应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

一类带有变指数非局部项的反应扩散方程解的爆 破 行 为

田 娅, 秦 瑶, 向 晶

Blow-Up Behaviors of Solutions to Reaction-Diffusion Equations With Nonlocal Sources and Variable Exponents

TIAN Ya, QIN Yao, and XIANG Jing

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.420180 http://www.applmathmech.cn

一类带有变指数非局部项的反应扩散方程解的爆破行为*

田　娅，　秦　瑶，　向　晶

（重庆邮电大学 理学院，重庆 400065）

摘要： 该文考虑了一类带有变指数非局部项的反应扩散方程的爆破问题.首先，由不动点原理，证明了问题解的局部存在性和唯一性.其次，利用上下解方法，给出在齐次 Dirichlet 边界条件下，问题的解在有限时间发生爆破的充分条件，即变指数大于零且初始值足够大，并对爆破时间的上下界进行了估计.

关　键　词： 非局部项；　变指数；　有限时间爆破；　爆破时间上下界

中图分类号： O357.41　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.420180

Blow-Up Behaviors of Solutions to Reaction-Diffusion Equations With Nonlocal Sources and Variable Exponents

TIAN Ya,　QIN Yao,　XIANG Jing

(*School of Science*, *Chongqing University of Posts and Telecommunications*, *Chongqing* 400065, *P.R.China*)

Abstract: The blow-up problems of the solutions are considered for reaction-diffusion equations with nonlocal sources and variable exponents. Firstly, the local existence and uniqueness of solutions to the problem were proved under the fixed-point theorem. Secondly, by means of the super- and sub-solution method, some sufficient conditions for the occurrence of finite-time blow-up were determined under the homogeneous Dirichlet boundary conditions, i.e., the variable exponent is positive and the initial value is large enough. Moreover, the estimates of upper and lower bounds of the blow-up time were given.

Key words: nonlocal source; variable exponent; blow-up in finite time; upper and lower bounds of the blow-up time

引　　言

反应扩散方程是一类非常重要的偏微分方程，通常用来解释和预测自然界中广泛存在的扩散现象.本文将考虑如下带有变指数非局部项的扩散方程：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u\int_\Omega u^{p(y)}(y,t)\mathrm{d}y, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in(0,t^*), \\ u(\boldsymbol{x},t)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ t\in(0,t^*), \\ u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x})\geqslant 0, & \boldsymbol{x}\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期：** 2021-07-01；**修订日期：** 2021-09-09

作者简介： 田娅（1980—），女，副教授，博士，硕士生导师（通讯作者. E-mail: tianya@cqupt.edu.cn）；
秦瑶（1995—），女，硕士生（E-mail: s190603007@stu.cqupt.edu.cn）；
向晶（1998—），女，硕士生（E-mail: s200601013@stu.cqupt.edu.cn）.

引用格式： 田娅，秦瑶，向晶. 一类带有变指数非局部项的反应扩散方程解的爆破行为[J]. 应用数学和力学，2022，**43**(10)：1177-1184.

其中 $\Omega\in R^N(N\geqslant 3)$是一个有界光滑区域, $p(\boldsymbol{x})$ 是有界函数, 且满足如下条件:

$$0<p^-:=\inf_{x\in\Omega}p(\boldsymbol{x})\leqslant p(\boldsymbol{x})\leqslant p^+:=\sup_{x\in\Omega}p(\boldsymbol{x})<+\infty. \tag{2}$$

爆破意味着系统不稳定, 是非线性方程的一个重要性质, 具有非常重要的理论价值和现实意义. 近几十年, 大量文献对方程解的爆破行为进行了研究, 详见文献 [1-11]. 随着电流变学和弹性力学的发展, 部分学者开始关注带有变指数增长条件的微分方程的爆破问题. 在文献 [12] 中, Pinasco 讨论了如下问题解的爆破行为:

$$\begin{cases}u_t=\Delta u+f(u), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in(0,T),\\ u(\boldsymbol{x},t)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ t\in(0,T),\\ u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $f(u)=a(\boldsymbol{x})u^{p(\boldsymbol{x})}$ 或 $f(u)=a(\boldsymbol{x})\int_\Omega u^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}$. 作者借助Laplace 算子在齐次Dirichlet 边界条件下的特征值问题的第一特征值构造辅助函数, 证明了当初始值足够大时, 问题 (3) 的解在有限时刻爆破. Wang 等[13] 和 Zhou 等[14] 讨论了如下问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right)=|u|^{p(x)-1}u, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t>0,\\ u(\boldsymbol{x},t)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0,\\ u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\end{cases} \tag{4}$$

