

### 基于参数化水平集法的材料非线性子结构拓扑优化

雷 阳, 封建湖

### Topology Optimization of Nonlinear Material Structures Based on Parameterized Level Set and Substructure Methods

LEI Yang and FENG Jianhu

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420090>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 基于磨光反演映射的拓扑优化ICM方法

An ICM Method for Topology Optimization Based on Polished Inverse Mapping

应用数学和力学. 2018, 39(4): 424-441

#### 拓扑优化技术在抑制流体晃荡中的数值模拟研究

Numerical Simulation of Topology Optimization Technique for Tank Sloshing Suppression

应用数学和力学. 2021, 42(1): 49-57

#### 基于特征正交分解的材料微结构参数化表征模型及等效性能优化设计

A POD-Based Parameterization Model for Material Microstructure Representation and Its Application to Optimal Design of Material Effective Mechanical Properties

应用数学和力学. 2017, 38(7): 727-742

#### 径向基函数参数化翼型的气动力降阶模型优化

Optimization of RBF Parameterized Airfoils With the Aerodynamic ROM

应用数学和力学. 2019, 40(3): 250-258

#### 基于期望函数的土遗址锚固参数组合优化方法

A Composite Optimization Method for Anchorage Parameters of Rammed Earth Sites Based on Desirability Functions

应用数学和力学. 2019, 40(6): 650-662

#### 可变序结构下向量优化中的一个新非线性标量化函数及其应用

A New Nonlinear Scalarization Function and Its Applications in Vector Optimization With Variable Ordering Structures

应用数学和力学. 2020, 41(3): 329-338



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 基于参数化水平集法的材料非线性子结构拓扑优化\*

雷 阳, 封建湖

(长安大学 理学院, 西安 710064)

**摘要:** 针对利用传统水平集法进行非线性结构拓扑优化计算过程复杂及计算效率低等问题, 将参数化水平集方法引入材料非线性结构拓扑优化中. 通过全局径向基函数插值初始水平集函数, 建立了以插值系数为设计变量、结构的应变能最小为目标函数、材料用量为约束条件的材料非线性结构拓扑优化模型, 利用有限元分析对材料非线性结构建立平衡方程, 并用迭代法求解. 同时, 采用子结构法划分设计区域为若干个子区域, 将全自由度平衡方程的求解分解为缩减的平衡方程和多个子结构内部位移的求解, 减小了计算成本. 算例表明, 这种处理非线性关系的方法可以在保证数值稳定的同时提高计算效率, 得到边界清晰、结构合理的拓扑优化构形.

**关键词:** 拓扑优化; 参数化水平集法; 非线性材料; 子结构法

**中图分类号:** O302      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.420090

## Topology Optimization of Nonlinear Material Structures Based on Parameterized Level Set and Substructure Methods

LEI Yang, FENG Jianhu

(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China)

**Abstract:** In order to overcome the problems of complicated calculation process and lower computational efficiency of the traditional level set method (LSM), for nonlinear structure topology optimization, a parameterized level set method (PLSM) was introduced. Through interpolation of the initial level set function with the globally supported radial basis function (GSRBF), a nonlinear material structure topology optimization model was established with the interpolation coefficient as the design variable, the minimum strain energy of the structure as the objective function, and the material amount as the constraint condition. The equilibrium equation for the nonlinear material structure was established by finite element analysis, and solved with the iterative method. In addition, the substructure method (i.e. the domain decomposition method) was used to divide the design area into several sub-areas, and the solution to the full degree of freedom equilibrium equation was decomposed into a set of solutions of reduced equilibrium equations and solutions of multiple substructures' internal displacements, which could reduce the computation cost. Examples show that, this method can ensure the numerical stability, improve the computational efficiency, and obtain the topology optimization configuration with clear boundaries and reasonable structures.

**Key words:** topology optimization; parameterized level set method; nonlinear material; substructure method

\* 收稿日期: 2021-04-07; 修订日期: 2021-05-19

基金项目: 陕西省自然科学基金(2018JQ1027); 中央高校基本科研业务费(300102120107)

作者简介: 雷阳(1997—), 女, 硕士生(E-mail: [leiyang\\_199703@163.com](mailto:leiyang_199703@163.com));

封建湖(1960—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: [jhfeng@chd.edu.cn](mailto:jhfeng@chd.edu.cn)).

引用格式: 雷阳, 封建湖. 基于参数化水平集法的材料非线性子结构拓扑优化[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(11): 1150-1160.

## 引 言

拓扑优化是结构设计领域中最具挑战的研究, 广泛应用于各个领域<sup>[1]</sup>, 各种优化方法层出不穷. 水平集法 (level set method) 是学者 Osher<sup>[2]</sup> 提出的一种追踪运动界面的数值方法, 它用高一维几何空间  $R^{N+1}$  的水平集函数的零水平集来描述几何空间  $R^N$  中的运动界面, 所有边界的几何信息都隐含于水平集函数的零水平集中, 可以轻松地得到光滑的结构边界. 但是传统的水平集方法在求解的过程中存在很多数值问题, 为了解决这些问题, 研究人员提出了参数化水平集法, 它将偏微分方程在时间和空间上解耦成一组常微分方程<sup>[3]</sup>, 函数的演化过程就转化为插值系数的更新过程, 进而结合优化算法, 得到最优的拓扑构型.

近几年, 拓扑优化发展迅速, 但大多数的研究都是基于线弹性材料来计算的, 有关非线性问题的研究却较少. 而在很多重要的实际问题中, 线性关系不能成立, 因此为了追求更加贴合实际的设计, 需要不断努力将拓扑优化扩展到材料非线性领域. 在最近的研究中, 学者们在非线性领域取得了一定的进展. Wang 等<sup>[4]</sup> 研究了有限变形条件下材料非线性性能的优化设计问题. Xia 等<sup>[5]</sup> 在双向渐进结构优化 (bi-directional evolutionary structural optimization, BESO) 法的基础上, 提出了多尺度弹塑性结构的非线性拓扑优化模型. Chen 等<sup>[6]</sup> 采用 BESO 法, 提出了弹塑性多孔材料微结构拓扑优化方法.

