

具有跟踪隔离措施的新冠肺炎传播模型分析及应用*

崔 锦, 李明涛, 裴 鑫

(太原理工大学 数学学院, 太原 030024)

摘要: 报道于 2019 年 12 月底的新型冠状病毒肺炎(COVID-19)疫情, 由于 2020 年春运期间人口的大规模流动, 使得其迅速蔓延. 自 2020 年 1 月 23 日起, 我国采取了各种措施使得疫情得到了有效的控制, 例如武汉封城、确诊病例的密切接触者跟踪隔离、湖北人员的居家隔离等. 该文基于 COVID-19 在山西省的实际传播情况, 建立了具有输入病例和确诊病例密切接触者跟踪隔离的动力学模型. 在不考虑输入病例的情况下, 分析了模型的动力学行为. 利用山西省 COVID-19 病例数据, 计算了实时再生数, 发现山西省 2020 年 1 月 25 日全省封村封街道有效控制了 COVID-19 疫情的传播, 即实时再生数小于 1, 从宏观角度验证了防控措施的有效性. 进一步通过模型的数值拟合得到: 早期染病者隔离 14 天的防控策略是合理有效的; 武汉封城时间越早, 染病者的规模越小; 跟踪隔离到大量确诊病例的接触者时, 染病者的规模越小.

关键词: COVID-19; 跟踪隔离; 封城; 实时再生数; 动力学模型

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420107

Analysis and Application of a COVID-19 Transmission Model With Tracking and Isolation Measures

CUI Jin, LI Mingtao, PEI Xin

(College of Mathematics, Taiyuan University of Technology,
Taiyuan 030024, P.R.China)

Abstract: The novel coronavirus epidemic, appearing at the end of December 2019, spread rapidly due to the large-scale population movement in the Spring Festival travel rush in 2020. Since January 23, 2020, China has taken various measures to effectively control the epidemic. For example, the closure of Wuhan, the tracking and isolation of close contacts of confirmed cases, and the home isolation of Hubei people, etc. Based on the actual transmission of novel coronavirus (COVID-19) in Shanxi province, a dynamic model was established for tracking and isolation of close contacts with imported and confirmed cases. Without regard to the imported cases, the dynamic behavior of the model was analyzed. By means of the case data of novel coronavirus in Shanxi province, the real-time reproduction number was calculated. It is found that the closure of villages and streets

* 收稿日期: 2021-04-22; 修订日期: 2021-05-31

基金项目: 国家自然科学基金(11801398); 山西省应用基础研究面上青年项目(201801D221024)

作者简介: 崔锦(1997—), 女, 硕士(E-mail: 2443411847@qq.com);

李明涛(1989—), 男, 博士(通讯作者. E-mail: limingtao18@126.com);

裴鑫(1991—), 女, 博士(E-mail: peixin1120@126.com).

引用格式: 崔锦, 李明涛, 裴鑫. 具有跟踪隔离措施的新冠肺炎传播模型分析及应用[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(12): 1306-1316.

in Shanxi province on January 25, 2020 effectively controls the spread of COVID-19 epidemic, that is, the real-time reproduction number is less than 1, which verifies the effectiveness of prevention and control measures from a macro perspective. Further, through the numerical simulation of the model, it is concluded that the prevention and control strategy for early infected patients isolated for 14 days is reasonable and effective; the earlier the closure of Wuhan is, the smaller the scale of infected people will be; the larger number of tracked and isolated contacts of confirmed cases is, the smaller the size of the patients will be.

Key words: COVID-19; tracking and isolation; city closure; real-time reproduction number; dynamic model

引 言

新型冠状病毒肺炎是指由 2019 年 12 月最早报道在湖北省武汉市的一种新型冠状病毒感染引起的急性呼吸道传染病^[1].2020 年 1 月 20 日国家卫生健康委员会发布 2020 年 1 号公告,将新型冠状病毒感染的肺炎纳入《中华人民共和国传染病防治法》规定的乙类传染病,但采取甲类传染病的预防、控制措施,并将其纳入《中华人民共和国国境卫生检疫法》规定的检疫传染病管理^[2].2020 年 2 月 8 日,中国国家卫生健康委员会将新型冠状病毒感染的肺炎暂命名为新型冠状病毒肺炎(novel coronavirus pneumonia),简称“NCP”^[3].2020 年 2 月 11 日,世界卫生组织宣布将新型冠状病毒感染的肺炎命名为“COVID-19”(corona virus disease 2019)^[4],与此同时,国际病毒分类委员会声明将新型冠状病毒命名为“SARS-CoV-2”(severe acute respiratory syndrome coronavirus 2),并认定这种病毒为 SARS 冠状病毒的姊妹病毒.2020 年 2 月 21 日,中国国家卫生健康委员会决定将“新型冠状病毒肺炎”英文名称修订为“COVID-19”,与世界卫生组织命名保持一致,中文名称不变^[5].

2019 年 12 月底,中国湖北省武汉市出现了 COVID-19 疫情,由于时值春节,人口的大规模流动加快了疫情的传播速度,扩大了疫情的传播范围,使得疫情在短期内蔓延到全国多个地区.疫情暴发后,全国各省、自治区、直辖市及下属区相继启动重大公共卫生事件一级响应,各级政府陆续实施严格的防控措施使得疫情得到控制.对于除湖北以外的中国其他省、自治区、直辖市而言,早期疫情发展主要分为两个阶段:武汉封城前和武汉封城后.武汉封城前,其确诊病例多为输入病例,严防输入病例即可有效控制疫情传播;武汉封城后,由输入病例导致的本地病例在本地传播,通过跟踪隔离与其他各种防控措施,有效控制了本地疫情.

