

# 随机 ADMM 算法及其在电力系统 凸经济调度问题中的应用\*

陈伟俊, 罗洪林, 彭建文

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 针对电力系统中的一类凸经济调度问题, 提出了随机 ADMM 算法, 设计了周期循环更新规则和随机选择更新规则, 证明了随机 ADMM 算法在周期循环更新规则下的收敛性, 以及得出了在随机选择更新规则下按期望收敛的结论. 数值实验结果表明该方法可以有效解决电力系统中的凸经济调度问题.

**关键词:** 凸经济调度问题; 随机 ADMM 算法; 周期循环更新规则; 随机选择更新规则

**中图分类号:** O231.1      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.420040

## The Random ADMM and Its Application to Convex Economic Dispatch Problems of Power Systems

CHEN Weijun, LUO Honglin, PENG Jianwen

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,  
Chongqing 401331, P.R.China)

**Abstract:** A new random alternating direction method of multipliers (ADMM) was designed to solve convex economic dispatch problems in power systems. The convergence of the random ADMM was analyzed. Under some mild assumptions, the random ADMM, according to the cycle update rule and the random selection update rule, was proved to converge to an optimal solution of the convex economic dispatch problem. The numerical experimental results show that, the proposed method is effective to solve convex economic dispatch problems.

**Key words:** convex economic dispatch problem; random ADMM; cycle update rule; random selection update rule

## 引 言

经济调度是当今能源生产和分配的核心问题, 是在满足电力系统负荷的前提下, 合理利用能源和设备, 调度各机组的输出功率, 以最低的发电成本或燃料费用保证对用户可靠地供电的一种调度方法. 换句话说:

\* 收稿日期: 2021-02-04; 修订日期: 2021-06-16

**基金项目:** 国家自然科学基金(11991024; 11771064); 重庆市高校创新研究群体项目(CXQT20014)

**作者简介:** 陈伟俊(1997—), 男, 硕士(E-mail: 1061661769@qq.com);

罗洪林(1982—), 男, 教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: luohonglin\_1982@163.com);

彭建文(1967—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: jwpeng6@aliyun.com).

**引用格式:** 陈伟俊, 罗洪林, 彭建文. 随机 ADMM 算法及其在电力系统凸经济调度问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(9): 979-988.

经济调度问题本质上是在功率平衡约束和发电约束下最小化总发电成本.本文考虑如下问题模型:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i, \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = D, \\ x_i \in [x_{\min}, x_{\max}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ ,  $x_i$  是节点  $i$  的输出功率,  $a_i, b_i, c_i$  为成本系数,  $F(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R_+$  是整个系统的成本函数,  $x_{\min}$  是节点  $i$  的最小输出限制,  $x_{\max}$  是节点  $i$  的最大输出限制,  $D$  为所有节点的总体需求.

针对问题(1)的解决方法主要有集中式方法和分布式方法两大类.集中式方法包含启发式搜索算法、遗传算法、粒子群算法等.文献[1]中提出了基于生物地理图的学习粒子群优化算法求解热电联产问题;文献[2]引入惯性权重,文献[3]加入正交学习的概念对粒子群算法进行改进用来更好地适用于调度问题;相对于使用单一的改进粒子群算法,文献[4-5]将模式搜索算法和粒子群算法结合为新的算法,针对调度问题有较好效果,混合算法能更精确找解,并且计算时间也会相对缩减.在解决热电联产问题上,与文献[1]不同,文献[6]采用新型交叉变异的改进遗传算法,提出了一种新的约束处理方法来修复变异后代,使其能够容易地进入可行域中;而文献[7]针对遗传算法加入了进化差分算法,将两者优势结合,得到了一个通用的进化算法框架,采用启发式技术将不可行解修复为可行解,以提高算法的收敛速度.

虽然集中式算法适用于求解各种复杂目标及约束条件的电力系统优化问题,且易于得到全局最优解,但集中式算法完全依赖于中心控制器,易造成安全隐患,而且可扩展性差和单点故障的鲁棒性差.与集中式算法不同,分布式算法基本思想是将计算交由若干个节点上的智能体,每个智能体只负责优化本地决策变量,所以它可以很好地处理单点故障,保护隐私,降低计算和通信成本,因此设计分布式算法来解决经济调度问题更为可取.文献[8]提出了一种新的基于自触发一致性的经济调度问题优化算法,用于拓扑切换,保证增量成本在迭代后收敛到最优一致性值.由于分布式算法的迭代计算是经过若干节点完成的,所以在计算量上会稍多于集中式算法,为了减少计算量和交互量,文献[9]提出了一种事件触发分布式加速原始对偶算法,将两种类型的动量项结合到梯度跟踪方案中,大幅降低了交互成本和计算时间;文献[10]提出了一种分布式离散事件触发算法来减少通信量,节省系统能量,保证解决经济调度问题的有效性.

