝和持久生存没有影响; 然而当脉冲扰动无界时, 种群的灭绝和持久生存均会受到影响.

5 数值模拟

下面, 我们将通过几个例子数值分析白噪声和 Markov 状态切换及脉冲扰动对物种生存的影响. 简便起见, 假设 Markov 链的状态空间为 $S = \{1, 2\}$.

例 1 对系统 (1) 可以选取如下参数:

$$\begin{cases} r(i) = 0.36, m(i) = 0.31, k(i) = c(i) = n(i) = f(i) = 0.11, \\ \theta_1(i) = \theta_2(i) = 1, g_k(i) = h_k(i) = e^{-0.1} - 1, t_k = 100k, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

此时容易验证其满足假设, 并且初值条件为 $(x(0), y(0)) = (0.2, 0.2)$.

① 对系统 (1) 的子系统 $\xi(t) = 1$ 选取参数 $\sigma_1(1) = 2, \sigma_2(1) = 1.5$, 通过简单的代数计算可知: 子系统 1 中食饵种群 x 和捕食种群 y 均以概率 1 灭绝, 见图 1(a), 即子系统 1 为灭绝状态.

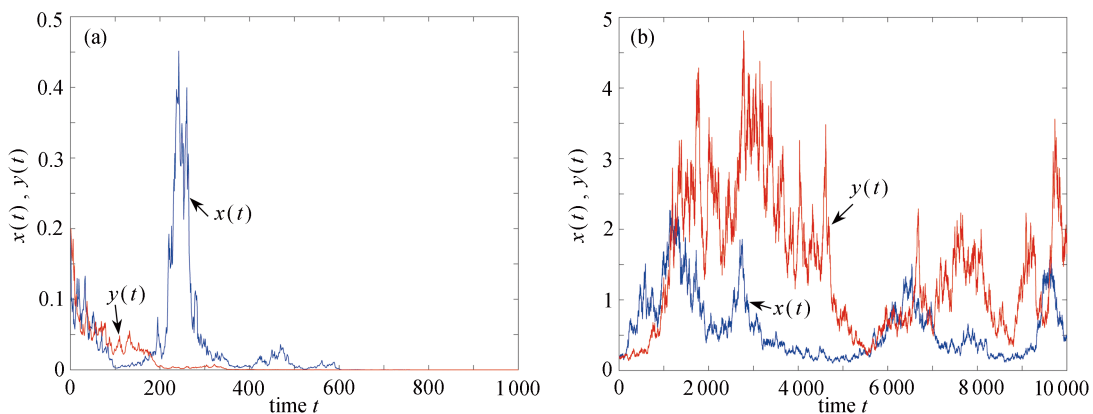


图 1 不考虑切换, 例 1 参数下, 两个子系统解的轨迹: (a) 子系统 1, $\xi(t)=1$; (b) 子系统 2, $\xi(t)=2$

Fig. 1 The trajectories of the solutions to the 2 subsystems of example 1 without switching: (a) subsystem 1, $\xi(t)=1$; (b) subsystem 2, $\xi(t)=2$

② 对系统 (1) 的子系统 $\xi(t) = 2$ 选取参数 $\sigma_1(2) = \sigma_2(2) = \sqrt{0.12}$, 通过简单的代数计算可知: 子系统 2 中食饵种群 x 和捕食种群 y 均随机持久, 见图 1(b), 即子系统 2 是随机持久生存状态.

③ 假设 Markov 链的生成元矩阵 $Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$, 通过计算得其唯一的平稳分布为 $\pi = (0.7, 0.3)$, 捕食-食饵系统 (1) 可以在子系统 1 和 2 之间随机切换. 通过简单的计算可得 $p_1 < 0, p_2 < 0$, 由定理 2 知食饵种群 x 和捕食

种群y均以概率1灭绝,见图2(a).

④ 假设 Markov 链的生成元矩阵 $Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 通过计算得其唯一的平稳分布为 $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 捕食-食饵系统 (1) 可以在子系统 1 和 2 之间随机切换. 通过简单的计算可得 $p_1 < 0, p_2 < 0$, 由定理 2 知食饵种群 x 和捕食种群 y 均以概率 1 灭绝, 见图 2(b).