其中$m\geqslant 2$, $p(\boldsymbol{x})>1$. 利用能量方法, 他们得到了类似文献 [12] 的结果. 即初始能量足够大时, 解在有限时刻爆破. 进一步地, Baghaei 等在文献 [15] 中给出了问题 (4) 解的爆破时间下界估计. 在爆破问题的研究中, 通常使用的研究方法 (上下解方法、能量方法等) 一般可以直接导出爆破时间的上界. 然而, 在实际问题中, 对爆破时间下界的估计往往具有更重要的应用参考价值.

据笔者所知, 对于问题 (1) 解的有限时间爆破行为, 目前尚无学者进行研究. 因此, 受上述文献的启发, 本文将讨论问题 (1) 的解的爆破问题, 给出爆破发生的条件, 并对爆破时间的上、下界进行估计. 全文结构如下: 首先, 由不动点定理, 证明问题 (1) 解的局部存在性和唯一性; 其次, 利用上下解方法, 给出问题 (1) 的解在有限时刻爆破的充分条件; 接下来, 利用能量估计方法, 借助辅助函数以及一些不等式给出爆破时间的下界估计; 最后, 通过举例验证了本文结论的可行性.

1　解的局部存在性

这一节, 我们将利用 Leray-Schauder 不动点定理讨论问题 (1) 解的局部存在性和唯一性.

定理 1　若$\Omega\in R^N$是一个具有光滑边界的区域, $p(\boldsymbol{x})$满足条件 (2), 则问题 (1) 的解局部存在且唯一.

证明　问题 (1) 可写为

$$u(\boldsymbol{x},t)=\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t)u_0(\boldsymbol{s})\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int_0^t\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t-w)\left(u(\boldsymbol{s},t)\int_\Omega u^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}w, \tag{5}$$

其中$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t)$ 是 Green 函数. 定义

$$u_1(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{6}$$

$$u_{n+1}(\boldsymbol{x},t)=\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t)u_0(\boldsymbol{s})\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int_0^t\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t-w)\left(u_n(\boldsymbol{s},t)\int_\Omega {u_n}^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}w. \tag{7}$$

为了简洁, 记

$$H(u)=\int_0^t\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t-w)\left(u_n(\boldsymbol{s},t)\int_\Omega {u_n}^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}w. \tag{8}$$

令E={$C^{1,2}(\Omega_{t^*})\cap C(\overline{\Omega_{t^*}})$: $\|u\|_\infty\leqslant M$}, 其中$\Omega_{t^*}=\Omega\times[0,t^*]$, $M\geqslant\max\{\|u\|_\infty,1\}$是一个固定的常数. 我们将证明 $H(u)$ 是区域 E 内的压缩函数. 首先对于任意的$u,v\in E$ 有

$$\begin{aligned}&\left\|u\int_\Omega u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}-v\int_\Omega v^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\|_\infty=\left\|(u-v)\int_\Omega u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}+v\int_\Omega u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}-v\int_\Omega v^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\|_\infty\leqslant\\&\quad\|u-v\|_\infty\left\|\int_\Omega u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\|_\infty+\|v\|_\infty\left\|\int_\Omega(u^{p(\boldsymbol{y})}-v^{p(\boldsymbol{y})})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\|_\infty\leqslant M^{p^+}|\Omega|\|u-v\|_\infty+M\left\|\int_\Omega(u^{p(\boldsymbol{y})}-v^{p(\boldsymbol{y})})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\|_\infty,\end{aligned} \tag{9}$$

其中$|\Omega|$是 Ω 的测度.