基于非线性结构拓扑优化的研究, 学者们大多采用变密度惩罚 (solid isotropic material with penalization, SIMP) 法和 BESO 法, 得到的拓扑构型往往存在不同程度的锯齿形边界和棋盘格式等问题. 为了消除这些影响, 使结果便于后续处理, 引入参数化水平集法来处理非线性结构. 此外, 在有限元计算中, 非线性方程的迭代求解过程会消耗大量的时间. 为了进一步提高计算速率, 引入子结构法.

子结构法, 又称 Guyan 缩减法<sup>[7]</sup> 或区域分解法. 它首先将要计算分析的物体划成若干个子结构, 分别求解再进行整体组装, 子结构中的方程由于阶数较低, 一般比较容易求解. 该方法最早由德国数学家 Schwarz 提出, 且国内外计算数学家们对其做了大量的研究及应用工作. 例如, 封建湖在文献 [8] 中采用区域分裂法进行超音进气道内外流场的计算. 在最近的研究中, 学者们主要将其用于大规模有限元问题及复杂力学环境下的问题, 以便减小计算成本、提高计算精度. 例如, Mahdiabadi 等<sup>[9]</sup> 将子结构方法应用于几何非线性结构动力学系统, 显著地提高了计算精度. 近几年, 子结构法也被广泛应用于拓扑优化中. Zhao 等<sup>[10]</sup> 提出了一种基于子结构的飞机机翼结构系统材料优化布局方法, 利用 SIMP 法求解各拓扑设计单元的材料布局. Wu 等<sup>[11]</sup> 提出了一种用于分层格结构设计的拓扑优化方法, 并发展了带惩罚的简化子结构的近似模型. Fu 等<sup>[12]</sup> 提出了一种具有子结构的周期结构拓扑优化方法, 大大提高了设计效率.

由以上研究可知, 在大型复杂问题中, 子结构法可以有效地减少计算量, 提高计算效率. 本文将子结构法引入基于参数化水平集法的非线性结构拓扑优化中, 减少计算机内存, 减少非线性结构有限元的计算时间, 从而提高拓扑优化的计算效率.

## 1 参数化水平集法

在传统水平集方法中, 动态结构界面隐式地嵌入高一维水平集函数  $\Phi(X, t)$  的零水平集中, 二维结构边界及相应的水平集函数如图 1 所示, 二维结构的水平集函数定义如下:

$$\begin{cases} \Phi(X, t) > 0, & \forall X \in \Omega \setminus \partial\Omega, & \text{inside,} \\ \Phi(X, t) = 0, & \forall X \in \partial\Omega, & \text{boundary,} \\ \Phi(X, t) < 0, & \forall X \in D \setminus \Omega, & \text{outside,} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $X = (x, y)$  是定义域  $D$  内的任意一点,  $\partial\Omega$  是实体区域  $\Omega$  的边界, 水平集函数  $\Phi(X, t)$  通常取为符号距离函数<sup>[13]</sup>.

在传统的水平集方法中, 使用下面的演化方程来更新水平集函数:

$$V_N = v_N(X, t) \cdot \mathbf{n}(X, t) = -V \cdot \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_N |\nabla\Phi| = 0, \quad (3)$$

其中,  $V = v_N(X, t)$  为闭曲线上的法向速度分量,  $\mathbf{n}(X, t) = -\nabla\Phi/|\nabla\Phi|$  为闭曲线上的单位外法向量,  $t$  表示伪时间. 称

式 (3) 为水平集方程, 它是一个 Hamilton-Jacobi 方程, 描述了设计速度场引起的界面运动, 通常采用有限差分法来求解. 在求解过程中, 由于水平集函数通常取为符号距离函数, 因此需要不断地进行重新初始化, 以避免水平集函数的零水平集不再是结构边界曲线<sup>[13]</sup>. 且演化过程受到差分格式稳定性条件的限制, 导致传统水平集方法计算量较大<sup>[14]</sup>. 此外, 传统的水平集法在演化过程中无法生成新的孔洞, 优化结构依赖初始拓扑<sup>[15]</sup>. 为了克服这些求解的困难, 提高数值稳定性和求解效率, 引入参数化水平集法.

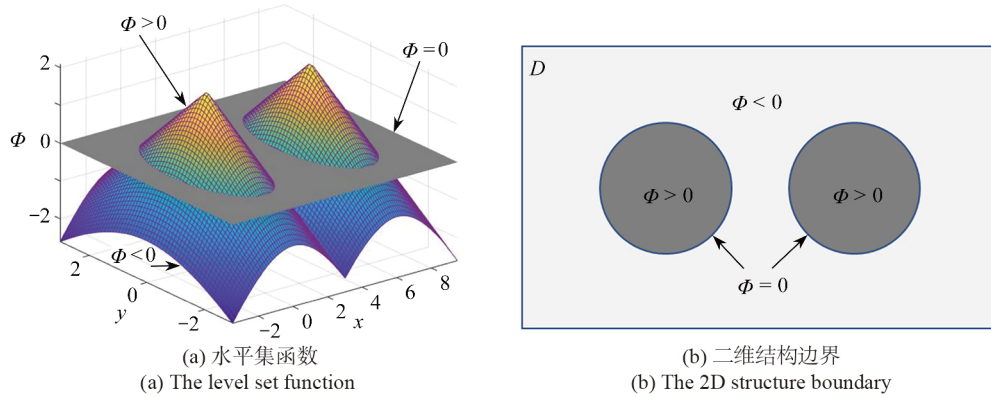


图 1 二维结构边界及相应的水平集函数

Fig. 1 The 2D structure boundary and the corresponding level set function

水平集函数的参数化是对其大规模散乱数据进行拟合, 通常采用径向基函数 (radial basis function, RBF) 或 B 样条曲线来拟合水平集函数<sup>[14]</sup>. 径向基函数计算效率高、函数简单、收敛性好、存储方便, 被广泛应用于几何建模和图像处理等多个领域. 它用简单的一元函数描述多元函数, 对水平集函数进行插值, 并通过改变插值系数间接更新水平集函数, 从而实现边界的演化.