疫情暴发初期,由于缺乏对该传染病的基本认识,需要根据确诊病例的一些数据(发病时间、确诊时间等)来推测获得这一新发传染病的相关信息,Li 等^[6]收集了 2020 年 1 月 22 日之前报告的 COVID-19 确诊病例的一些信息,得到 COVID-19 的平均潜伏期为 5.2 天,序列间隔(原发病例发病到其继发病例发病的时间)符合均值为 7.5,标准差为 3.4 的 Gamma 分布.李盈科等^[7]介绍了早期关于 COVID-19 的几个重要流行病学参数(基本再生数、潜伏期、代间隔)的估计方法,刻画了这些参数如何影响控制策略的制定以及控制策略的有效性,提出疫情能否得到控制取决于有效再生数能否降到 1 以下.之后,各地区相继实施各种疫情防控措施,为研究防控措施对疫情传播的影响,Tang 等^[8]采用武汉早期修正后的数据,根据 COVID-19 的临床进展、个体的流行病学状况和干预措施,建立了一个以一定比例隔离的确定性仓室模型,其敏感性分析表明,加强接触者的跟踪与隔离等干预措施可有效降低再生数和疫情传播风险.曹文静等^[9]对除湖北省外的全国确诊病例数据取自回归建模与仿真,其结果表明严格的防控措施和隔离措施可有效控制这些省份疫情的蔓延.王国强等^[10]建立了耦合不同年龄段人群接触模式的 COVID-19 传播模型,通过对广东省 COVID-19 各年龄段高维数据拟合,其控制措施评估效果表明在医疗资源充足的情况下,实施居家隔离措施与及时隔离确诊病例并对其进行治疗是疫情防控的关键.

疫情防控过程中,需要一个参数实时反映防控策略是否需要加强,以此来达到控制疫情的目的,Chong 等^[11]监测了浙江省 COVID-19 的实时再生数,结果表明浙江省的综合干预措施是有效的.为了防止全国各地复学过程中校园疫情的发生,孙皓宸等^[12]提出最好的校园疫情防控措施是采取数字接触追踪防控.目前,境外疫情还在不断暴发,中国正面临着外防输入、内防扩散的挑战,这与除湖北外其他省份的早期疫情发展情况相似,输入病例对除湖北外的全国其他地区疫情的影响不可忽视.Li 等^[13]分析山西省早期离散输入病

例对 COVID-19 传播的影响,建立了含有离散输入病例的差分方程模型来进行评估和风险分析,结果表明武汉封城时间越早,传染的病例越少.以山西省为例,评估其早期防控策略的有效性可以为有效应对境外输入,巩固防控成果提供借鉴,对防止疾病传播具有积极意义.

本文整理了山西省 2020 年 1 月 14 日至 2020 年 3 月 25 日的 COVID-19 每日累计发病数据与每日输入病例数据,在离散输入病例存在的情况下建立了具有追踪隔离确诊病例的接触者性质的动力学模型,并在不考虑输入病例的情况下进行模型分析.借助于文献[6]中的 COVID-19 序列间隔分布估计,利用山西省每日新增发病数据得到 2020 年 1 月 21 日至 2020 年 2 月 28 日每天的实时再生数估计值,从宏观角度评估山西省的防控策略对 COVID-19 实时传播能力的影响,进而通过模型的数值拟合从各个防控策略的角度来分析单个防控策略对疫情发展的影响.

1 模型构建与分析

1.1 模型假设

基于传染病动力学仓室模型,将 COVID-19 传播过程中的人群分为七个仓室:易感者(S)、潜伏者(E)、发病者(I)、确诊者(Q)、恢复者(R)、易感者隔离(S_q)、潜伏者隔离(E_q),这里的潜伏者指的是无症状但具有传染性的感染者.对模型做以下假设:

- 1) 设总人口为 $N(t)$,则有 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + S_q(t) + E_q(t)$, 不考虑无症状感染者;
- 2) 考虑人口的自然出生与自然死亡,并假设自然出生率等于自然死亡率,记为 μ , 假设新生儿全为易感者,忽略疾病的致死率;
- 3) 参与传染病传播的易感者所占的比例为 S/N ,易感者与潜伏者的接触感染率为 β ,易感者与发病者的接触感染率为 β_1 ,一个潜伏者在单位时间内传染的病人数为 $\beta SE/N$,一个发病者在单位时间内传染的病人数为 $\beta_1 SI/N$;
- 4) 易感者隔离主要是通过居家隔离实现的,隔离后的易感者以比率 λ 解除隔离进入易感者仓室,单位时间内解除隔离的易感者人数为 λS_q ;
- 5) 潜伏者的发病率为 δ ,单位时间内从潜伏者仓室到发病者仓室的人数为 δE ,通过住院治疗疾病的恢复率为 γ ,单位时间内恢复的人数为 γQ ,不考虑染病者的自然恢复;
- 6) 由发病到确诊的病例的平均接触者为 b ,确诊率为 m ,由于追踪隔离政策的实施,单位时间内被隔离的染病者人数为 $bmEI/N$,单位时间内被隔离的易感者人数为 $bmSI/N$;
- 7) $A(t), B(t)$ 分别代表外地输入的病例,其中 $A(t)$ 中的病例为输入前未发病,即输入的潜伏病例, $B(t)$ 中的病例为输入前已经发病,即输入的发病病例.

1.2 模型构建

在以上模型假设的基础上,绘制了考虑跟踪隔离措施的 COVID-19 传播过程的仓室模型流程图,如图 1 所示.