交替方向乘子(alternating direction method of multipliers, ADMM)算法是分布式算法中一种重要的方法,ADMM的本质其实是将原始问题分解为多个更小的子问题,在每次迭代更新中分布求解每一个子问题的优化算法,这种方法弥补了优化问题中二次惩罚项的缺点,且ADMM算法处理速度快,收敛性能好.它已广泛应用于现代大数据相关问题中,包括解码器应用<sup>[11]</sup>、通讯系统<sup>[12]</sup>、信号处理<sup>[13]</sup>、图像处理<sup>[14]</sup>等领域.文献[15]首次基于ADMM算法提出了一种新颖的分布式经济调度算法,求解了具有一般凸成本函数和容量限制的电子数据处理问题,利用ADMM算法解决经济调度问题不仅能以简单的方式实现,还有较好的收敛速度.近年来,有学者团队对经典ADMM算法进行了适当改进来处理凸问题,Li和Hu在文献[16]中加入有限时间算法改进ADMM算法来解决经济调度问题;相似地,文献[17]在经典ADMM算法中加入平均一致性算法解决了问题.受以上文献的启发,本文对经典ADMM算法也进行了改进,提出了针对解决凸经济调度问题的随机ADMM(random ADMM, R-ADMM)算法.

本文的结构如下:针对一类经济调度问题,在第1节提出了随机ADMM算法;第2节就随机ADMM算法的两种更新规则(周期更新规则和随机更新规则),分别给出了相应的收敛性证明;第3节为数值实验;最后是全文总结以及对于非凸经济调度问题的研究展望.

## 1 随机ADMM算法

针对问题(1)定义一个集合:

$$M = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = D, x_i \in [x_{\min}, x_{\max}], i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

令

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in M, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin M \end{cases}$$

作为  $M$  的指示函数,则问题(1)等价于

$$\begin{cases} \min F(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}), \\ \text{s.t. } \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (2)$$

定义问题(2)的 Lagrange 函数为

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}) + \mathbf{z}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2,$$

其中  $\rho$  有界且足够大.根据强凸函数的定义:若函数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  满足

$$(\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}))^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2,$$

则函数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  是强凸的,其中  $\mu$  是强凸系数,可知 Lagrange 函数  $L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  是关于  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的强凸函数.

在经典 ADMM 迭代中加入随机性,让  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  作为两个原始变量,在每一次迭代中随机选取变量进行更新,对偶变量  $\mathbf{z}$  的更新只与  $\mathbf{x}$  的更新相关联,即当  $\mathbf{x}$  更新时  $\mathbf{z}$  才更新,  $W_k \subseteq \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$  表示第  $k$  次迭代中更新的变量.随机 ADMM 算法步骤如下:

步骤1 让  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  都进行第一次迭代,即  $W_1 = \{\mathbf{x}(1), \mathbf{y}(1)\}$ ;

步骤2 迭代次数大于1次时,随机选择  $\mathbf{x}$  或  $\mathbf{y}$  进行迭代,即  $k+1 \geq 2$  时,  $W_{k+1} \subseteq \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ ;

步骤3 若  $\mathbf{y} \in W_{k+1}$ , 有  $\mathbf{y}(k+1) = \arg \min_{\mathbf{y}} L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}, \mathbf{z}(k))$ , 否则  $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k)$ ;

步骤4 若  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$ , 有  $\mathbf{x}(k+1) = \arg \min_{\mathbf{x}} L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k))$ , 且对偶变量  $\mathbf{z}$  也会随之更新,则有  $\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k) + \rho(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1))$ , 否则,即  $\mathbf{x} \notin W_{k+1}$  时,  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k), \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k)$ .

其中步骤3中变量  $\mathbf{y}$  的求解利用了投影算子进行计算;而步骤4中  $\mathbf{x}$  的求解利用 Newton-Raphson 法和比率一致法进行计算.

定义随机 ADMM 算法的周期循环更新规则和随机选择更新规则如下.

周期循环更新规则:存在一个给定的周期  $T(T \geq 1$  且  $T$  是有限的),变量  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  在周期  $T$  中至少都被选择更新一次,即  $\cup_{i=1}^T W_{k+i} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ .

随机选择更新规则:  $k \rightarrow \infty$  而不构成一个完整周期时,设  $\mathbf{x}$  在  $k+1$  次迭代中被选择的概率为  $p_1, \mathbf{y}$  在  $k+1$  次迭代中被选择的概率为  $p_0$ , 且两概率都满足  $p_1, p_0 \geq p_{\min} > 0$ , 其中  $p_{\min}$  为最小概率.