这里, 用全局径向基函数 (globally supported radial basis function, GSRBF) 中的 MQ(multiquadrics) 样条来实现水平集函数的参数化, 即水平集函数  $\Phi(X, t)$  由以  $N$  个固定节点为中心的多个 MQ 样条来表示:

$$\Phi(X, t) = \sum_{i=1}^N g_i(X)\alpha_i(t) + p(X, t), \tag{4}$$

其中,  $g_i(X)$  为第  $i$  个采样点的径向基函数,  $\alpha_i(t)$  为第  $i$  个采样点的径向基函数的插值系数. 使用如下的全局径向基函数  $g_i(X) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + c^2}$ ,  $(x_i, y_i) \in D$ .  $p(X, t)$  是为了保证径向基函数插值位置及精度的一次多项式<sup>[16]</sup>. 在平面问题上, 可表示为

$$p(X, t) = p_0(t) + p_1(t)x + p_2(t)y, \tag{5}$$

其中,  $p_0(t)$ ,  $p_1(t)$  和  $p_2(t)$  分别为多项式  $p(X, t)$  的系数.

由此, 将网格剖分点  $X_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  代入参数化水平集函数  $\Phi(X, t)$ , 可以得到如下的矩阵形式:

$$\mathbf{G}\alpha(t) = \Phi(t), \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_1(X_1) & \dots & g_N(X_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(X_N) & \dots & g_N(X_N) \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t) \quad \dots \quad \alpha_N(t) \quad P_0(t) \quad P_1(t) \quad P_2(t))^T, \tag{8}$$

$$\Phi(t) = (\Phi(X_1, t) \quad \dots \quad \Phi(X_N, t) \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \tag{9}$$

水平集函数也可写为

$$\Phi(X, t) = \mathbf{g}^T(X)\alpha(t), \tag{10}$$

其中

$$\mathbf{g}(X) = (g_1(X) \quad \dots \quad g_N(X) \quad 1 \quad x \quad y)^T. \tag{11}$$

将  $\Phi(X, t)$  代入式 (3) 中的 Hamilton-Jacobi 方程中, 可得

$$\mathbf{g}^T(X) \frac{d\alpha(t)}{dt} - \mathbf{V}_N |\nabla \mathbf{g}^T(X) \alpha(t)| = \mathbf{0}. \quad (12)$$

因此, 原始的时间相关的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程 (3) 被离散成一个控制运动界面的常微分方程组, 即

$$\mathbf{G} \frac{d\alpha}{dt} - \mathbf{B}(\alpha, t) = \mathbf{0}, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{B}(\alpha, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_N(X_1, t) |\nabla \mathbf{g}^T(X_1) \alpha(t)| \\ \vdots \\ \mathbf{V}_N(X_N, t) |\nabla \mathbf{g}^T(X_N) \alpha(t)| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

有关方程 (3) 中  $\mathbf{V}_N$  的计算将在后面介绍.

基于径向基函数的参数化建模可以在优化过程中保持平滑的水平集函数, 而无需重新初始化; 且具有在设计域内部生成新孔的能力, 对初始设计的依赖可以大大减轻, 既保留了传统水平集法的优点, 又简化了优化过程, 提高了计算效率.

## 2 材料非线性分析

在实际工程中, 大部分工程材料的本构关系为非线性, 因此在优化过程中, 应考虑材料非线性. 在本节中, 我们将讨论非线性材料模型在有限元分析中的应用.

为了考虑材料非线性, Jung 等在文献 [17] 中利用二阶 Piola-Kirchhoff 应力张量和 Green-Lagrange 应变张量导出有效应力和应变, 构造了非线性的本构方程. 通过它们之间的一般关系来描述材料的非线性, 从而得到不同位移条件下的刚度矩阵; 进一步采用迭代法, 利用本构方程、平衡方程和几何方程得到结构的位移. 本文采用文献 [17] 的非线性本构方程.

在线性关系中, 平衡方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{u}$  为实际位移,  $\mathbf{P}$  为荷载.

对于式 (15) 中的线性方程组, 由于  $\mathbf{K}$  是常数矩阵, 可以直接求解, 而在非线性关系中, 由于  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{u})$  依赖于未知量  $\mathbf{u}$  则不能直接求解, 因此要进行迭代求解.

在采用迭代法进行非线性分析时, 一次性施加全部的荷载, 然后逐步调整位移, 使以下的基本方程得到满足:

$$\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

假设有某个初始的试探解  $\mathbf{u}^{(0)}$ , 代入上式的  $\mathbf{K}(\mathbf{u})$  中, 可以求得第一个改进的近似解:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}^{(0)})\mathbf{P}, \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(0)})$  是  $\mathbf{u}^{(0)}$  处的刚度矩阵. 重复上述过程, 可得到  $n$  次近似解:

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}^{(n-1)})\mathbf{P}. \quad (18)$$

一直到误差的某种范数小于某个规定的容许小量  $\epsilon^r$ , 即

$$\|e\| = \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\| \leq \epsilon^r. \quad (19)$$

由式 (17) 和式 (18) 可知, 要实施迭代法的计算, 每次迭代都需要计算新的刚度矩阵  $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(n-1)})$ . 刚度矩阵的计算首先采用非线性本构关系 [17], 可以得到非线性条件下的弹性张量:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot q(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (20)$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  是单元应变, 与位移的关系可以表示为  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{B}$  为应变-位移矩阵,  $\mathbf{C}$  是恒定的参考弹性张量. 函数  $q(\boldsymbol{\varepsilon})$  是表示材料特性的函数, 本文中采用幂函数材料模式<sup>[18]</sup>,  $q(\boldsymbol{\varepsilon})$  取为幂函数. 由以上本构关系可得弹性矩阵, 进一步得到单元刚度矩阵, 组装单元刚度矩阵可以得到整体刚度矩阵.