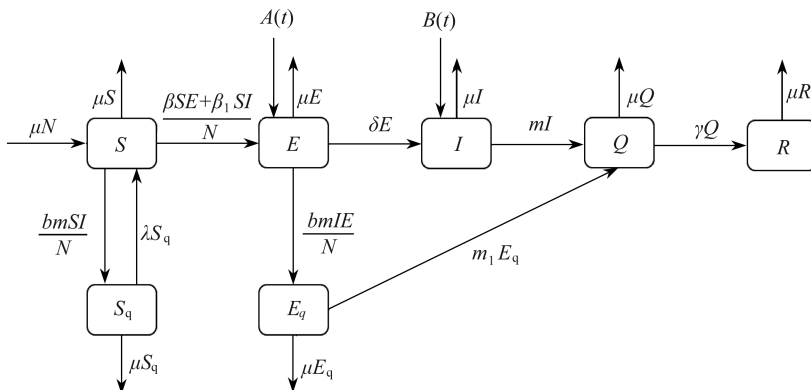


图 1 COVID-19 仓室模型流程图

Fig. 1 The flow chart of the compartment model for COVID-19

根据仓室模型流程图,可以得到如下数学模型:

$$\begin{cases}
 \frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SE + \beta_1 SI + bmSI}{N} + \lambda S_q - \mu S, \\
 \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SE + \beta_1 SI}{N} - \delta E - \frac{bmIE}{N} - \mu E + A(t), \\
 \frac{dI}{dt} = \delta E - mI - \mu I + B(t), \\
 \frac{dQ}{dt} = mI - \gamma Q + m_1 E_q - \mu Q, \\
 \frac{dR}{dt} = \gamma Q - \mu R, \\
 \frac{dS_q}{dt} = \frac{bmSI}{N} - \lambda S_q - \mu S_q, \\
 \frac{dE_q}{dt} = \frac{bmIE}{N} - m_1 E_q - \mu E_q,
 \end{cases} \quad (1)$$

其中模型中所有参数均大于 0.

1.3 模型归一化与模型分析

考虑离散输入病例的情况下,无法获得模型的基本再生数.现不考虑输入病例,对上述模型进行分析.首先令

$$S = \frac{S}{N}, E = \frac{E}{N}, I = \frac{I}{N}, Q = \frac{Q}{N}, R = \frac{R}{N}, S_q = \frac{S_q}{N}, E_q = \frac{E_q}{N},$$

对模型进行归一化处理,归一化后的模型为

$$\begin{cases}
 \frac{dS}{dt} = \mu - \beta SE - \beta_1 SI - bmSI + \lambda S_q - \mu S, \\
 \frac{dE}{dt} = \beta SE + \beta_1 SI - \delta E - bmIE - \mu E, \\
 \frac{dI}{dt} = \delta E - mI - \mu I, \\
 \frac{dQ}{dt} = mI - \gamma Q + m_1 E_q - \mu Q, \\
 \frac{dR}{dt} = \gamma Q - \mu R, \\
 \frac{dS_q}{dt} = bmSI - \lambda S_q - \mu S_q, \\
 \frac{dE_q}{dt} = bmIE - m_1 E_q - \mu E_q.
 \end{cases} \quad (2)$$

该模型的正不变集为

$$D_1 = \{ (S, E, I, Q, R, S_q, E_q) \mid 0 \leq S, E, I, Q, R, S_q, E_q \leq 1, \\
 0 \leq S + E + I + Q + R + S_q + E_q \leq 1 \}.$$

易得模型(2)有且仅有一个无病平衡点 $M_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

利用下一代矩阵^[14]计算该模型的基本再生数.对于模型(2),其对应的转移矩阵与感染矩阵分别为

$$F = \begin{pmatrix} \beta & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \delta + \mu & 0 \\ -\delta & m + \mu \end{pmatrix}.$$

感染矩阵的逆为

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta + \mu} & 0 \\ \delta & 1 \\ \frac{1}{(\delta + \mu)(m + \mu)} & m + \mu \end{pmatrix},$$

则模型的基本再生数为

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta}{\delta + \mu} + \frac{\beta_1 \delta}{(\delta + \mu)(m + \mu)}.$$

关于模型的正平衡点与无病平衡点有下列定理.

定理 1 当 $R_0 > 1$ 时,模型(2)有且仅有一个正平衡点;当 $R_0 \leq 1$ 时,模型(2)不存在正平衡点.

证明 令模型(2)右端项等于0,则有

$$\begin{cases} \mu - \beta S^* E^* - \beta_1 S^* I^* - bmS^* I^* + \lambda S_q^* - \mu S^* = 0, \\ \beta S^* E^* + \beta_1 S^* I^* - \delta E^* - bmI^* E^* - \mu E^* = 0, \\ \delta E^* - mI^* - \mu I^* = 0, \\ mI^* - \gamma Q^* + m_1 E_q^* - \mu Q^* = 0, \\ \gamma Q^* - \mu R^* = 0, \\ bmS^* I^* - \lambda S_q^* - \mu S_q^* = 0, \\ bmI^* E^* - m_1 E_q^* - \mu E_q^* = 0, \end{cases} \quad (3)$$

解得

$$E^* = \frac{m + \mu}{\delta} I^*, E_q^* = \frac{bm(m + \mu)}{\delta(m_1 + \mu)} (I^*)^2, S^* = \frac{1}{R_0} + \frac{(m + \mu)bmI^*}{\beta(m + \mu) + \beta_1 \delta},$$

$$S_q^* = \frac{bmS^* I^*}{\lambda + \mu}, Q^* = \frac{mI^* + m_1 E_q^*}{\gamma + \mu}, R^* = \frac{\gamma}{\mu} Q^*.$$

令

$$C = \frac{(m + \mu)bm}{\beta(m + \mu) + \beta_1 \delta},$$

则

$$S = \frac{1}{R_0} + CI^*, S_q^* = \frac{bm}{\lambda + \mu} \left(\frac{1}{R_0} + CI^* \right) I^*.$$