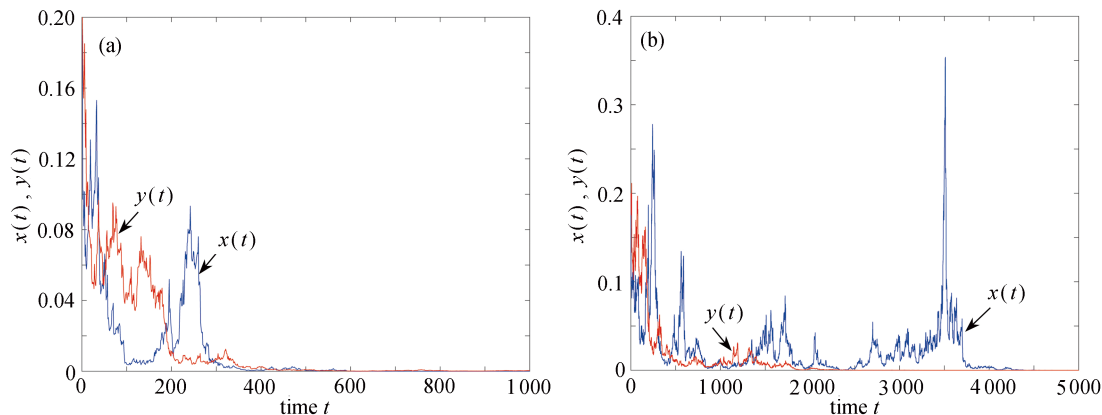


图 2 考虑切换, 例 1 参数下, 系统 Markov 链平稳分布时解的轨迹: (a) $\pi=(0.7, 0.3)$; (b) $\pi=(1/3, 2/3)$

Fig. 2 The trajectories of solutions in stationary distribution of system the Markov chain for example 1 with switching: (a) $\pi=(0.7, 0.3)$; (b) $\pi=(1/3, 2/3)$

显然, 例 1 的随机切换系统 (3) 和 (4) 中食饵种群 x 和捕食种群 y 均以概率 1 灭绝, 但是 Markov 状态切换可以延长种群灭绝的时间. 如果切换系统中的种群在灭绝子系统 1 待的时间更长, 则食饵种群 x 和捕食种群 y 将会灭绝得更快. 即 Markov 状态切换能在一定时间内抑制物种的灭绝.

例 2 对系统 (1) 可以选取如下参数:

$$\begin{cases} r(i) = 0.36, m(i) = 0.31, k(i) = c(i) = n(i) = f(i) = 0.11, \\ \theta_1(i) = \theta_2(i) = 1, g_k(i) = h_k(i) = e^{-0.1} - 1, t_k = 100k, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

此时容易验证其满足假设, 并且初值条件为 $(x(0), y(0)) = (0.2, 0.2)$.

① 对系统 (1) 的子系统 $\xi(t)=1$ 选取参数 $\sigma_1(1) = \sqrt{0.12}, \sigma_2(1) = \sqrt{0.82}$, 通过简单的代数计算可知, 子系统 1 中食饵种群 x 灭绝, 捕食种群 y 随机持久, 见图 3(a).

② 对系统 (1) 的子系统 $\xi(t)=2$ 选取参数 $\sigma_1(2) = \sqrt{0.82}, \sigma_2(2) = \sqrt{0.12}$, 通过简单的代数计算可知, 子系统 2 中食饵种群 x 随机持久, 捕食种群 y 灭绝, 见图 3(b).