在数值实现的过程中, 刚度矩阵在接近极限状态时可能变得奇异. 因此需要对其进行正则化<sup>[19]</sup>, 即在整体刚度矩阵的每个元素中都加入较小值  $\beta$ . 对材料非线性结构进行有限元分析时, 每次迭代都需要求解平衡方程, 而对于大规模问题, 单元数较多, 整体刚度矩阵过大, 迭代将消耗大量的时间. 为减小有限元计算规模, 提高计算效率和结果的再利用率, 引入子结构法进行有限元分析.

### 3 子结构法

子结构法首先将整体区域划分为多个子结构, 然后在子结构域上进行精细化分, 如图 2 所示.

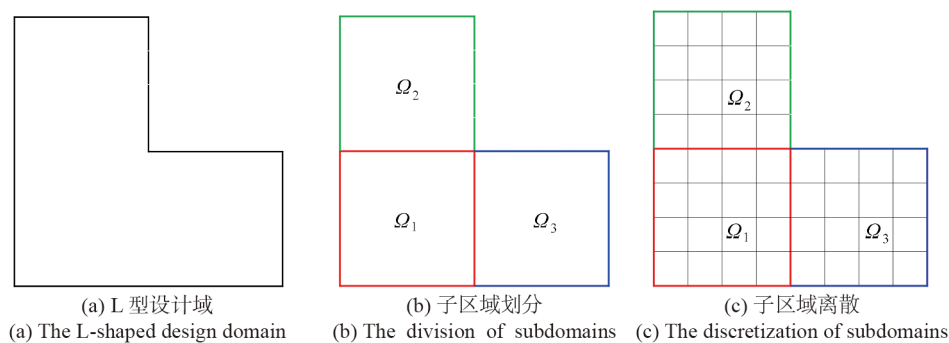


图 2 L 型设计域子结构划分

Fig. 2 Division of substructures of the L-shaped design domain

在求解平衡方程时, 子结构法的基本思想是将设计域  $\Omega$  分解为  $M$  个子区域  $\Omega_i$ , 先求解子区域边界上的数值解, 然后求内部解. 其中, 组成整个离散结构的节点可以分为主节点和从节点, 主节点一般取子结构边界上的节点, 从节点一般为内部的节点. 用下标 “m” 表示边界主节点组成的自由度, “s” 表示内部从节点组成的自由度, 则有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_m \\ \mathbf{U}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_s \end{pmatrix}. \quad (21)$$

由式 (21) 第二行得

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{K}_{ss}^{-1}(\mathbf{P}_s - \mathbf{K}_{sm}\mathbf{U}_m). \quad (22)$$

从节点上的荷载一般为零, 将式 (22) 代入式 (21) 第一行中, 得缩减后的平衡方程为

$$\mathbf{K}_{sub}\mathbf{U}_{sub} = \mathbf{P}_{sub}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{sub} = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}, \\ \mathbf{U}_{sub} = \mathbf{U}_m, \\ \mathbf{P}_{sub} = \mathbf{P}_m, \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{K}_{sub}$ ,  $\mathbf{U}_{sub}$  和  $\mathbf{P}_{sub}$  分别为缩减后的刚度矩阵、位移向量和荷载向量.

子结构法通过求解缩减后的方程 (23), 可得主节点上的位移  $\mathbf{U}_m$ , 将  $\mathbf{U}_m$  代入式 (22) 即可求得从节点的位移  $\mathbf{U}_s$ . 由此可得到结构设计域内所有节点的位移, 计算各种所需的物理量, 完成有限元计算, 从而进一步进行参数化水平集法的拓扑优化, 优化流程如图 3 所示.

采用子结构法计算具有以下优点: 1) 缩小计算规模. 减少运算过程中数据的准备和输入, 以减少单元矩阵的存储量及平衡方程的求解工作量, 降低计算内存的需求. 2) 提高计算效率. 子结构法中将大型结构划分为多个小规模子结构, 子结构之间可独立求解, 且方程阶数较低, 可以加快计算速率. 3) 提高结果的再利用率. 划分为多个子结构的大型复杂问题, 若局部结构发生变化, 只需计算与局部结构有关的子结构<sup>[12]</sup>.

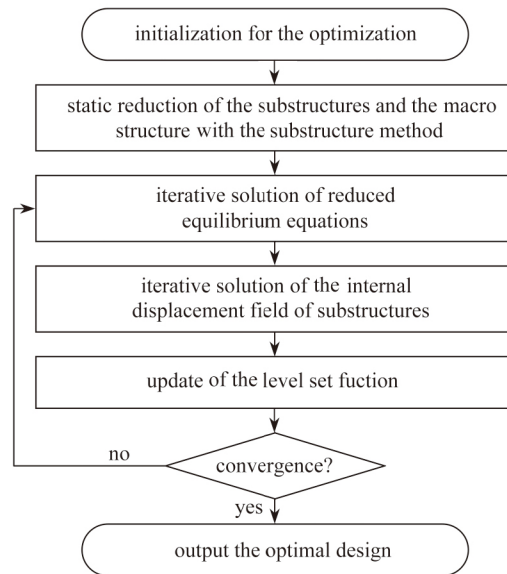


图 3 子结构法材料非线性结构拓扑优化流程图

Fig. 3 The flowchart of nonlinear material structure topology optimization with the substructure method