用  $k_x$  表示  $\mathbf{x}$  在第  $k+1$  次迭代前的最近更新次数指标,用  $k_y$  表示  $\mathbf{y}$  在第  $k+1$  次迭代前的最近更新次数指标,即

$$k_x = \max \{q \mid q < k+1, \mathbf{x} \in W_q\},$$

$$k_y = \max \{q \mid q < k+1, \mathbf{y} \in W_q\}.$$

用  $o_x$  表示  $\mathbf{x}$  在  $[k, k+T]$  区间中任意一个迭代次数前的最近更新次数指标,用  $o_y$  表示  $\mathbf{y}$  在  $[k, k+T]$  区间中任意一个迭代次数前的最近更新次数指标,即

$$o_x = \max \{q \mid q \in [k, k+T], \mathbf{x} \in R_q\},$$

$$o_y = \max \{q \mid q \in [k, k+T], \mathbf{y} \in R_q\}.$$

注1 文献[15-17]在变量分布迭代中加入优化算法来解决收敛速度和收敛性问题,本文与之不同,随机 ADMM 算法是在经典算法中加入随机选择性进行优化.在经典算法中  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  都会有固定迭代步骤,而在随机 ADMM 算法中,只有每当相应的原始变量  $\mathbf{x}$  更新时,对偶变量  $\mathbf{z}$  才更新.

## 2 收敛性分析

本节将会在一些假设条件下,给出随机 ADMM 算法的收敛性分析,首先给出两个引理.

引理1 假设成本函数  $F(\mathbf{x})$  是可微凸函数,又满足梯度 Lipschitz 连续条件,即存在一个正数  $C$  使得  $\|\nabla F(\mathbf{x}) - \nabla F(\mathbf{y})\| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , 有以下不等式成立:

$$C^2 \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)\|^2 \geq \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k)\|^2. \quad (3)$$

证明 当  $\mathbf{x} \notin W_{k+1}$  时, 即  $\mathbf{x}$  在  $k+1$  步迭代中不更新, 有  $\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k) = \mathbf{0}$ , 则引理 1 成立.

当  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$  时, 有

$$\mathbf{x}(k+1) = \arg \min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}(k+1)) + \mathbf{z}^T(k)(\mathbf{x} - \mathbf{y}(k+1)) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}(k+1)\|^2.$$

故

$$\nabla F(\mathbf{x}(k+1)) + \mathbf{z}(k) + \rho(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)) = \mathbf{0}.$$

由对偶变量迭代步骤得  $\nabla F(\mathbf{x}(k+1)) = -\mathbf{z}(k+1)$ , 则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k)\|^2 &= \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k_x)\|^2 = \|\nabla F(\mathbf{x}(k+1)) - \nabla F(\mathbf{x}(k_x))\|^2 \leq \\ &C^2 \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k_x)\|^2 = C^2 \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)\|^2. \end{aligned}$$

引理 2 在引理 1 下, 假设  $F(\mathbf{x})$  有下界, 且假设  $L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  关于  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的强凸系数分别为  $\mu_1, \mu_2$ , 满足  $\rho\mu_1 > 2C^2$  和  $\rho > 2C$ , 则序列  $\{L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))\}$  收敛.

证明 利用单调有界证明点列收敛. 首先证明点列  $\{L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))\}$  单调递减, 只需证  $L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \leq 0$ , 分别设

$$I_1 = L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)),$$

$$I_2 = L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)),$$

$$I_3 = L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)),$$

则有  $L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) = I_1 + I_2 + I_3$ .

对于  $I_1$ , 当  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$  时, 有

$$I_1 = (\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k))^T(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)) = \frac{1}{\rho} \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k)\|^2;$$

当  $\mathbf{x} \notin W_{k+1}$  时,  $\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k)$ , 则有

$$L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) = 0.$$

令函数

$$\kappa_1 = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in W_{k+1}, \\ 0, & \mathbf{x} \notin W_{k+1}, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) &= \\ \kappa_1 \frac{1}{\rho} \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k)\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

对于  $I_2$ , 因为  $L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))$  是关于  $\mathbf{x}$  的强凸函数, 所以无论  $\mathbf{y}$  在第  $k+1$  次迭代中会不会被选择, 只要  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$ , 就有

$$L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) \leq$$

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}} L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)), \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) \rangle - \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)\|^2.$$

当  $\mathbf{x} \notin W_{k+1}$  时, 有  $\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ , 则

$$L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) \leq 0.$$

故

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) &\leq \\ \kappa_1 \left[ \langle \nabla_{\mathbf{x}} L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)), \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) \rangle - \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

对于  $I_3$ , 因为  $L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))$  也是关于  $\mathbf{y}$  的强凸函数, 所以无论  $\mathbf{x}$  在第  $k+1$  次迭代

中会不会被选择,只要  $\mathbf{y} \in W_{k+1}$ , 对于  $\forall \mathbf{v}_{\mathbf{y}(k+1)} \in \partial_{\mathbf{y}} L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k))$ , 都有

$$L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \leq \mathbf{v}_{\mathbf{y}(k+1)}^{\top} (\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)) - \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)\|^2.$$

当  $\mathbf{y} \notin W_{k+1}$  时,有  $\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ , 则  $L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \leq 0$ . 令函数

$$\kappa_2 = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in W_{k+1}, \\ 0, & \mathbf{y} \notin W_{k+1}, \end{cases}$$

故

$$L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) - L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \leq \kappa_2 \left[ \mathbf{v}_{\mathbf{y}(k+1)}^{\top} (\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)) - \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)\|^2 \right]. \quad (6)$$

由一阶最优性条件有  $\nabla_{\mathbf{x}} L_{\rho}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k)) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{0} \in \partial_{\mathbf{y}} L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k))$ , 再结合式 (4)~(6) 有

$$L_{\rho}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \leq \kappa_1 \left( -\frac{\mu_1}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)\|^2 - \kappa_2 \left( \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k)\|^2 \right). \quad (7)$$

根据假设,有  $L_{\rho}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_{\rho}(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \leq 0$ .