将上述求得的 S^*, E^*, S_q^* 代入式(3),可以得到一个关于 I^* 的一元二次方程:

$$\frac{C(\beta(m + \mu)(\lambda + \mu) + \beta_1 \delta(\lambda + \mu) + bm\delta\mu)}{\delta(\lambda + \mu)} (I^*)^2 + \left(\frac{\beta(m + \mu)(\lambda + \mu) + \beta_1 \delta(\lambda + \mu) + bm\delta\mu}{\delta R_0(\lambda + \mu)} + \mu C \right) I^* + \mu \left(\frac{1}{R_0} - 1 \right) = 0.$$

利用 Vieta 定理可以得到,当 $R_0 < 1$ 时,方程有两个负根,即 $I^* < 0$,不满足正不变集的条件;当 $R_0 = 1$ 时,方程有一个零根,一个负根(不满足正不变集的条件);当 $R_0 > 1$ 时,方程有一个正根(满足正不变集的条件),一个负根(不满足正不变集的条件).

由此可得,当 $R_0 > 1$ 时,在正不变集内正平衡点是存在且唯一的;当 $R_0 \leq 1$ 时,在正不变集内不存在正平衡点.

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时,模型(2)在无病平衡点处全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,模型(2)在无病平衡点处不稳定.

证明 令

$$N = F - V = \begin{pmatrix} \beta - \delta - \mu & \beta_1 \\ \delta & -m - \mu \end{pmatrix}.$$

定义 $s(N)$ 为矩阵 N 的最大特征值的实部,因此 $s(N)$ 是矩阵 N 的一个具有正特征向量的简单特征值^[15].由文献[14]中的定理 2,有如下不等式成立:

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow s(N) > 0, R_0 < 1 \Leftrightarrow s(N) < 0.$$

要证明无病平衡点 $M_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 的局部稳定性,则模型(2)在 M_0 处的 Jacobi 矩阵的所有特征值均具有负实部,该 Jacobi 矩阵为

$$J|_{M_0} = \begin{pmatrix} N & \mathbf{0} \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\beta & -\beta_1 - bm \\ 0 & bm \\ 0 & m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma - \mu & 0 & m_1 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 - \mu \end{pmatrix}.$$

易得

$$s(J_2) = \max \{ -\mu, -\mu, -m_1 - \mu, -\gamma - \mu, -\lambda - \mu \} < 0.$$

若 $R_0 < 1$,则 $s(N) < 0$,于是有 $s(J|_{M_0}) < 0$,则模型(2)在无病平衡点 M_0 处是局部渐近稳定的.若 $R_0 > 1$,则 $s(N) > 0$,于是有 $s(J|_{M_0}) > 0$,则模型(2)在无病平衡点 M_0 处是不稳定的.

令 $\mathbf{y} = (E, I)^T$,则由模型(2)可得

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} \leq (\mathbf{F} - \mathbf{V})\mathbf{y}.$$

设非负矩阵 $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$ 关于特征值 $\rho(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}) = R_0$ 的左特征向量为 \mathbf{a} 且有 $\mathbf{a} > \mathbf{0}$,即 $\mathbf{a}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{F} = R_0\mathbf{a}^T$,故可定义 Lyapunov 函数为

$$L = \mathbf{a}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}.$$

于是有

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{a}^T\mathbf{V}^{-1} \frac{d\mathbf{y}}{dt} \leq \mathbf{a}^T\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{V})\mathbf{y} = \mathbf{a}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{y} - \mathbf{a}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{y} \leq (R_0 - 1)\mathbf{a}^T\mathbf{y}.$$

因此,当 $R_0 < 1$ 时,当且仅当 $\mathbf{y} = \mathbf{0}(E = 0, I = 0)$,等式 $dL/dt = 0$ 成立,其他情况下有 $dL/dt < 0$ 成立,所以由 LaSalle 不变集原理^[16]可得无病平衡点 M_0 在正不变集 D_1 内是全局渐近稳定的.即当 $R_0 < 1$ 时,传染病不会发展成为地方病.

当 $R_0 > 1$ 时,由于 $\mathbf{y} > \mathbf{0}$,于是有 $dL/dt > 0$,即在正不变集 D_1 内存在 M_0 的一个小区间使得 $dL/dt > 0$ 成立.故当 $R_0 > 1$ 时,在正不变集 D_1 内接近 M_0 的解会远离 M_0 ,因此无病平衡点 M_0 不稳定.

2 数值模拟

2.1 实时再生数

上一节已经通过理论计算得到在不考虑输入病例的情况下的基本再生数 R_0 ,但 R_0 通常用于估计传染病在早期的传播能力.为了制定更为合理有效的疫情防控策略,达到及时遏制传染病流行的目的,需要一个能够实时反映传染病在人群中传播能力的指标,即实时再生数 R_t .实时再生数 R_t 指的是在 t 时刻平均一个发病病例所能导致的新发病例数, t 为时间单位(小时、天、周等).若 $R_t < 1$,则表示继续维持当前的防控策略可以逐渐控制传染病的流行,传染病将不会持续扩散;若 $R_t > 1$,则表示当前的防控策略不足以控制传染病的传播,防控策略需要优化和加强.本小节将从统计分析山西省早期发病数据的角度来评估防控策略的有效性.