### 4 最小化问题

结合参数化水平集法, 针对材料非线性结构, 以体积约束为限制条件, 建立了柔度最小化连续体结构拓扑优化模型:

$$\begin{cases} \text{find } \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T, \\ \text{minimize } J(\mathbf{u}, \Phi(\boldsymbol{\alpha})) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{H}(\Phi(\boldsymbol{\alpha})) d\Omega, \\ \text{s.t. } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi(\boldsymbol{\alpha})) = l(\mathbf{v}, \Phi(\boldsymbol{\alpha})), \quad \mathbf{u}|_r = \mathbf{u}_0, \quad \forall \mathbf{v} \in U, \\ G(\Phi(\boldsymbol{\alpha})) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\Phi(\boldsymbol{\alpha})) d\Omega - \eta V \leq 0, \\ \alpha_{i,\min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{i,\max}, \end{cases} \quad (25)$$

其中,  $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别表示实际位移场和虚位移场,  $\mathbf{u}_0$ 为边界上的位移,  $\Phi$ 是以插值系数 $\alpha_i$ 为设计变量的水平集函数,  $J(\mathbf{u}, \Phi(\boldsymbol{\alpha}))$ 为目标函数,  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\varepsilon})$ 为表示非线性材料特性的函数,  $G(\Phi)$ 为体积约束,  $\eta$ 为材料体积分数,  $V$ 为材料体积,  $\mathbf{H}(\Phi)$ 为 Heaviside 函数,  $N$ 为采样点个数,  $\alpha_{i,\max}$ 和 $\alpha_{i,\min}$ 分别为设计变量的上下限。

在平衡条件的弱形式中, 根据虚功原理, 其中 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi)$ 和 $l(\mathbf{v}, \Phi)$ 可表示为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) : \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{v})) \mathbf{H}(\Phi) d\Omega, \quad (26)$$

$$l(\mathbf{v}, \Phi) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \mathbf{H}(\Phi) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{c} \mathbf{v} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| d\Omega, \quad (27)$$

其中,  $\mathbf{f}$ 为体积力,  $\mathbf{c}$ 为边界上的面荷载,  $\delta(\Phi)$ 为 Heaviside 函数的导数 (Dirac 函数), 在实际优化过程中, 为避免数值不稳定, 需要对 Heaviside 函数及其导数进行正则化处理<sup>[14]</sup>。

根据形状导数的理论<sup>[20]</sup>, 沿着移动自由边界的法向速度可以由应变能密度和 Lagrange 乘数来确定。在非线性的问题中, 法向速度将不同于一般的线性问题:

$$\mathbf{V}_N = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \lambda, \quad (28)$$

其中,  $\lambda$ 是处理体积分数约束的 Lagrange 乘数, 本文使用增广 Lagrange 更新方案来计算, 详见文献 [21]。

### 5 数值算例

在这一节中, 我们将通过对经典算例进行计算, 来验证前文所述方法的可行性。本节所有的算例都为非线性材料, 且本构关系都选用幂函数材料模型<sup>[18]</sup>。对于以下算例, 在整个设计域上, 使用四节点双线性正方形单

元的网格,采用平面应力问题的材料非线性结构的有限元方法进行分析.

### 5.1 基于参数化水平集法的材料非线性结构拓扑优化算例

本小节给出了两种经典的数值算例,来说明基于参数化水平集方法的非线性材料结构在其形状和拓扑优化方面的性能.

#### 5.1.1 悬臂梁结构

如图4所示,悬臂梁的左侧是固定的,在右侧的中点垂直施加一个集中力 $F = -100$ .尺寸为 $60 \times 30$ 的整个设计域由 $60 \times 30$ 个单元离散,这些单元具有以下特性:固体材料的恒定的参考弹性模量 $C_0 = 1$ ,空隙材料 $C_{\min} = 10^{-9}$ ,表示非线性材料特性的函数 $q(\epsilon)$ 采用幂函数材料模型, Poisson 比 $\nu = 0.3$ ,体积限制为 $\eta = 50\%$ .计算结果如图5、图6所示.

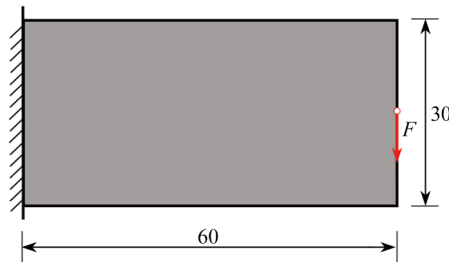


图4 悬臂梁优化的设计域及边界条件

Fig. 4 The design domain and boundary conditions for the optimization of a cantilever beam

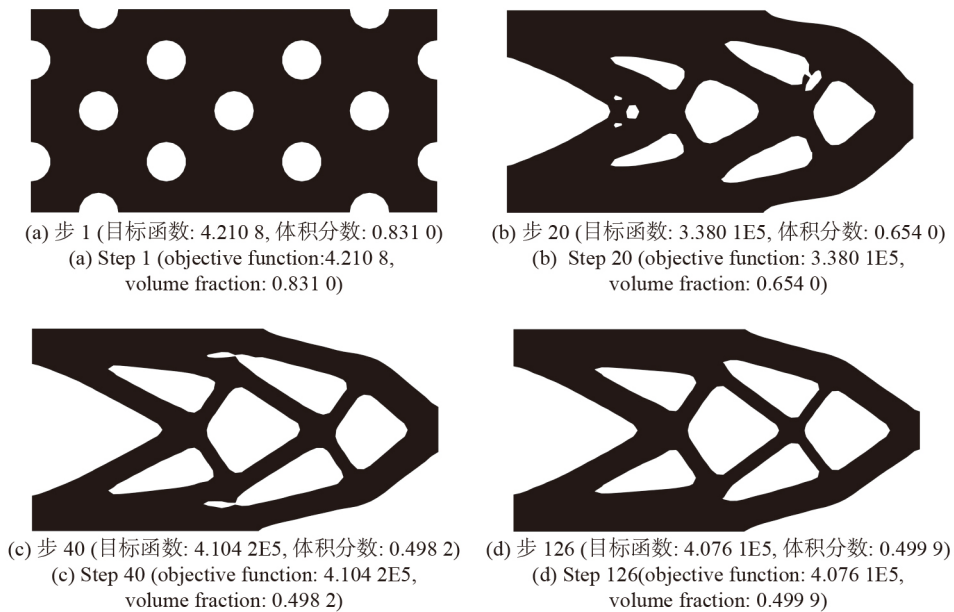


图5 基于迭代法的材料非线性悬臂梁优化设计问题的优化历程

Fig. 5 The evolution history of the nonlinear material cantilever beam optimized design based on the iterative method

#### 5.1.2 简支梁结构

如图7所示的简支梁,集中力 $F = -100$ 垂直施加在顶侧的中点. $120 \times 30$ 的整个设计域由 $120 \times 30$ 个单元离散,这些单元与上述悬臂梁有相同的属性,且规定的体积限制也被设定为 $\eta = 50\%$ .