最后证明点列  $\{L_{\rho}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))\}$  有界. 因为

$$\begin{aligned} L_{\rho}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) &= h(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{x}(k+1)) + \langle \mathbf{z}(k+1), \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1) \rangle + \\ &\quad \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2 = \\ &= h(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{x}(k+1)) + \langle \nabla F(\mathbf{x}(k+1)), \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k+1) \rangle + \\ &\quad \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2 = \\ &= h(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{x}(k+1)) - F(\mathbf{y}(k+1)) + \\ &\quad \langle \nabla F(\mathbf{x}(k+1)), \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k+1) \rangle + \\ &\quad \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2, \end{aligned}$$

对于第二个等号,当  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$  时,有  $\mathbf{z}(k+1) = -\nabla F(\mathbf{x}(k+1))$ ; 当  $\mathbf{x} \notin W_{k+1}$  时,有  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k_x) = \mathbf{x}(k_x + 1)$ . 对偶变量  $\mathbf{z}(k+1)$  有相同结论成立,所以

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1)(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)) &= \mathbf{z}(k_x + 1)(\mathbf{x}(k_x + 1) - \mathbf{y}(k+1)) = \\ &= \nabla F(\mathbf{x}(k_x + 1))(\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k_x + 1)) = \nabla F(\mathbf{x}(k+1))(\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k+1)). \end{aligned}$$

设

$$I_4 = F(\mathbf{x}(k+1)) - F(\mathbf{y}(k+1)) + \langle \nabla F(\mathbf{x}(k+1)), \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k+1) \rangle + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2,$$

所以  $L_{\rho}(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) = h(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{y}(k+1)) + I_4$ . 对于  $I_4$  有

$$\begin{aligned} I_4 &\geq \langle \nabla F(\mathbf{y}(k+1)), \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1) \rangle + \langle \nabla F(\mathbf{x}(k+1)), \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k+1) \rangle + \\ &\quad \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2 \geq \\ &= \langle \nabla F(\mathbf{y}(k+1)) - \nabla F(\mathbf{x}(k+1)), \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1) \rangle + \\ &\quad \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2 \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \|\nabla F(\mathbf{y}(k+1)) - \nabla F(\mathbf{x}(k+1))\| \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| + \\
& \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2 \geq \\
& -C \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\|^2.
\end{aligned}$$

利用可微凸函数  $F(\mathbf{x}(k+1))$  的性质得到第一个不等号成立, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得到第三个不等号成立, 利用引理 1 的结论得到最后一个不等号成立.

所以当  $\rho > 2C$  时, 有

$$\begin{aligned}
L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) &= h(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{y}(k+1)) + I_4 \geq \\
& h(\mathbf{y}(k+1)) + F(\mathbf{y}(k+1)),
\end{aligned}$$

则  $\{L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))\}$  有下界.

**定理 1** 随机 ADMM 算法生成的序列满足以下 4 个命题:

① 对于周期循环更新规则, 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| = 0$ .

② 假设当  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  都在  $k+1$  步迭代被选择时, 用  $\hat{\mathbf{x}}(k+1), \hat{\mathbf{y}}(k+1), \hat{\mathbf{z}}(k+1)$  表示变量; 当  $\mathbf{y}$  在  $k+1$  步迭代未被选择而  $\mathbf{x}$  被选择时, 用  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \tilde{\mathbf{z}}(k+1)$  表示变量. 对于随机选择更新规则, 依概率可以确定  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1)\| = 0$  以及  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| = 0$ .

③ 若  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$  为随机 ADMM 算法生成序列  $\{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)\}$  的极限点, 则  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*) \in S^*$ , 其中  $S^*$  为

$$S^* = \{(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*) \mid \nabla F(\mathbf{x}^*) + \mathbf{z}^* = \mathbf{0}, \mathbf{y}^* \in \arg \min_{\mathbf{y} \in M} h(\mathbf{y}) + \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x}^* - \mathbf{y} \rangle, \mathbf{y}^* = \mathbf{x}^*\}.$$

④ 随机 ADMM 算法生成序列  $\{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)\}$  收敛到问题(1)的 KKT 解集, 即满足

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}\{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k); S^*\} = 0,$$

其中  $\text{dist}\{q_0; Q\}$  定义为:  $\text{dist}\{q_0; Q\} = \inf_{q \in Q} \{\|q_0 - q\|\}$ .