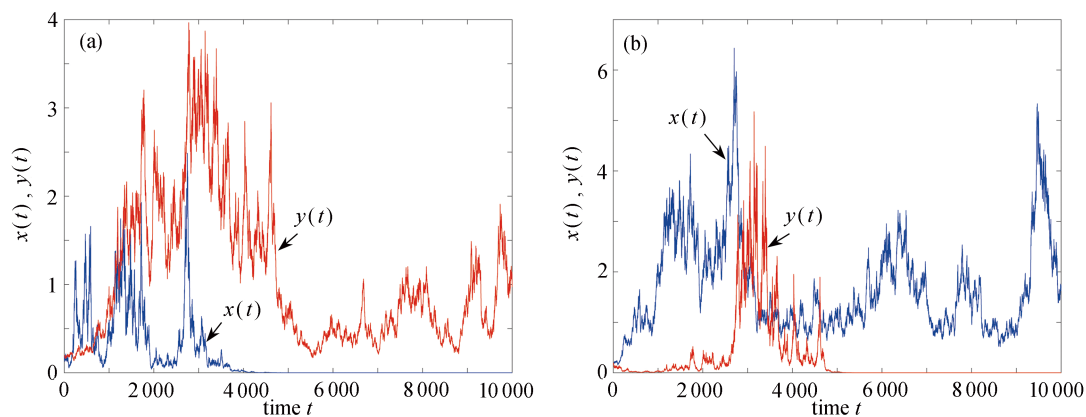


图 3 不考虑切换, 例 2 参数下, 两个子系统解的轨迹: (a) 子系统 1, $\xi(t)=1, (\sigma(1), \sigma(2))=(\sqrt{0.12}, \sqrt{0.82})$;

(b) 子系统 2, $\xi(t)=2, (\sigma(1), \sigma(2))=(\sqrt{0.82}, \sqrt{0.12})$

Fig. 3 The trajectories of solutions to the 2 subsystems of example 2 without switching: (a) subsystem 1, $\xi(t)=1, (\sigma(1), \sigma(2))=(\sqrt{0.12}, \sqrt{0.82})$;

(b) subsystem 2, $\xi(t)=2, (\sigma(1), \sigma(2))=(\sqrt{0.82}, \sqrt{0.12})$

明显地, 白噪声对种群生存具有很大影响. 保持食饵种群和捕食者种群的内部增长率 r 和 m 不变, 同时减小噪声强度 σ_1 和 σ_2 , 导致种群由灭绝变为随机持久, 见图 1(a) 和图 1(b). 当噪声强度 σ_1 不变时, 减小噪声强度 σ_2 ,

则捕食者种群 y 由灭绝变为随机持久,见图 1(a)和图 3(a).同理,当噪声强度 σ_2 不变时,减小噪声强度 σ_1 ,则食饵种群 x 由灭绝变为随机持久见图 1(b)和图 3(b).说明较大的白噪声强度可以导致种群灭绝,并且不利于种群的生存.

6 结 论

本文研究了具有 Gilpin-Ayala 增长的随机捕食-食饵模型的动力学行为.首先证明了全局正解的存在性和唯一性,得到了灭绝性和持久性的充分条件.在此基础上,给出了控制捕食-食饵系统随机持久和灭亡的阈值,并且讨论系统解的渐近性态,最后用数值模拟验证了相关结论的有效性.

本文的结论具有明显的生物意义.我们从种群灭绝和均方非持久及随机持久的充分条件看到了脉冲效应和白噪声及 Markov 状态切换对捕食-食饵系统的持久生存均有影响.

参考文献(References):

- [1] BERRYMAN A A. The origins and evolution of predator-prey theory[J]. *Ecology*, 1992, **73**(5): 1530-1535.
- [2] APPLETON D. Modelling biological populations in space and time[J]. *Journal of the Royal Statistical Society (Series C): Applied Statistics*, 1993, **42**(2): 411-412.
- [3] 焦建军, 陈兰荪, 尼托 J J, 等. 连续收获捕食者与脉冲存放食饵的阶段结构捕食-食饵模型的全局吸引和一致持久[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(5): 589-600. (JIAO Jianjun, CHEN Lansun, NIETO J J, et al. Permanence and global attractivity of a stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(5): 589-600. (in Chinese))
- [4] 柳文清, 陈清婉. 捕食者食饵均染病的入侵反应扩散捕食系统中扩散的作用[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(3): 321-331. (LIU Wenqing, CHEN Qingwan. Influence of diffusion on an invasion diffusion prey-predator model with disease infection in both populations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(3): 321-331. (in Chinese))
- [5] 刘荣, 刘桂荣. 周期环境中捕食者具有尺度结构的三物种捕食-食饵系统的最优收获[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(5): 510-521. (LIU Rong, LIU Guirong. Optimal harvesting in a periodic 3-species predator-prey model with size structure in predators[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(5): 510-521. (in Chinese))
- [6] WEI L, CHAO F, BOSCHAN C. Hopf bifurcation for a predator-prey biological economic system with Holling type II functional response[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, **348**(6): 1114-1127.
- [7] PERC M, SZOLNOKI A, SZABO G. Cyclical interactions with alliance-specific heterogeneous invasion rates[J]. *Physical Review E*, 2007, **75**(5): 052102.
- [8] PERC M, GRIGOLINI P. Collective behavior and evolutionary games: an introduction[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2013, **56**: 1-5.
- [9] HOLLING C S. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation[J]. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 1965, **97**(45): 1-60.
- [10] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993. (CHEN Lansun, CHEN Jian. *Nonlinear Biological Dynamic System*[M]. Beijing: Science Press, 1993. (in Chinese))
- [11] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 2003. (CHEN Lansun, SONG Xinyu, LU Zhengyi. *Mathematical Models and Methods in Ecology*[M]. Chengdu: Sichuan Science and Technology Press, 2004. (in Chinese))
- [12] 付胜男, 李祖雄. 一类具有状态脉冲控制的捕食-食饵模型的动力学研究[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2019, **37**(1): 45-49. (FU Shengnan, LI Zuxiong. Dynamical analysis of a predator-prey model with state impulsive controlling[J]. *Journal of Hubei Minzu University (Natural Science Edition)*, 2019, **37**(1): 45-49. (in Chinese))
- [13] LIU Q, SHAO Y F, ZHOU S, et al. Dynamical behaviors of a three species predator-prey system with predator stage-structure and impulsive effects[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2019, **36**(2): 219-242.
- [14] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010. (WANG Ke. *Stochastic Biological Mathematical Model*[M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese))
- [15] KUMAR C P, REDDY K S, SRINIVAS M. Dynamics of prey predator with Holling interactions and stochast-