计算结果如图8、图9所示.

由以上两个算例可知,基于参数化水平集法的非线性材料拓扑优化具有良好的收敛性以及数值稳定性,同时具有清晰光滑的几何边界,可以将结构直接导入 CAE/CAD 进行后续的处理.



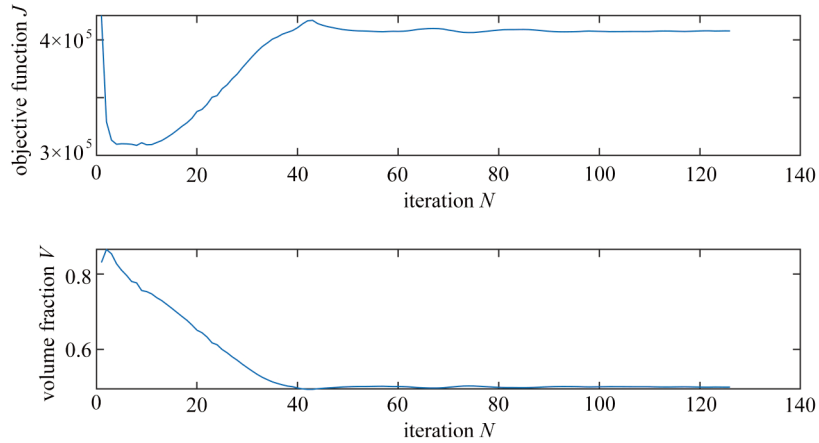


图 6 悬臂梁目标函数和体积分数的收敛曲线

Fig. 6 Convergence curves of the objective function and the volume fraction of the cantilever beam problem

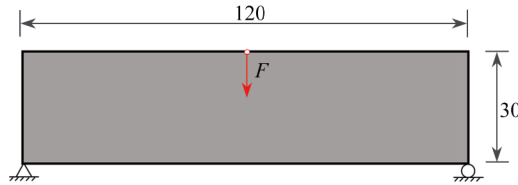


图 7 简支梁优化的设计域和边界条件

Fig. 7 The design domain and boundary conditions for the optimization of a freely supported beam

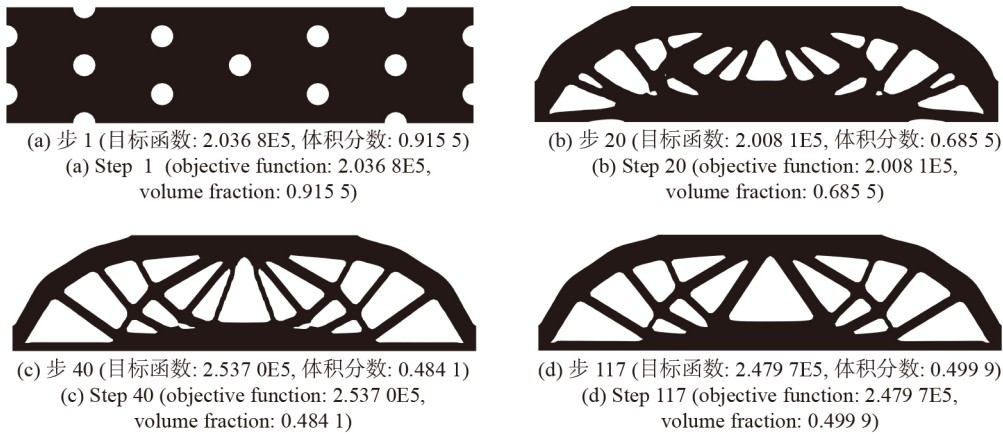


图 8 基于迭代法的材料非线性简支梁优化设计问题的优化历程

Fig. 8 The evolution history of the nonlinear material freely supported beam optimized design based on the iterative method

### 5.2 基于参数化水平集法的材料非线性子结构拓扑优化算例

本小节给出了子结构法有限元和标准有限元法的非线性结构拓扑优化数值算例, 来说明使用基于子结构法的参数化水平集材料非线性结构拓扑优化在计算效率上的优势.

#### 5.2.1 悬臂梁结构

如图 4 所示悬臂梁, 划分为  $N_{CEX} \times N_{CEY}$  个子结构, 子结构划分为  $n_{elx} \times n_{ely}$  个单元. 这些单元具有以下特性: 固体材料的恒定的参考弹性模量  $C_0 = 1$ , 空隙材料  $C_{min} = 10^{-9}$ ,  $q(\epsilon)$  采用幂函数材料模型, Poisson 比  $\nu = 0.3$ , 体积分数设定为  $\eta = 50\%$ .

计算结果如表 1 所示, 其中未标注的都是使用子结构法来计算的结果.

#### 5.2.2 简支梁结构

如图 7 所示的简支梁, 划分为  $N_{CEX} \times N_{CEY}$  个子结构, 子结构划分为  $n_{elx} \times n_{ely}$  个单元. 单元属性与上述悬臂梁相同, 体积分数设定为  $\eta = 50\%$ .