**证明** 对于命题①, 利用周期循环更新规则, 式(7)可以等价于

$$\begin{aligned}
L_\rho(\mathbf{x}(k+T), \mathbf{y}(k+T), \mathbf{z}(k+T)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) &= \\
\sum_{l=1}^T [L_\rho(\mathbf{x}(k+l), \mathbf{y}(k+l), \mathbf{z}(k+l)) - L_\rho(\mathbf{x}(k+l-1), \mathbf{y}(k+l-1), \mathbf{z}(k+l-1))] &\leq \\
\sum_{l=1}^T \left[ \kappa_1 \left( -\frac{\mu_1}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) \|\mathbf{x}(k+l) - \mathbf{x}(k+l-1)\|^2 - \right. \\
\left. \kappa_2 \left( \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{y}(k+l) - \mathbf{y}(k+l-1)\|^2 \right) \right].
\end{aligned}$$

因为  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  在  $[t, t+T]$  中至少更新一次, 由引理 2 点列  $\{L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))\}$  的收敛可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k_x)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k_y)\| = 0,$$

又由引理 1 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k_x)\| = 0,$$

因为  $\rho$  有界, 利用对偶变量迭代步骤得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| = 0.$$

对于命题②, 在随机选择更新规则中, 当  $\mathbf{x} \notin W_{k+1}$  时,  $\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k)$ , 又因为  $\rho$  有界, 根据对偶迭代步骤有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| = 0$ .

当  $\mathbf{y} \in W_{k+1}$ , 且  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$  时, 对式(7)两边取条件期望得

$$\begin{aligned}
E[L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \mid (\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k))] &\leq \\
E\left[ \kappa_1 \left( -\frac{\mu_1}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)\|^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \kappa_2 \left( \frac{\mu_2}{2} \| \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(k) \|^2 \right) \mid (\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \right] \leq \\ & p_1 p_0 \left( -\frac{\mu}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) (\hat{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k))^2 - p_0 \frac{\rho}{2} (\hat{\mathbf{y}}(k+1) - \mathbf{y}(k))^2 + \\ & p_1 (1 - p_0) \left( -\frac{\mu}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) (\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k))^2 \leq \\ & p_{\min}^2 \left( -\frac{\mu}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) (\hat{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k))^2 - p_{\min} \frac{\rho}{2} (\hat{\mathbf{y}}(k+1) - \mathbf{y}(k))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

由于引理 1 给出  $L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1))$  的收敛性, 根据文献[18]命题 4.2 给出的超局部收敛定理, 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k)\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{y}}(k+1) - \mathbf{y}(k)\| = 0$ , 所以有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{z}}(k+1) - \mathbf{z}(k)\| = 0$ , 又因为  $\rho$  有界, 根据对偶变量迭代式可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1)\| = 0$ .

当  $\mathbf{y} \notin W_{k+1}$  且  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$  时, 得

$$\begin{aligned} & E[L_\rho(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)) - L_\rho(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) \mid (\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k))] \leq \\ & p_1 (1 - p_0) \left( -\frac{\mu}{2} + \frac{C^2}{\rho} \right) (\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k))^2. \end{aligned}$$

同理,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{x}(k)\| = 0$ , 且  $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k)$ , 则有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(k+1) - \mathbf{z}(k)\| = 0$ , 根据对偶变量迭代式可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{x}}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| = 0$ .

对于命题③, 为了简单起见, 只考虑周期循环更新规则, 因为随机选择更新规则的证明是相似的.

由命题①、命题②知  $\{\mathbf{x}(k+1)\}, \{\mathbf{y}(k+1)\}, \{\mathbf{z}(k+1)\}$  都为 Cauchy 点列. 已知集合  $M$  是紧集, 对于序列  $\{\mathbf{x}(k+1)\}$  一定是有界的且有极限点, 因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)\| = 0$ , 则  $\mathbf{y}$  也会存在于一个紧集中, 因此序列  $\{\mathbf{y}(k+1)\}$  也会有是有界的且有极限点. 又  $F(\mathbf{x})$  满足梯度 Lipschitz 条件, 所以集合  $\{\nabla F(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M\}$  是有界的, 则  $\{\nabla F(\mathbf{x}(k+1))\}$  是有界序列, 又因为  $\mathbf{z}(k+1) = -\nabla F(\mathbf{x}(k+1))$ , 所以  $\{\mathbf{z}(k+1)\}$  也会是有界的且至少有一个极限点, 所以序列  $\{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)\}$  收敛.