对于任意固定的$\boldsymbol{x}\in\Omega$, 根据微分中值定理有

$$u^{p(\boldsymbol{x})}-v^{p(\boldsymbol{x})}=p(\boldsymbol{x})\xi^{p(\boldsymbol{x})-1}(u-v),\tag{10}$$

其中$\xi=\theta u+(1-\theta)v$, $\theta\in(0,1)$依赖于$\boldsymbol{x}$. 于是

$$\left\|p(\boldsymbol{x})\xi^{p(\boldsymbol{x})-1}(u-v)\right\|_\infty\leqslant p^+(2M)^{p^+-1}\|u-v\|_\infty.\tag{11}$$

再令

$$Q(t):=\sup_{x\in\overline{\Omega},0\leqslant\tau<t}\int_0^\tau\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t-w)\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}w,\tag{12}$$

显然, 当$t\to0^+$时, $Q(t)\to0$. 接下来将证明当$Q(t)$足够小时, $H(u)$是压缩函数. 即证明对于任意的$u,v\in E$, 存在$\mu<1$使得

$$\|H(u)-H(v)\|_\infty\leqslant\mu\|u-v\|_\infty.$$

由于

$$\begin{aligned}\|H(u)-H(v)\|_\infty&=\left\|\int_0^t\int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},t-w)\left[u_n(\boldsymbol{s},t)\int_\Omega {u_n}^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}-v_n(\boldsymbol{s},t)\int_\Omega {v_n}^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}w\right\|_\infty\leqslant\\ &Q(t)M^{p^+}\|u-v\|_\infty|\Omega|+Q(t)M\left\|\int_\Omega({u_n}^{p(\boldsymbol{y})}-{v_n}^{p(\boldsymbol{y})})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right\|_\infty\leqslant\\ &Q(t)M^{p^+}\|u-v\|_\infty|\Omega|+Q(t)Mp^+(2M)^{p^+-1}|\Omega|\|u-v\|_\infty=\\ &Q(t)|\Omega|M^{p^+}(1+2^{p^+-1}p^+)\|u-v\|_\infty.\end{aligned}\tag{13}$$

对于足够小的正数ε, 当$0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ 时, $Q(t)$ 足够小, 使得

$$Q(t)|\Omega|M^{p^+}(1+2^{p^+-1}p^+)<1,$$

则$H(u)$是压缩映射. 故由 Leray-Schauder 不动点定理可知, 问题 (1) 的解局部存在且唯一.

注 1　由解的局部存在唯一性不难证明, 对于问题 (1) 比较原理成立.

2　解在有限时刻爆破

在这一节, 我们将利用基于比较原理的上下解方法, 通过构造合适的下解给出问题 (1) 的解在有限时间爆破的条件, 并对爆破时间的上界进行估计.

定理 2　假设$u(\boldsymbol{x},t)$是问题 (1) 的一个非负解, $p(\boldsymbol{x})$满足条件 (2). 若初值u_0足够大, 则$u(\boldsymbol{x},t)$在有限时刻t^*爆破.

证明　在$\left[t_0,\dfrac{1}{\delta}\right)\times R^N$ 上考虑如下函数:

$$\underline{u}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(1-\delta t)^\alpha}V\left(\frac{|x|}{(1-\delta t)^\beta}\right),\tag{14}$$

其中$V(\xi)=\left(1+\dfrac{A}{2}-\dfrac{\xi^2}{2A}\right)_+$, $0\leqslant t_0<\dfrac{1}{\delta}$是一个待定的正数, 非负参数$A$, β, α 和δ 将在后面给出. 对所有的$t\in\left[t_0,\dfrac{1}{\delta}\right)$, 易知

$$\mathrm{supp}(\underline{u}(\cdot,t))=\overline{B(0,R(1-\delta t)^\beta)}\subset\overline{B(0,R(1-\delta t_0)^\beta)}\subset\Omega,$$