- ic influences[J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2017, **57**(2): 1079-1086.
- [16] ZHANG X H, LI W X, LIU M, et al. Dynamics of a stochastic Holling II one-predator two-prey system with jumps[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2015, **421**: 571-582.
- [17] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, **359**(2): 482-498.
- [18] 张树文. 具Markov转换和脉冲扰动的捕食-食饵系统的动力学[J]. *数学物理学报*, 2016, **36**(3): 569-583. (ZHANG Shuwen. Dynamics behaviors of a predator-prey system with Markov switching and impulsive disturbance[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2016, **36**(3): 569-583.(in Chinese))
- [19] JIANG X B, ZU L, JIANG D Q, et al. Analysis of a stochastic holling type II predator-prey model under regime switching[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2020, **43**: 2171-2197.
- [20] AYALA F J, GILPIN M E, EHRENFELD J G. Competition between species: theoretical models and experimental tests[J]. *Theoretical Population Biology*, 1973, **4**(3): 331-356.
- [21] GOPALSAMY K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*[M]. *Mathematics and Its Applications*, Vol **74**. Berlin: Springer, 1992.
- [22] VASILOVA M. Asymptotic behavior of a stochastic Gilpin-Ayala predator-prey system with time-dependent delay[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, **57**(3/4): 764-781.
- [23] VASILOVA M, JOVANOVIĆ M. Stochastic Gilpin-Ayala competition model with infinite delay[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **217**(10): 4944-4959.
- [24] JIANG Y, LIU Z J, YANG J, et al. Dynamics of a stochastic Gilpin-Ayala population model with Markovian switching and impulsive perturbations[J]. *Advances in Difference Equations*, 2020, **2020**: 530.
- [25] ANDERSON W J. Continuous-time Markov chains[J]. *SIAM Review*, 1994, **36**(2): 316-317.
- [26] LIU M, WANG K. Asymptotic properties and simulations of a stochastic logistic model under regime switching[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, **54**(9/10): 2139-2154.
- [27] LIU M, WANG K, WU Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2011, **73**(9): 1969-2012.
- [28] LIU M, WANG K. On a stochastic logistic equation with impulsive perturbations[J]. *Computers and Mathematics With Applications: an International Journal*, 2012, **63**(5): 871-886.
- [29] MAO X R. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. 2nd ed. Horwood Publishing Limited, 2007.
- [30] MAO X R, MARION G, RENSLAW E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2002, **97**(1): 95-110.
- [31] PANG S L, DENG F Q, MAO X R. Asymptotic properties of stochastic population dynamics[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems (Series A): Mathematical Analysis*, 2008, **15**(5): 6386-6394.
- [32] ZHANG S Q, MENG X Z, TAO F, et al. Dynamics analysis and numerical simulations of a stochastic non-autonomous predator-prey system with impulsive effects[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, **26**: 19-37.