当  $\mathbf{x} \in W_{k+1}$  时, 有  $\nabla F(\mathbf{x}(k+1)) + \mathbf{z}(k) + \rho(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{y}(k+1)) = \mathbf{0}$ ; 当  $\mathbf{y} \in W_{k+1}$  时, 由最优性条件和函数  $h$  的凸性, 对于  $\forall \mathbf{y} \in M$  有

$$h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}(k+1)) \geq \langle -\mathbf{z}(k) + \rho(\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(k)), \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y} \rangle,$$

其中  $\mathbf{z}(k) + \rho(\mathbf{x}(k) - \mathbf{y}(k+1)) \in \partial h(\mathbf{y}(k+1))$ . 使用周期循环更新规则和命题①的结论, 对于充分大的  $k$  有

$$\begin{cases} \nabla F(\mathbf{x}(k+1)) + \mathbf{z}(o_x) = \mathbf{0}, \\ h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}(k+1)) \geq \langle -\mathbf{z}(o_x) + \rho(\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{x}(o_x)), \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y} \rangle. \end{cases} \quad (8)$$

因为周期  $T$  是有限的, 当  $o_x, o_y \in [t, t+T]$  时, 有  $\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(o_x)\| \rightarrow 0, \|\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{y}(o_y)\| \rightarrow 0, \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(o_x)\| \rightarrow 0$ . 取式(8)及原始可行性的极限, 有

$$\begin{aligned} & \nabla F(\mathbf{x}^*) + \mathbf{z}^* = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{y}^* = \mathbf{x}^*, \\ & h(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}^*) - \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{y} - \mathbf{y}^* \rangle \geq 0 \Leftrightarrow h(\mathbf{y}) + \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x}^* - \mathbf{y} \rangle \geq h(\mathbf{y}^*) + \langle \mathbf{z}^*, \mathbf{x}^* - \mathbf{y}^* \rangle. \end{aligned}$$

对于命题④, 用反证法说明. 由命题③知序列  $\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{y}(k+1), \mathbf{z}(k+1)\}$  有界, 故存在收敛子列  $(\mathbf{x}(k_j), \mathbf{y}(k_j), \mathbf{z}(k_j))$ , 满足  $\lim_{j \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(k_j), \mathbf{y}(k_j), \mathbf{z}(k_j)) = (\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{z}})$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) = (\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{z}})$ , 根据命题③有  $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}, \check{\mathbf{z}}) \in S^*$ .

现在假设序列  $\{\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)\}$  不收敛到问题(1)的 KKT 解集  $S^*$  中, 则任意收敛子列也不收敛到  $S^*$ , 即  $\exists t > 0$  使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}((\mathbf{x}(k_j), \mathbf{y}(k_j), \mathbf{z}(k_j)); S^*) \geq t.$$

又由子列收敛的定义, 对于上述  $t > 0$ , 存在正整数  $N(t)$ , 当  $j \geq N(t)$  时, 有

$$\|(\mathbf{x}(k_j), \mathbf{y}(k_j), \mathbf{z}(k_j)) - (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})\| \leq \frac{t}{2}.$$

根据  $\text{dist}\{q_0; Q\}$  的定义,有

$$\text{dist}((\mathbf{x}(k_j), \mathbf{y}(k_j), \mathbf{z}(k_j)); S^*) \leq \text{dist}((\mathbf{x}(k_j), \mathbf{y}(k_j), \mathbf{z}(k_j)); (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})) \leq \frac{t}{2},$$

这就与假设产生了矛盾,命题④得证.

### 3 数值实验

本文数值实验是在一台配备了 Inter Core i5-9300H 2.40 GHz 处理器、8.00 GB 内存和 64 位 Windows 10 操作系统的个人电脑上进行的,数值实验均在 MATLAB R2020a 环境中执行,验证了所提出的算法的可行性.考虑具有 3 个发电机的电力系统,给出发电机的局部成本函数为

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i,$$

其中  $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3)$  为成本系数,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_{\min}, x_{\max}$  等参数初始值取值在表 1 中给出.定义惩罚因子  $\rho = 1, D = 105 \text{ MW}$ ,  $y_i(0) = 0, z_i(0) = 0 (i = 1, 2, 3)$ , 停止条件设为 0.001.

表 1 3 个发电机的参数和初始条件

Table 1 Parameters and initial conditions of 3 generators

| No. | $a_i$ | $b_i$ | $x_i$ | $x_{\min}$ | $x_{\max}$ |
|-----|-------|-------|-------|------------|------------|
| 1   | 0.085 | 5.2   | 15    | 10         | 60         |
| 2   | 0.072 | 4.5   | 15    | 5          | 35         |
| 3   | 0.3   | 0.73  | 15    | 10         | 25         |

表 2 100 次试验结果比较

Table 2 Comparison of 100 test results

| datum         | $\mathbf{x}$          | cost $F(\mathbf{x})$ | inner loop | outer loop | times $t/s$ |
|---------------|-----------------------|----------------------|------------|------------|-------------|
| best value    | (55.02, 29.99, 20.06) | 14.550 0             | 331        | 97         | 0.51        |
| worst value   | (54.85, 30.93, 19.04) | 14.596 6             | 721        | 362        | 4.56        |
| average value | (55.03, 30.00, 20.04) | 14.550 6             | 317        | 103        | 0.76        |

针对给出的系统,利用随机 ADMM 算法进行了 100 次实验,100 次实验均是在同一操作环境中进行.表 2 给出了 100 次实验中的最好数据结果、最差数据结果以及平均数据结果.经过比较与分析可以得到:  $x_i$  的区间跨度在 0.2 左右,增量成本的区间跨度在 0.04 左右,这都是在实际系统可接受误差范围之类的.在迭代时间上,除了有几组迭代时间超过 3 s,其他实验结果均接近平均迭代时间.本文给出在 100 次实验中的最好数据结果进行参考.