其中$R=\sqrt{A(2+A)}$. 显然, $\underline{u}(\boldsymbol{x},t)$在有限时刻爆破. 通过简单的计算可知, $V(\xi)$ 具有如下性质:

$$\begin{cases}1\leqslant V(\xi)\leqslant1+\dfrac{A}{2},\ -1\leqslant V'(\xi)\leqslant0, & 0\leqslant\xi\leqslant A,\\ 0\leqslant V(\xi)\leqslant1,\ -\dfrac{R}{A}\leqslant V'(\xi)\leqslant-1, & A<\xi\leqslant R.\end{cases}$$

令$\xi=\dfrac{|x|}{(1-\delta t)^\beta}$, 接下来证明$\underline{u}(\boldsymbol{x},t)$是问题 (1) 的一个下解.

对于任意的$t\in[t_0,1/\delta)$, 可以将 Ω 分成如下两个部分:

$$\Omega\{<1\}=\{\boldsymbol{x}\in\Omega;\underline{u}(\boldsymbol{x},t)<1\},\quad\Omega\{\geqslant1\}=\{\boldsymbol{x}\in\Omega;\underline{u}(\boldsymbol{x},t)\geqslant1\}.$$

由此可以得到

$$\int_{\Omega}\underline{u}^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\int_{\Omega\{\geqslant 1\}}\underline{u}^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_{\Omega\{<1\}}\underline{u}^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\geqslant\int_{\Omega\{\geqslant 1\}}\underline{u}^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$
$$\int_{\Omega\{\geqslant 1\}}\underline{u}^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\Omega\{<1\}}\underline{u}^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\Omega\{<1\}}\underline{u}^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\int_{\Omega}\underline{u}^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-|\Omega|. \tag{15}$$

故

$$\underline{u}\int_{\Omega}\underline{u}^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\geqslant\underline{u}\int_{\Omega}\underline{u}^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-|\Omega|\underline{u}=\frac{V(\xi)}{(1-\delta t)^{\alpha(1+p^-)}}\int_{B(0,R(1-\delta t)^{\beta})}V^{p^-}(\xi)\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\frac{|\Omega|V(\xi)}{(1-\delta t)^{\alpha}}. \tag{16}$$

令$W=\int_{B(0,R)}V^{p^-}(\xi)\mathrm{d}\xi$, 则有

$$\int_{B(0,R(1-\delta t)^{\beta})}V^{p^-}(\xi)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{W}{(1-\delta t)^{-N\beta}}. \tag{17}$$

通过计算可得

$$\underline{u}_t=\frac{\delta(\alpha V(\xi)+\beta\xi V'(\xi))}{(1-\delta t)^{\alpha+1}}, \tag{18}$$

$$\Delta\underline{u}=-\frac{N}{A(1-\delta t)^{\alpha+2\beta}}. \tag{19}$$

构造如下函数:

$$P(\underline{u})=\underline{u}_t-\Delta\underline{u}-\underline{u}\int_{\Omega}\underline{u}^{p(\boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{20}$$

将式 (16)~(19) 代入式 (20), 得到

$$P(\underline{u})=\frac{\delta(\alpha V(\xi)+\beta\xi V'(\xi))}{(1-\delta t)^{\alpha+1}}+\frac{N}{A(1-\delta t)^{\alpha+2\beta}}-\frac{V(\xi)W}{(1-\delta t)^{\alpha(1+p^-)-N\beta}}+\frac{|\Omega|V(\xi)}{(1-\delta t)^{\alpha}}. \tag{21}$$

可以选择

$$\alpha=\frac{N\beta+1}{p^-},\ \beta<\frac{1}{2},\ A>\frac{\alpha}{\beta},\ 0<\delta<\frac{W}{\alpha\left(1+\dfrac{A}{2}\right)}.$$

当$0\leqslant\xi\leqslant A$时, 由式 (21), 有

$$P\left(\underline{u}\right)\leqslant\frac{\delta\alpha\left(1+\dfrac{A}{2}\right)}{(1-\delta t)^{\alpha+1}}+\frac{N}{A(1-\delta t)^{\alpha+2\beta}}-\frac{W}{(1-\delta t)^{\alpha(1+p^-)-N\beta}}+\frac{|\Omega|\left(1+\dfrac{A}{2}\right)}{(1-\delta t)^{\alpha}}=$$
$$\frac{1}{(1-\delta t)^{\alpha+1}}\left(\delta\alpha\left(1+\frac{A}{2}\right)+\frac{N}{A}(1-\delta t)^{1-2\beta}-W+|\Omega|\left(1+\frac{A}{2}\right)(1-\delta t)\right). \tag{22}$$