为了量化传染病传播随时间的变化,假设个体一旦感染,则由概率分布 p_s 可以给出其可能的感染性,其中 s 指其感染后的时间,其感染性只与 s 有关,与 t (日历时间)无关^[13].由于从山西省的公开数据中可获得的 COVID-19 的序列间隔对子(一个感染者的发病时间和其被感染者的发病时间称为一个序列间隔对子)较

少,故这里采用文献[6]中的序列间隔分布数据.根据该序列间隔分布估计参数可得到分布 p_s 的估计值,从而实时再生数可以通过 t 时刻产生的新感染的数量 I_t 与 t 时刻受感染的个体的总感染性 $\sum_{s=1}^t I_{t-s} p_s$ 的比率来估计,即每个感染个体在保持 t 时刻的条件不变的情况下将要感染的二代病例的平均数^[17].故实时再生数可以表示为

$$R_t = \frac{E[I_t]}{\sum_{s=1}^t I_{t-s} p_s},$$

其中 $E[I_t]$ 表示 I_t 的数学期望.

基于已有的发病数据利用 R 语言软件中的 EpiEstim 包,基于 Bayes 框架,对山西省早期的 R_t 进行计算. R_t 的计算主要包含两方面内容:数据准备和计算.由于山西省早期存在持续的输入病例及由输入病例导致本地病例的情况,故数据需要整理为三列,即发病时间(症状出现时间)、每天的输入病例数和每天的本地病例数.导入整理好的数据后利用文献[6]中的序列间隔分布参数即可计算 R_t . R_t 的计算结果如图 2 所示,其中黑色实线表示 R_t 的均值,红色虚线对应的时间点为 2020 年 1 月 25 日,蓝色虚线对应的时间点为 2020 年 1 月 26 日,两条绿色曲线表示 R_t 95% 的置信区间线.

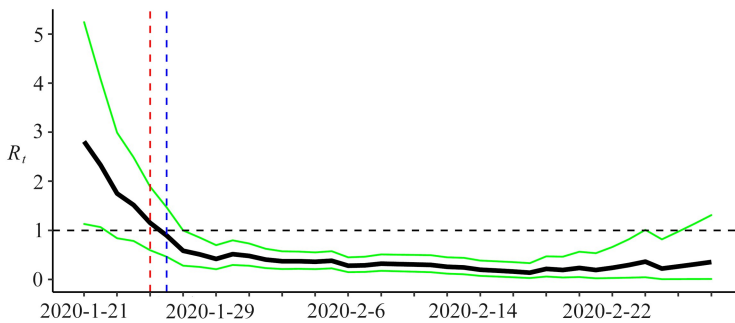


图 2 实时再生数

Fig. 2 Real-time reproduction number

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

利用文献[17]中的防控策略的控制效能来判断山西省早期防控策略的有效性,控制效能公式如下:

$$\varepsilon = \frac{R_{t_0} - 1}{t_1 - t_0},$$

其中 t_0 表示讨论时间范围的初始时刻(图 2 中的 2020 年 1 月 21 日), t_1 表示使得 $R_t < 1$ 始终成立的最小时刻.从图中可以看到,存在 t_1 (图 2 中的 2020 年 1 月 26 日)使得当 $t \geq t_1$ 时始终有 $R_t < 1$,并且存在 $t_0 < t < t_1$ 使得 $R_t > 1$,这表明山西省早期的 COVID-19 疫情得到了有效控制,即防控策略是有效的.通过控制效能公式,可以得到山西省早期的控制效能约为 0.36.

山西省有效再生数的下降与其早期的防控策略是密切相关的.例如山西省于 2020 年 1 月 25 日 18 时启动重大公共卫生事件一级响应,并在此基础上实行最严格的科学防控措施,严把入口关、严把医治关、严把扩散关,切实做好疫情防输入、防输出、防扩散工作^[18],从而使得其有效再生数于 2020 年 1 月 26 日以后均小于 1.

2.2 拟合结果

本小节将利用本文中的模型和山西省 COVID-19 数据进行数值仿真.首先,假设易感者仓室的初始值是山西省 2019 年国民经济和社会发展统计公报公布的结果,年末全省常住人口为 3 729.22 万人^[19],即 $S(1) = 3.729\ 22 \times 10^7$,由于在 1 月 14 日时山西省虽包含两例输入病例,但并无本地病例,故 $E(1) = 0, I(1) = 0$,其他几个仓室的初始值均为 0,即 $Q(1) = 0, R(1) = 0, S_q(1) = 0, E_q(1) = 0$.通过山西省部分病例从发病到确诊的时间间隔,可以得到病例发病到确诊的平均时长为 5.792 天,即从发病到确诊的概率约为 0.173,则 $m = 0.173$,假设隔离后的确诊概率 $m_1 = m = 0.173$.

根据 2019 年年末山西省人口的年死亡率为 0.005 85^[19],可以假设山西省人口的日死亡率为 0.005 85/365,即 $\mu = 0.005 85/365$; 该病的潜伏期的平均数为 5.2 天^[6],故考虑潜伏者从染病到发病的概率为 1/5.2,即 $\delta = 1/5.2$; 根据山西省数据,截至 2020 年 3 月 5 日 24 时,累计追踪到密切接触者 4 166 人,累计确诊病例 133 例^[20],可以得到一个确诊病例的平均密切接触者为 31 人,即 $b = 31$; 由于实际情况发病病例存在隔离,依据当时的防控策略,出现症状的染病者需要居家隔离 14 天,因此假设发病者接触传染概率是潜伏者接触传染概率的 1/14,即 $\beta_1 = \beta/14$. 此时本模型只有一个待估参数 β . 运用基于 Metropolis-Hastings 算法的 Markov 链 Monte-Carlo (MCMC) 进行参数估计,可以得到参数 β 的均值为 0.062 7,标准差为 0.001 6,参数的 Markov 链和直方图见图 3.