表 3 传统更新与随机更新结果对比

Table 3 Comparison of traditional and random updating results

| data comparison | $\mathbf{x}$          | cost $F(\mathbf{x})$ | inner loop | outer loop | time $t/s$ |
|-----------------|-----------------------|----------------------|------------|------------|------------|
| classical ADMM  | (55, 29.98, 19.91)    | 14.548 7             | 286        | 85         | 0.44       |
| random ADMM     | (55.02, 29.99, 20.06) | 14.550 0             | 331        | 97         | 0.51       |

随机 ADMM 算法实验结果与经典 ADMM 算法的结果对比如表 3 所示.对于同一个测试函数,在设置相同初值的情况下进行 100 余次实验,并在  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  分布迭代中加入随机性,观察结果.表 3 数据表明:随机 ADMM 算法的输出功率和增量成本在数值上和经典 ADMM 算法的结果渐进一致,虽然迭代次数会增大,但迭代时间 0.51 s 几乎是没有什么变化的,这是完全可以接受的,因为一般电子数据处理的调度周期通常为一小时以上,这也说明了随机 ADMM 算法不会在迭代时间上带来变化.

图 1、2 分别展示了在随机 ADMM 算法迭代下经济调度问题的增量成本  $F(\mathbf{x})$ 、输出功率  $x_i$  的走势情况,图 3 则展示了随机 ADMM 算法迭代下经济调度问题会达到供需平衡,本文给出了在经典 ADMM 算法下经济调度问题的增量成本(图 4)和输出功率(图 5)走势情况作为对比.从图 2、3 可以发现,随机 ADMM 算法

在迭代前期不会太稳定,而且总迭代步数也会稍大于经典算法,这些缺点都是随机选择性带来的,但在本文算法的迭代下增量成本和输出功率随着迭代次数的增多总能收敛,且和经典 ADMM 算法一样收敛到同一数值.另外,本文算法的优点在于在选择节点迭代方面更加灵活,不单一地要求迭代顺序不变,同时我们在更加随机的迭代情况下也能得到最优输出功率和增量成本,用理论和实验共同说明我们算法的收敛性.

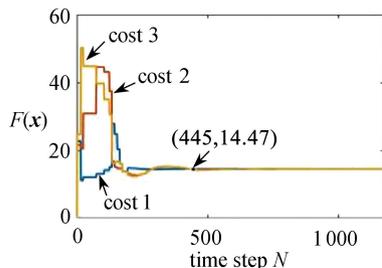


图 1 增量成本(随机 ADMM)

Fig. 1 Costs(R-ADMM)

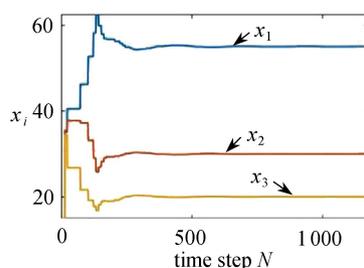


图 2 输出功率(随机 ADMM)

Fig. 2 Power outputs(R-ADMM)

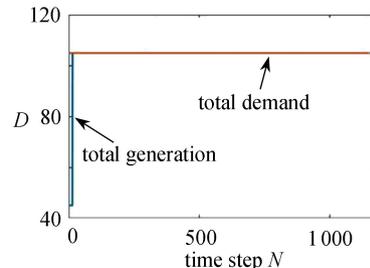


图 3 供需平衡(随机 ADMM)

Fig. 3 The balance of supply and demand(R-ADMM)

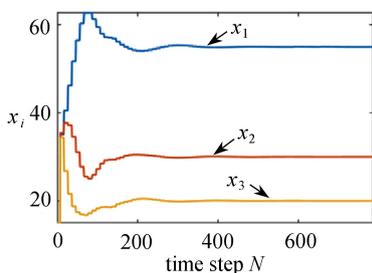


图 4 输出功率(经典 ADMM)

Fig. 4 Power outputs(classical ADMM)

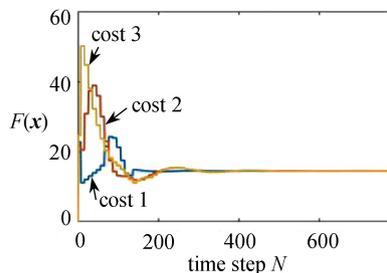


图 5 增量成本(经典 ADMM)

Fig. 5 Costs(classical ADMM)

## 4 结 论

针对一类经济调度问题,本文提出了一种新的随机 ADMM 算法,并从周期循环更新规则和随机选择更新规则两个方面对算法的收敛性进行了证明,寻找到了原问题和对偶问题的最优解.本文数值试验说明此算法对具有凸二次成本函数的电力系统是有效的,并且相较于经典 ADMM 迭代,随机 ADMM 算法能够精准求解的同时还不会带来运算时间的增加.此外,所提出的算法能够保证在整个迭代过程中发电系统约束始终得到满足,说明一个凸经济调度问题在随机 ADMM 算法下迭代可以得到最优输出功率及最优增量成本.