令

$$T_1(t)=\delta\alpha\left(1+\frac{A}{2}\right)+\frac{N}{A}(1-\delta t)^{1-2\beta}-W+|\Omega|\left(1+\frac{A}{2}\right)(1-\delta t),$$

显然$T_1(t)$是一个单调递减函数, 且存在t_{01}满足

$$T_1(t_{01})=0.$$

当$A<\xi\leqslant R$时, 同样可得

$$P(\underline{u})\leqslant\frac{\delta(\alpha-\beta A)}{(1-\delta t)^{\alpha+1}}+\frac{N}{A(1-\delta t)^{\alpha+2\beta}}-0+\frac{|\Omega|}{(1-\delta t)^{\alpha}}=$$
$$\frac{1}{(1-\delta t)^{\alpha+1}}\left(\delta(\alpha-A\beta)+\frac{N}{A}(1-\delta t)^{1-2\beta}+|\Omega|(1-\delta t)\right). \tag{23}$$

令

$$T_2(t)=\delta(\alpha-A\beta)+\frac{N}{A}(1-\delta t)^{1-2\beta}+|\Omega|(1-\delta t),$$

显然$T_2(t)$是一个单调递减函数, 且存在t_{02}满足

$$T_2(t_{02})=0.$$

取

$$t_0 = \max\{t_{01}, t_{02}, 0\}.$$

由式 (22)、(23) 可知当$t > t_0$时, $P(\underline{u})\leqslant 0$. 除此之外, 在$\partial\Omega\times(t_0, 1/\delta)$ 上显然有 $\underline{u} = 0$. 同时, 取初值$u_0(x)$ 足够大, 使得

$$u_0(\boldsymbol{x})\geqslant\frac{V(0)}{(1-\delta t_0)^{\alpha}}\geqslant\underline{u}(\boldsymbol{x}, t_0).$$

由比较原理可知

$$u(\boldsymbol{x}, t)\geqslant\underline{u}(\boldsymbol{x}, t+t_0),\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ 0 < t < \frac{1}{\delta} - t_0.$$

综上, $u(\boldsymbol{x}, t)$在有限时刻t^*爆破, 且

$$t^* < \frac{1}{\delta} - t_0.$$

定理 2 证毕.

3　爆破时间下界估计

这一节, 我们利用能量方法, 借助辅助函数和各种积分不等式技术估计问题 (1) 解的爆破时间的下界. 主要结论如下.

定理 3　在定理 2 的假设条件下, 问题 (1) 的非负解$u(\boldsymbol{x}, t)$ 在有限时刻t^* 处爆破. 则

$$t^*\geqslant\frac{1}{\tilde{k}\Phi(0)},$$

其中$\tilde{k}$, $\Phi(0) > 0$为待定常数, 其值将在定理的证明过程中给出.

证明　首先构造辅助函数:

$$\Phi(t) = \int_{\Omega} u^k \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{24}$$

其中　　$k\geqslant\max\{p^+, 1\}$.

将式 (24) 两端对t求导可得

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= k\int_{\Omega} u^{k-1}u_t\mathrm{d}\boldsymbol{x} = k\int_{\Omega} u^{k-1}\Delta u\mathrm{d}\boldsymbol{x} + k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \\ &-k(k-1)\int_{\Omega} u^{k-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} + k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = -\frac{4(k-1)}{k}\int_{\Omega}\left|\nabla u^{k/2}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} + k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p(\boldsymbol{y})}\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned} \tag{25}$$

为了方便计算, 将Ω分成两部分:

$$\Omega'\{<1\} = \{\boldsymbol{x}\in\Omega; u(\boldsymbol{x}, t) < 1\},\quad \Omega'\{\geqslant 1\} = \{\boldsymbol{x}\in\Omega; u(\boldsymbol{x}, t)\geqslant 1\}.$$