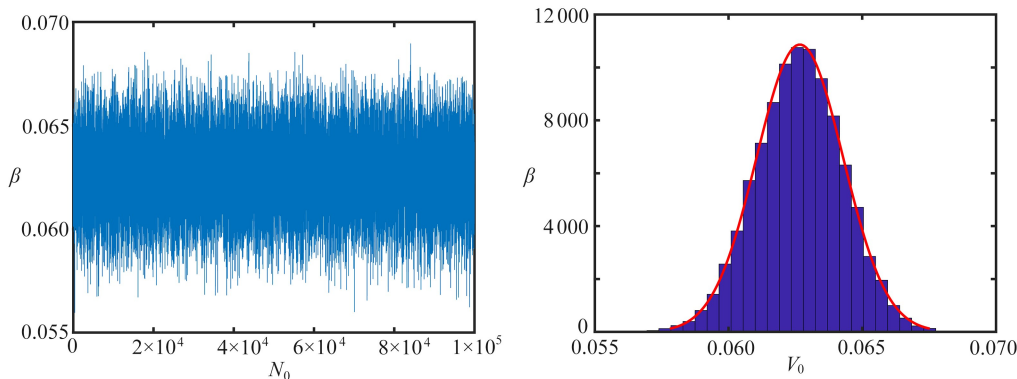


图 3 基于 MH 算法的 MCMC 参数估计 (100 000 次拟合结果)

Fig. 3 Parameter estimation of MCMC based on the MH algorithm (100 000 fitting results)

图 4 给出了基于模型 (1) 山西省累计发病病例与模型解的拟合结果,拟合图包含了模型 10 000 次 Monte-Carlo 随机模拟的均值以及 95% 的置信区间,由拟合图可以看出理论解和实际数据非常吻合,这也从侧面验证了模型建立的合理性.

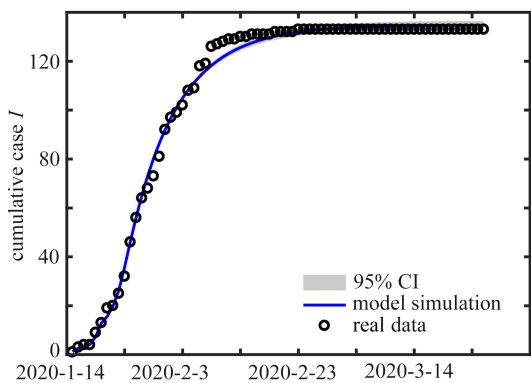


图 4 山西省累积发病病例拟合结果

Fig. 4 Fitting results of cumulative cases in Shanxi province

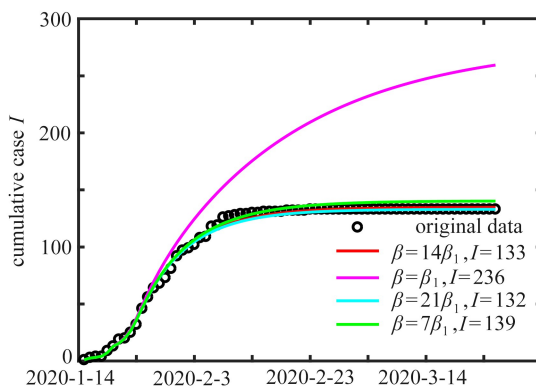


图 5 发病病例隔离天数

Fig. 5 Isolation days for cases

2.3 防控措施分析

上一小节从数据的宏观角度说明了山西省早期的防控策略的有效性,这一小节将从模型拟合的角度说明山西省早期防控策略的有效性.

首先,通过考虑发病者接触传染率的变化来考虑隔离天数对疾病最终规模的影响,如图 5 所示.在发病者不隔离的情况下(隔离天数为零,发病者的接触传染率与潜伏者的接触传染率相同),疾病的最终规模会增加 77.44%;在发病者隔离天数远远大于 14 天时(这里假设隔离 21 天),疾病最终规模仅仅会减少 0.75%,这表明在疫情早期阶段隔离 14 天的防控策略是合理的.假设早期发病者仅隔离 7 天,则疾病最终规模会增加 4.51%,这意味着在山西省早期疫情期间,发病者隔离 14 天的防控策略要优于发病者隔离 7 天的防控策略.其次,武汉封城对山西省早期疫情的影响不可忽视.图 6 给出了武汉封城时间的影响,通过数值拟合可以

得到,若武汉封城提前两天,疾病最终规模将会减少 24.06%;若武汉封城推迟两天,疾病最终规模则会增加 48.87%,这表明在山西省疫情早期,武汉封城时间越早,疾病的最终规模则会越小。

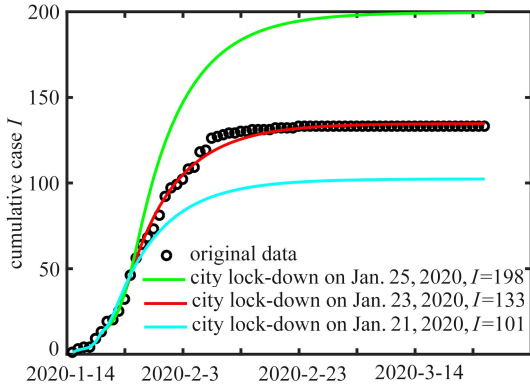


图 6 封城时间

Fig. 6 City lock-down time

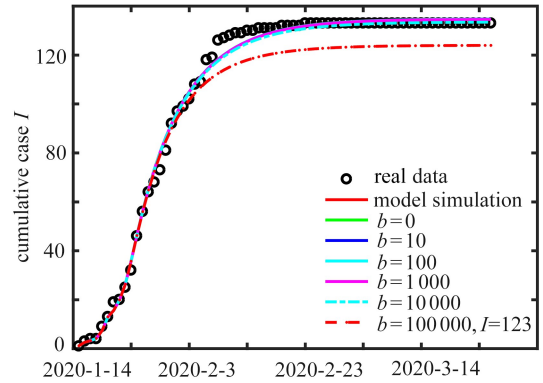


图 7 追踪到的接触者人数

Fig. 7 Numbers of contacts traced

最后,考虑追踪到的接触者人数对疾病最终规模的影响.分别令接触者人数 $b = 0, 10, 100, 1\ 000, 10\ 000, 100\ 000$, 结果见图 7.在追踪到的人数较少时,由于确诊病例占总人口的比例较小,故对模型基本没有影响;而在追踪到的接触者人数达到 10 万人时,疾病的最终规模会减小为原来的 92.48%,这表明追踪到大量接触者可以有效控制疾病的传播,这与国内部分地区大规模人口核酸检测的事实相吻合.因此,在传染病的潜伏期内,及时发现感染病例对控制疾病传播具有重要意义。