当然本文仅仅研究了理想状态下的凸经济调度问题,在未来的工作中我们将会着手于以下工作与研究:

- 1) 优化随机 ADMM 算法在迭代中产生的曲线不稳定问题、波动问题;
- 2) 利用文献[19]提出的凸迭代和分支定界法来改进随机 ADMM 算法以解决某些非凸经济调度问题;
- 3) 如文献[20]中对于具有阀点负荷效应的非凸电力系统经济调度问题,随机 ADMM 算法是否仍然适用于求解问题的最优解或 KKT 解;
- 4) 如文献[17]中考虑发电系统中的丢包和时滞等信息传输问题给算法带来的影响,或者是在其他物理约束下,利用随机 ADMM 算法解决问题.

## 参考文献(References):

- [1] CHEN X, LI K J, XU B, et al. Biogeography-based learning particle swarm optimization for combined heat and power economic dispatch problem[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020; **208**: 106463.
- [2] 李建. 粒子群算法在经济调度问题中的应用[J]. *工业控制计算机*, 2018, **31**(11): 83-84. (LI Jian. Application of particle swarm optimization algorithm in economic dispatch problem[J]. *Industrial Control Computer*, 2018, **31**(11): 83-84. (in Chinese))
- [3] XIONG G J, SHI D Y. Orthogonal learning competitive swarm optimizer for economic dispatch problems[J].

- Applied Soft Computing*, 2018, **66**: 134-148.
- [4] CHOUHDRY Z U R, HASAN K M, RAJA M A Z. Design of reduced search space strategy based on integration of Nelder-Mead method and pattern search algorithm with application to economic load dispatch problem[J]. *Neural Computing & Applications*, 2017, **30**: 3693-3705.
- [5] SEN T, MATHUR H D. A new approach to solve economic dispatch problem using a hybrid ACO-ABC-HS optimization algorithm[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2016, **78**: 735-744.
- [6] ZOU D X, STEVEN L, KONG X Y, et al. Solving the combined heat and power economic dispatch problems by an improved genetic algorithm and a new constraint handling strategy[J]. *Applied Energy*, 2019, **237**: 646-670.
- [7] ZAMAN F, ELSAYED S M, RAY T, et al. Configuring two-algorithm-based evolutionary approach for solving dynamic economic dispatch problems[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2016, **53**: 105-125.
- [8] JIN K Q, YU M, HOU G L. Sampled-data self-triggered consensus-based economic dispatch problem under switching graph[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2020, **491**(2): 124371.
- [9] ZHANG K K, XIONG J, DAI X G, et al. On the convergence of event-triggered distributed algorithm for economic dispatch problem[J]. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2020, **122**: 106159.
- [10] JIN R Y, QIU H F, WENG L G. Distributed discrete-time event-triggered algorithm for economic dispatch problem[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2020, **138**: 507-512.
- [11] WEI H Y, JIAO X P, MU J J. Reduced-complexity linear programming decoding based on ADMM for LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2015, **19**(6): 909-912.
- [12] ZHOU Jianhui, LEI Yongmei. Asynchronous group-based ADMM algorithm under efficient communication structure[C]//2018 IEEE Intl Conf on Parallel & Distributed Processing With Applications, Ubiquitous Computing & Communications, Big Data & Cloud Computing, Social Computing & Networking, Sustainable Computing & Communications. 2018: 135-140. DOI: 10.1109/BDCLOUD.2018.00032.
- [13] CHALISE B K. ADMM-based beamforming optimization for physical layer security in a full-duplex relay system [C]//IEEE Signal Processing Society SigPort. Brighton, UK, 2019.
- [14] JIANG A, WAN J, TANG Y, et al. ADMM-based bipartite graph approximation[C]//2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Brighton, UK, 2019.
- [15] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, **3**(1): 1-122.
- [16] LI P, HU J P. An ADMM based distributed finite-time algorithm for economic dispatch problems[J]. *IEEE Access*, 2018, **6**: 30969-30976.
- [17] YANG Q, CHEN G, WANG T. ADMM-based distributed algorithm for economic dispatch in power systems with both packet drops and communication delays[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2020, **7**(3): 842-852.
- [18] BERTSEKAS D P, TSITSIKLIS J N. Neuro-dynamic programming: an overview[C]//Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. Tucson Arizona, USA, 1995.
- [19] ALAWODE K O, JUBRIL A M, KEHINDE L O, et al. Semidefinite programming solution of economic dispatch problem with non-smooth, non-convex cost functions[J]. *Electric Power Systems Research*, 2018, **164**: 178-187.
- [20] LEE S, SHIM H. Distributed algorithm for economic dispatch problem with separable losses[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, **3**(3): 685-690.