由此可以得到

$$\int_{\Omega} u^{p(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega'\{\geqslant 1\}} u^{p(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Omega'\{<1\}} u^{p(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_{\Omega'\{\geqslant 1\}} u^{p^+}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Omega'\{<1\}} u^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_{\Omega} u^{p^+}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Omega} u^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{26}$$

将式 (26) 代入式 (25), 得

$$\Phi'(t)\leqslant -\frac{4(k-1)}{k}\int_{\Omega}\left|\nabla u^{k/2}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} + k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p^+}\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{27}$$

为了简便, 记

$$I_1 = -\frac{4(k-1)}{k}\int_{\Omega}\left|\nabla u^{k/2}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$I_2 = k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p^-}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + k\int_{\Omega} u^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega} u^{p^+}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

接下来根据 Sobolev 不等式 (见文献 [16]), 对于$N\geqslant 3$ 的情形有

$$\left\|u^{k/2}\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}\leqslant c_{\mathrm{s}}\left\|\nabla u^{k/2}\right\|_{L^2(\Omega)},$$

即

$$\left(\int_{\Omega}u^{\frac{Nk}{N-2}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{N-2}{N}}\leqslant c_{\mathrm{s}}^{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u^{k/2}\right|^{2}\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中c_{s}是 Sobolev 不等式的最佳嵌入常数. 接下来利用 Hölder 不等式, 可得

$$\int_{\Omega}u^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant|\Omega|^{\frac{2}{N}}\left(\int_{\Omega}u^{\frac{Nk}{N-2}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{N-2}{N}},\tag{28}$$

其中$|\Omega|$是 Ω 的测度. 故

$$\int_{\Omega}\left|\nabla u^{k/2}\right|^{2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant c_{\mathrm{s}}^{-2}\left(\int_{\Omega}u^{\frac{Nk}{N-2}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{N-2}{N}}\geqslant c_{\mathrm{s}}^{-2}|\Omega|^{-\frac{2}{N}}\int_{\Omega}u^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=c_{\mathrm{s}}^{-2}|\Omega|^{-\frac{2}{N}}\varPhi(t).\tag{29}$$

可知

$$I_{1}\leqslant-\frac{4(k-1)}{k}c_{\mathrm{s}}^{-2}|\Omega|^{-\frac{2}{N}}\varPhi(t).\tag{30}$$

利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$\int_{\Omega}u^{p^{+}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant|\Omega|^{\frac{k-p^{+}}{k}}\left(\int_{\Omega}u^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{p^{+}}{k}}\leqslant\frac{k-p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{\frac{k}{k-p^{+}}}|\Omega|+\frac{p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{-\frac{k}{p^{+}}}\varPhi(t),\tag{31}$$

$$\int_{\Omega}u^{p^{-}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant|\Omega|^{\frac{k-p^{-}}{k}}\left(\int_{\Omega}u^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{p^{-}}{k}}\leqslant\frac{k-p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{\frac{k}{k-p^{-}}}|\Omega|+\frac{p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{-\frac{k}{p^{-}}}\varPhi(t).\tag{32}$$

于是, 由式 (31) 和 (32) 有

$$I_{2}\leqslant k\varPhi(t)\left(\frac{k-p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{\frac{k}{k-p^{+}}}+\frac{k-p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{\frac{k}{k-p^{-}}}\right)|\Omega|+k\varPhi^{2}(t)\left(\frac{p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{-\frac{k}{p^{+}}}+\frac{p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{-\frac{k}{p^{-}}}\right).\tag{33}$$

故

$$\begin{aligned}\varPhi'\leqslant I_{1}+I_{2}\leqslant&-\frac{4(k-1)}{k}c_{\mathrm{s}}^{-2}|\Omega|^{-\frac{2}{N}}\varPhi(t)+k\varPhi(t)\left(\frac{k-p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{\frac{k}{k-p^{+}}}+\frac{k-p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{\frac{k}{k-p^{-}}}\right)|\Omega|+\\&k\varPhi^{2}(t)\left(\frac{p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{-\frac{k}{p^{+}}}+\frac{p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{-\frac{k}{p^{-}}}\right).\end{aligned}\tag{34}$$