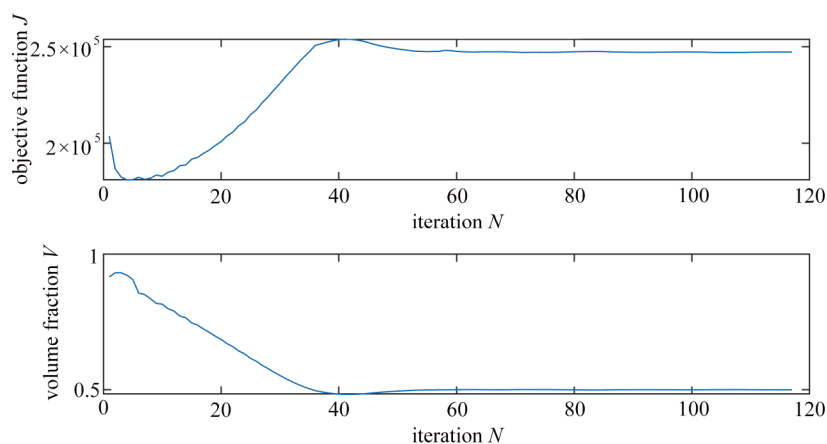


图9 简支梁目标函数和体积分数的收敛曲线

Fig. 9 Convergence curves of the objective function and the volume fraction of the freely supported beam

计算结果如表2所示,其中未标注的都是使用子结构法来计算的结果。

在采用标准有限元法求解非线性材料结构拓扑优化问题时,每次有限元分析都需要进行迭代计算,而每次迭代都需要重新计算新的刚度矩阵,因此,对于自由度较大的刚度矩阵来说耗时较长。子结构法将全自由度平衡方程的求解分解为缩减的平衡方程和多个子结构内部位移的求解,而缩减后的平衡方程自由度数量大大降低,提高了有限元分析的计算效率。一般来说,因为子结构法涉及多个子结构的组装,因此子结构主节点的数量不宜过多。若主节点数量过多(即划分子结构数量过多),会导致缩减的全局刚度矩阵非零元素增多,组装变慢,使计算效率降低和计算机内存不合理地增加<sup>[22]</sup>。而子结构内部从节点的位移计算可采用并行运算,因此从节点个数对计算效率影响不大。根据表1和表2的结果可以看出,同一结构不同算例的目标函数相差不多,子结构法产生的误差很小,由此可得,将子结构法应用于材料非线性结构的拓扑优化中,可以在保证计算结果精度的情况下,减少计算量。

表1 悬臂梁标准有限元法与子结构法计算结果对比

Table 1 The results of the cantilever beam standard finite element method and the substructure method

| $N_{\text{CEX}} \times N_{\text{CEY}}$         | $n_{\text{elx}} \times n_{\text{ely}}$ | objective function $J$ | volume fraction $V$ | step time $t/s$ | optimized design |
|------------------------------------------------|----------------------------------------|------------------------|---------------------|-----------------|------------------|
| standard finite element method: $60 \times 30$ |                                        | 4.076 1E5              | 0.499 9             | 6.014 7         |                  |
| 12 × 6                                         | 5 × 5                                  | 4.072 7E5              | 0.500 3             | 4.937 9         |                  |
| 6 × 3                                          | 10 × 10                                | 4.076 1E5              | 0.499 8             | 2.736 2         |                  |
| 2 × 1                                          | 30 × 30                                | 4.066 5E5              | 0.500 3             | 1.336 4         |                  |

表2 简支梁标准有限元法与子结构法计算结果对比

Table 2 The results of the freely supported beam standard finite element method and the substructure method

| $N_{\text{CEX}} \times N_{\text{CEY}}$          | $n_{\text{elx}} \times n_{\text{ely}}$ | objective function $J$ | volume fraction $V$ | step time $t/s$ | optimized design |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|------------------------|---------------------|-----------------|------------------|
| standard finite element method: $120 \times 30$ |                                        | 2.479 7E5              | 0.499 9             | 40.358 8        |                  |
| 24 × 6                                          | 5 × 5                                  | 2.475 5E5              | 0.499 9             | 47.779 5        |                  |
| 12 × 3                                          | 10 × 10                                | 2.476 4E5              | 0.500 3             | 30.279 1        |                  |
| 4 × 1                                           | 30 × 30                                | 2.476 3E5              | 0.501 0             | 16.701 1        |                  |

### 5.2.3 初始构型的影响

本小节给出不同初始条件下的悬臂梁和自由支撑梁的算例, 悬臂梁与简支梁的设计域和边界条件如图 4 和图 7 所示. 单元材料参数与上述算例相同, 其中悬臂梁划分为  $2 \times 1$  个子结构, 子结构内部划分为  $30 \times 30$  个单元; 简支梁划分为  $4 \times 1$  个子结构, 子结构内部划分为  $30 \times 30$  个单元. 体积限制均为  $\eta = 50\%$ .

图 10 给出了不同的初始设计和优化结果, 可以看出, 在不同的初始条件下, 优化的结果相差不大. 该结果可表明, 该算法对初始设计不敏感, 并且可以通过使用具有较少初始孔洞的初始设计来获得复杂的优化设计.