通过上述分析可知,山西省早期的防控策略可以有效抑制 COVID-19 疫情的传播.其中武汉封城策略的实施截断了山西省输入病例的来源,隔离发病病例,减少了造成传染病传播的传染源,跟踪隔离确诊病例的接触者,有效避免了其在本地区人群的代际传播.在当前未完成全民疫苗接种和局部聚集性疫情发生的情况下,加大人口的跟踪隔离与核酸检测可有效减缓疫情的大范围传播。

3 结 论

本文基于 COVID-19 在山西省的实际传播情况,建立了具有输入病例和跟踪隔离确诊病例的密切接触者的动力学模型.在不考虑输入病例的情况下,分析了模型的动力学行为,得到当基本再生数 (R_0) 小于 1 时,传染病不会发展成为地方病;当基本再生数 (R_0) 大于 1 时,模型在其正不变集内有且仅有一个地方病平衡点。

利用已有的山西省 COVID-19 数据,基于 R 语言的 EpiEstim 包,计算实时再生数,通过文献[17],得到山西省的早期控制效能约为 0.36,从宏观角度验证了山西省早期的疫情防控措施是有效的.进一步利用模型的数值拟合验证了单个防控策略的有效性:对比染病者分别隔离 14 天、0 天、21 天、7 天的染病规模,得到染病者隔离 14 天的防控措施是合理有效的;通过将武汉封城时间提前、推后两天,得到武汉封城时间越早,染病规模越小;分析跟踪隔离确诊病例的接触者对染病规模的影响,由于确诊病例占山西省总人口的比例较小,因此在跟踪隔离到的接触者的数量较少时,对疾病最终规模基本没有影响,但在追踪隔离到大量接触者时,染病者的最终规模会变小.这与聚集性疫情发生的情况下大规模核酸检测及时隔离核酸阳性病例的事实相吻合。

相比于文献[13]中的模型,本文考虑了跟踪隔离确诊病例的密切接触者,在此种情况下,不需要数据分段拟合就可达到与文献[13]相近的结果,这说明本模型是对文献[13]中模型的改进,同时也表明跟踪隔离确诊病例的接触者的疫情防控策略是有效的.在当前面临外防输入、内防扩散的情况下,及时有效地跟踪隔离可以很大程度上减缓疫情的传播。

不同于之前关于重庆、天津的研究^[21],本文考虑了确诊病例的接触者中染病者的隔离,但仍有许多不足之处需要改进.由于在本文研究过程中尚未考虑无症状感染者对 COVID-19 传播的影响,因此在当前形势下,研究无症状感染者在传染病传播中的影响以及大范围内进行核酸检测对现阶段中国本地疫情的防控具有积

极作用,在模型中考虑无症状感染者与人群的大规模核酸检测还有待研究。

参考文献(References):