选择适当的ε_1和ε_2, 使得

$$-\frac{4(k-1)}{k}c_{\mathrm{s}}^{-2}|\Omega|^{-\frac{2}{N}}+k\left(\frac{k-p^{+}}{k}\varepsilon_{1}{}^{\frac{k}{k-p^{+}}}+\frac{k-p^{-}}{k}\varepsilon_{2}{}^{\frac{k}{k-p^{-}}}\right)|\Omega|=0.\tag{35}$$

于是, 有

$$\varPhi'(t)\leqslant\tilde{k}\varPhi^{2}(t),\tag{36}$$

其中

$$\tilde{k}=p^{+}\varepsilon_{1}{}^{-k/p^{+}}+p^{-}\varepsilon_{2}{}^{-k/p^{-}}.$$

将式 (36) 两边从0到t积分, 得到

$$\int_{\varPhi(0)}^{\varPhi(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\tilde{k}\xi^{2}}\leqslant t,$$

当$t\to t^{*}$时, 有$\varPhi(t)=+\infty$, 这意味着

$$\int_{\varPhi(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\tilde{k}\xi^{2}}\leqslant t^{*}.$$

简单计算可得

$$t^{*}\geqslant\frac{1}{\tilde{k}\varPhi(0)},$$

其中

$$\varPhi(0)=\int_{\Omega}u_{0}{}^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证毕.

4 应用举例

这一节, 我们将利用实例来验证定理 2 和定理 3 结论的可行性.

例　考虑如下问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u\int_{\Omega} u^{2+|\boldsymbol{x}|^2}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\ t\in(0,t^*), \\ u(\boldsymbol{x},t)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ t\in(0,t^*), \\ u(\boldsymbol{x},0)=u_0(\boldsymbol{x})=3-\dfrac{\boldsymbol{x}^2}{7}, & \boldsymbol{x}\in\Omega, \end{cases} \tag{37}$$

其中$\Omega=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\,\middle|\,|\boldsymbol{x}|^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2<1\right\}$是 R^3 中的一个球, $p(\boldsymbol{x})=2+|\boldsymbol{x}|^2$, 由此可知

$$N=3,\ \ p^-=2,\ \ p^+=3,\ \ |\Omega|=\frac{4}{3}\pi,\ \ c_s=\frac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}.$$

取

$$\beta=\frac{1}{3},\ \ \alpha=1,\ \ A=4,\ \ R=2\sqrt{6},$$

可以得到

$$W=\int_{B(0,2\sqrt{6})}\left(3-\frac{\xi^2}{8}\right)^2\mathrm{d}\xi=\frac{4\,608}{35}\sqrt{6}\pi.$$

令

$$\delta=43\sqrt{6}\pi<\frac{W}{3},$$

所以

$$t_0=\max\{t_{01},t_{02},0\}=0.$$

由定理 2, 计算得

$$t^*\leqslant\frac{1}{\delta}-t_0<3.022\,0\times10^{-2}. \tag{38}$$

接下来令$k=4$, 则

$$\Phi(0)=\int_{\Omega}{u_0}^k\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}\left(3-\frac{x^2}{7}\right)^4\mathrm{d}\boldsymbol{x}=4\pi\int_0^1\left(3-\frac{r^2}{7}\right)^4r^2\mathrm{d}r.$$

再取$\varepsilon_2=1/2$, 代入式 (35) 可得

$$\varepsilon_1=\left(3^{\frac{11}{3}}\cdot2^{-\frac{14}{3}}\cdot\pi^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