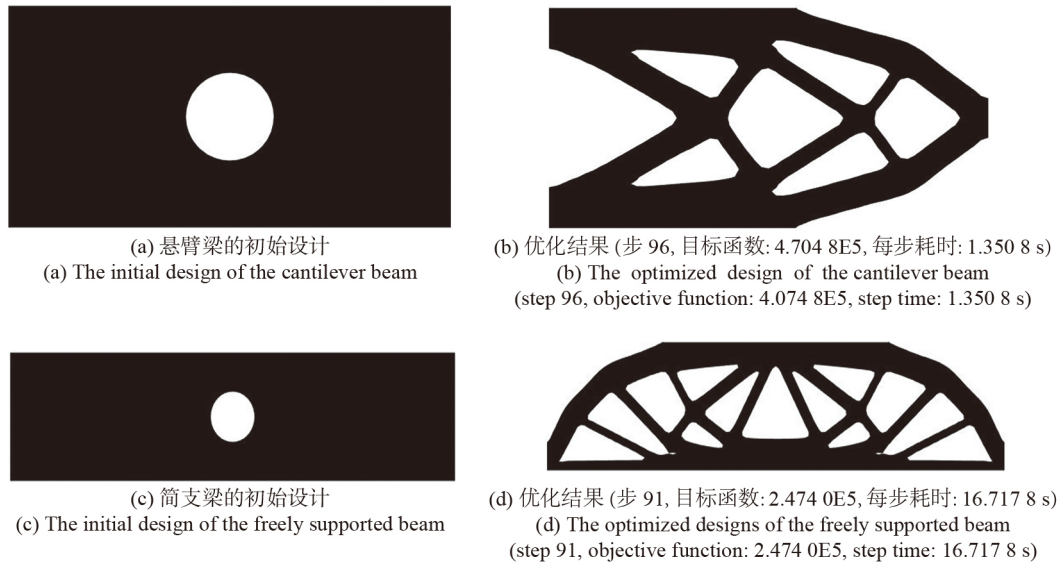


图 10 不同的初始设计和优化结果

Fig. 10 Different initial designs and the optimized designs

## 6 结 论

本文提出了一种基于子结构法的参数化水平集法材料非线性结构拓扑优化方法. 该方法解决了传统水平集法计算复杂和数值不稳定的问题, 避免了变密度法锯齿状边界等问题, 得到了清晰光滑的结构边界, 使得优化结果更加符合工程实际. 同时, 在此基础上引入子结构法减小计算机存储量, 提高了非线性结构的计算效率, 为复杂环境下的大型非线性工程提供了一种高效的求解方法. 算例表明, 以上所提出的方法能够在保证计算精度的情况下提高计算效率, 且对结构的初始构型不敏感, 有着较强的实用性和普遍性, 便于应用于实际工程.

### 参考文献 (References):

- [1] 卫志军, 申利敏, 关晖, 等. 拓扑优化技术在抑制流体晃荡中的数值模拟研究[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 49-57. (WEI Zhijun, SHEN Limin, GUAN Hui, et al. Numerical simulation of topology optimization technique for tank sloshing suppression[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 49-57. (in Chinese))
- [2] OSHER S. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, **79**(1): 12-49.
- [3] WANG S, WANG M Y. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **65**(12): 2060-2090.
- [4] WANG F, SIGMUND O, JENSEN J S. Design of materials with prescribed nonlinear properties[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, **69**(2): 156-174.
- [5] XIA L, FRITZEN F, BREITKOPF P. Evolutionary topology optimization of elastoplastic structures[J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2017, **55**(2): 569-581.
- [6] CHEN W, XIA L, YANG J, et al. Optimal microstructures of elastoplastic cellular materials under various mac-

- roscopic strains[J]. *Mechanics of Materials*, 2018, **118**: 120-132.
- [7] GUYAN R J. Reduction of stiffness and mass matrices[J]. *AIAA Journal*, 1965, **3**(2): 380.
- [8] 封建湖. 三维进气道系统流场的数值模拟研究[D]. 博士学位论文. 西安: 西北工业大学, 1995 (FENG Jianhu. On numerical simulation of three-dimensional aircraft inlet systems[D]. PhD Thesis. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1995. (in Chinese))
- [9] MAHDIABADI M K, BARTL A, XU D, et al. An augmented free-interface-based modal substructuring for nonlinear structural dynamics including interface reduction[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, **462**(8): 114915.
- [10] ZHAO Y B, GUO W J, DUAN S H, et al. A novel substructure-based topology optimization method for the design of wing structure[J]. *International Journal for Simulation & Multidisciplinary Design Optimization*, 2017, **8**: A5.
- [11] WU Z, XIA L, WANG S, et al. Topology optimization of hierarchical lattice structures with substructuring[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **345**: 602-617.
- [12] FU J, XIA L, GAO L, et al. Topology optimization of periodic structures with substructuring[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2019, **141**(7): 071403.
- [13] DIJK N P, MAUTE K, LANGELAAR M, et al. Level-set methods for structural topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, **48**(3): 437-472.
- [14] 沈亚栋. 结构拓扑优化的参数化水平集方法研究[D]. 博士学位论文. 西安: 长安大学, 2019 (SHEN Yadong. Research on parametric level set method for structural topology optimization[D]. PhD Thesis. Xi'an: Chang'an University, 2019. (in Chinese))
- [15] 王超逸, 封建湖. 拓扑优化中水平集方法的局限性及改进方法[J]. 建筑科学与工程学报, 2011, **28**(2): 119-126. (WANG Chaoyi, FENG Jianhu. Weakness of level set method in topology optimization and it's improvement[J]. *Journal of Architecture and Civil Engineering*, 2011, **28**(2): 119-126. (in Chinese))
- [16] WEI P, LI Z, LI X, et al. An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions[J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2018, **58**(2): 831-849.
- [17] JUNG D, GEA H C. Topology optimization of nonlinear structures[J]. *Finite Elements in Analysis & Design*, 2004, **40**(11): 1417-1427.
- [18] JUNG D, GEA H C. Compliant mechanism design with non-linear materials using topology optimization[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2004, **1**(2): 157-171.
- [19] RAMOS A S, PAULINO G H. Filtering structures out of ground structures: a discrete filtering tool for structural design optimization[J]. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2016, **54**(1): 95-116.
- [20] WANG M Y, WANG X, GUO D. A level set method for structural topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, **192**(1): 227-246.
- [21] ROCKAFELLAR R T. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming[J]. *Journal of Optimization Theory & Applications*, 1973, **12**(6): 555-562.
- [22] 裴世源, 徐华. 非均质复合材料力学性能的不确定性多尺度计算方法[J]. 西安交通大学学报, 2015, **49**(10): 8-13. (PEI Shiyuan, XU Hua. Deterministic multiscale method for heterogeneous composite material[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2015, **49**(10): 8-13. (in Chinese))