- [1] 世界卫生组织. 2019 冠状病毒病(COVID-19) 专题问答[EB/OL]. (2020-10-12) [2021-05-31]. <https://www.who.int/zh/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/question-and-answers-hub/q-a-detail/coronavirus-disease-covid-19>. (World Health Organization. Corona virus disease 2019 (COVID-19) questions and answers [EB/OL]. (2020-10-12) [2021-05-31]. <https://www.who.int/zh/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/question-and-answers-hub/q-a-detail/coronavirus-disease-covid-19>. (in Chinese))
- [2] 中华人民共和国国家卫生健康委员会. 中华人民共和国国家卫生健康委员会公告[EB/OL]. (2020-01-20) [2021-05-31]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/zhengcwj/202001/44a3b8245e8049d2837a4f27529cd386.shtml>. (National Health Commission of the People's Republic of China. Announcement of National Health Commission of the People's Republic of China [EB/OL]. (2020-01-20) [2021-05-31]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/zhengcwj/202001/44a3b8245e8049d2837a4f27529cd386.shtml>. (in Chinese))
- [3] 中华人民共和国国家卫生健康委员会. 国家卫生健康委关于修订新型冠状病毒肺炎英文命名事宜的通知[EB/OL]. (2020-02-08) [2021-05-31]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/zhengcwj/202002/18c1bb43965a4492907957875de02ae7.shtml>. (National Health Commission of the People's Republic of China. Notification from the National Health Commission on the revision of the English nomenclature of COVID-19[EB/OL]. (2020-02-08) [2021-05-31]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/zhengcwj/202002/18c1bb43965a4492907957875de02ae7.shtml>. (in Chinese))
- [4] 世界卫生组织. 世卫组织总干事在 2020 年 2 月 11 日举行的 2019 新型冠状病毒媒体通报会上的讲话[EB/OL]. (2020-02-11) [2021-05-31]. <https://www.who.int/zh/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-remarks-at-the-media-briefing-on-2019-ncov-on-11-february-2020>. (World Health Organization. Statement by the director-general of WHO at the novel coronavirus 2019 media briefing, 11 February 2020[EB/OL]. (2020-02-11) [2021-05-31]. <https://www.who.int/zh/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-remarks-at-the-media-briefing-on-2019-ncov-on-11-february-2020>. (in Chinese))
- [5] 中华人民共和国国家卫生健康委员会. 国家卫生健康委关于修订新型冠状病毒肺炎英文命名事宜的通知[EB/OL]. (2020-02-22) [2021-05-31]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/zhengcwj/202002/6ed7614bc35244cab117d5a03c2b4861.shtml>. (National Health Commission of the People's Republic of China. Notification from the National Health Commission on the revision of the English nomenclature of COVID-19[EB/OL]. (2020-02-22) [2021-05-31]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/zhengcwj/202002/6ed7614bc35244cab117d5a03c2b4861.shtml>. (in Chinese))
- [6] LI Q, GUAN X, WU P, et al. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus-infected pneumonia[J]. *New England Journal of Medicine*, 2020, **382**(13): 1199-1207.
- [7] 李盈科, 赵时, 楼一均, 等. 新型冠状病毒肺炎的流行病学参数与模型[J]. 物理学报, 2020, **69**(9): 090202. (LI Yingke, ZHAO Shi, LOU Yijun, et al. Epidemiological parameters and models of coronavirus disease 2019[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, **69**(9): 090202. (in Chinese))
- [8] TANG B, WANG X, LI Q, et al. Estimation of the transmission risk of the 2019-nCoV and its implication for public health interventions[J]. *Journal of Clinical Medicine*, 2020, **9**(2): 462.
- [9] 曹文静, 刘小菲, 韩卓, 等. 新型冠状病毒肺炎疫情确诊病例的统计分析及自回归建模[J]. 物理学报, 2020, **69**(9): 090203. (CAO Wenjing, LIU Xiaofei, HAN Zhuo, et al. Statistical analysis and autoregressive modeling of confirmed coronavirus disease 2019 epidemic cases[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, **69**(9): 090203. (in Chinese))
- [10] 王国强, 张烁, 杨俊元, 等. 耦合不同年龄层接触模式的新冠肺炎传播模型[J]. 物理学报, 2021, **70**(1): 010201. (WANG Guoqiang, ZHANG Shuo, YANG Junyuan, et al. Study of coupling the age-structured contact patterns to the COVID-19 pandemic transmission[J]. *Acta Physica Sinica*, 2021, **70**(1): 010201. (in Chinese))
- [11] CHONG K C, CHENG W, ZHAO S, et al. Monitoring disease transmissibility of 2019 novel coronavirus disease in Zhejiang, China[J]. *International Journal of Infectious Diseases*, 2020, **96**: 128-130.

- [12] 孙皓宸, 刘肖凡, 许小可, 等. 基于连续感染模型的新冠肺炎校园传播与防控策略分析[J]. 物理学报, 2020, **69**(24): 240201. (SUN Haochen, LIU Xiaofan, XU Xiaoke, et al. Analysis of COVID-19 spreading and prevention strategy in schools based on continuous infection model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, **69**(24): 240201. (in Chinese))
- [13] LI M T, SUN G Q, ZHANG J, et al. Analysis of COVID-19 transmission in Shanxi province with discrete time imported cases[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2020, **17**(4): 3710-3720.
- [14] VAN DEN DREESCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, **180**(1/2): 29-48.
- [15] SMITH H L, WALTMAN P. *The Theory of the Chemostat*[M]. Cambridge University Press, 1995.
- [16] LASALLE J P. *The Stability of Dynamical Systems*[M]. Philadelphia: SIAM, 1976.
- [17] 胡羲, 王开发, 王稳地. 2019 新型冠状病毒肺炎疫情传播能力及疫情控制效能的地域差异分析[J]. 应用数学学报, 2020, **43**(2): 227-237. (HU Yi, WANG Kaifa, WANG Wendi. Analysis of transmissibility of COVID-19 and regional differences in disease control[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2020, **43**(2): 227-237. (in Chinese))
- [18] 山西省卫生健康委员会. 山西省启动重大突发公共卫生事件一级响应[EB/OL]. (2020-01-25)[2021-05-31]. <http://wjw.shanxi.gov.cn/wsyjzscx/25056.hrh>. (Health Commission of Shanxi Province. Shanxi province has launched a level 1 response to major public health emergencies[EB/OL]. (2020-01-25)[2021-05-31]. <http://wjw.shanxi.gov.cn/wsyjzscx/25056.hrh>. (in Chinese))
- [19] 山西省人民政府. 山西省 2019 年国民经济和社会发展统计公报[EB/OL]. (2020-03-09)[2021-05-31]. http://www.shanxi.gov.cn/sj/sjjd/202003/t20200309_768836.shtml. (The People's Government of Shanxi Province. National economic and social development statistical bulletin of Shanxi province in 2019[EB/OL]. (2020-03-09)[2021-05-31]. http://www.shanxi.gov.cn/sj/sjjd/202003/t20200309_768836.shtml. (in Chinese))
- [20] 山西省卫生健康委员会. 2020 年 3 月 6 日山西省新型冠状病毒肺炎疫情情况[EB/OL]. (2020-03-06)[2021-05-31]. <http://wjw.shanxi.gov.cn/wjyw102/25190.hrh>. (Health Commission of Shanxi Province. COVID-19 epidemic situation in Shanxi province, March 6, 2020[EB/OL]. (2020-03-06)[2021-05-31]. <http://wjw.shanxi.gov.cn/wjyw102/25190.hrh>. (in Chinese))
- [21] LI M T, CUI J, ZHANG J, et al. Transmission analysis of COVID-19 with discrete time imported cases: Tianjin and Chongqing as cases[J]. *Infectious Disease Modelling*, 2021, **6**(1): 618-631.