则有 $\tilde{k}=3\cdot\left(3^{\frac{11}{3}}\cdot2^{-\frac{14}{3}}\cdot\pi^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}+8$, 再由定理 3, 得

$$t^*\geqslant\frac{1}{\tilde{k}\Phi(0)}=\frac{1}{4\pi\int_0^1\left(3-\frac{r^2}{7}\right)^4r^2\mathrm{d}r\cdot\left[3\cdot\left(3^{\frac{11}{3}}\cdot2^{-\frac{14}{3}}\cdot\pi^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}+8\right]}>1.096\,0\times10^{-3}. \tag{39}$$

综合式 (38) 和 (39), 可得

$$1.096\,0\times10^{-3}<t^*<3.022\,0\times10^{-2}.$$

5 结　　论

本文研究了一类具有变指数项的反应扩散方程的爆破问题. 通过上下解方法、能量估计及各种不等式技巧给出了问题解在有限时间发生爆破的充分条件, 并得到了爆破时间的上下界估计. 最后通过实例对结论进

行验证.从实例中可以看出,爆破时间的上、下界估计比较接近,说明定理中给出的时间界限估计较为准确,具有一定的参考价值.

由于反应项中存在变指数,给爆破发生的临界指数的确定带来了很大的困难,因此本文只给出了爆破发生的充分条件.对于必要条件还须寻求新技术作进一步探讨.

参考文献(References):

[1] WANG N, SONG X F, LV X H. Estimates for the blowup time of a combustion model with nonlocal heat sources[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, **436**(2): 1180-1195.

[2] PAYNE L E, PHILIPPIN G A. Blow-up in a class of non-linear parabolic problems with time-dependent coefficients under Robin type boundary conditions[J]. *Applicable Analysis*, 2012, **91**(12): 2245-2256.

[3] 许然, 田娅, 秦瑶. 一类反应扩散方程的爆破时间下界估计[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 113-122. (XU Ran, TINA Ya, QIN Yao. Lower bounds of the blow-up time for a class of reaction diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 113-122.(in Chinese))

[4] LI Y F, LIU Y, LIN C H. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems under mixed boundary conditions[J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, **11**(5): 3815-3823.

[5] MU C L, DONG G C. Blow-up and existence for fast diffusion equations with general nonlinearities[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1999, **15**(2): 126-131.

[6] 李远飞, 肖胜中, 陈雪姣. 非线性边界条件下具有变系数的热量方程解的存在性及爆破现象[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 92-101. (LI Yuanfei, XIAO Shengzhong, CHEN Xuejiao. Existence and blow-up phenomena of solutions to heat equations with variable coefficients under nonlinear boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 92-101.(in Chinese))

[7] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Bounds for blow-up time for the heat equation under nonlinear boundary conditions[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 2009, **139**(6): 1289-1296.

[8] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Neumann conditions[J]. *Applicable Analysis*, 2006, **85**(10): 1301-1311.

[9] 邓卫兵, 刘其林, 谢春红. 一类含非局部源的非线性退化扩散方程解的爆破性质[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1204-1210. (DENG Weibing, LIU Qilin, XIE Chunhong. The blowup properties for a class of nonlinear degenerate diffusion equation with nonlocal source[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, **24**(11): 1204-1210.(in Chinese))

[10] CHAOUAI Z, EL HACHIMI A. Qualitative properties of weak solutions for p-Laplacian equations with nonlocal source and gradient absorption[J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2020, **57**(4): 1003-1031.

[11] WANG Y X, FANG Z B, YI S C. Lower bounds for blow-up time in nonlocal parabolic problem under Robin boundary conditions[J]. *Applicable Analysis*, 2019, **98**(8): 1403-1414.

[12] PINASCO J P. Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents[J]. *Nonlinear Analysis*, 2009, **71**(3/4): 1094-1099.

[13] WANG H, HE Y J. On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, **26**(10): 1094-1099.

[14] ZHOU J, YANG D. Upper bound estimate for the blow-up time of an evolution m-Laplace equation involving variable source and positive initial energy[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2015, **69**(12): 1463-1469.

[15] BAGHAEI K, GHAEMI M B, HESAARAKI M. Lower bounds for the blow-up time in a semilinear parabolic problem involving a variable source[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, **17**: 49-52.

[16] TALENTI G. Best constant in Sobolev inequality[J]. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1976, **110**: 353-372.