ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887 http://www.applmathmech.cn

二元热传导方程的 Phragmén-Lindelöf 型二择一结果*

李远飞， 曾 鹏， 陈雪姣

（广州华商学院 数据科学学院，广州 511300）

摘要： 考虑了二元热传导方程在半无穷区域上解的渐近性质，其中在柱体的侧面上施加局部非齐次 Neumann 条件.这种条件模拟了柱体侧面上的绝热材料受到局部破坏的情形.利用微分不等式技术和能量分析的方法，得到了热传导模型的 Phragmén-Lindelöf 型二择一结果.

关 键 词： 二元热传导模型； Phragmén-Lindelöf 型二择一； 能量分析

中图分类号： O175.29 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.420031

The Phragmén-Lindelöf Type Alternative Results for Binary Heat Conduction Equations

LI Yuanfei, ZENG Peng, CHEN Xuejiao

(*School of Data Science*, *Guangzhou Huashang College*, *Guangzhou* 511300, *P.R.China*)

Abstract: The asymptotic behavior of the solution to the binary heat conduction equation in the semi-infinite domain was considered, in which the local non-homogeneous Neumann condition was applied to the side of the cylinder. This condition simulates the local damage of the insulation material on the side of the cylinder. By means of the differential inequality technique and the energy analysis method, the Phragmén-Lindelöf-type alternative results of the heat conduction model were obtained.

Key words: binary heat conduction model; Phragmén-Lindelöf-type alternative; energy analysis

引 言

在偏微分方程中,经典的边界条件有 Dirichlet、Neumann 和 Robin 条件.对偏微分方程在半无穷柱体上解的渐近性质的研究一直是人们关注的热点.通常的做法是首先定义一个半无穷的柱体区域:

$$R = \{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2) \in D, x_3 > 0\},$$

其中 D 是坐标平面 x_1Ox_2 上的一个光滑有界凸区域.再假设方程的解在柱体的侧面上满足齐次 Dirichlet 或 Neumann 条件,利用能量分析的方法得到解的空间二择性.详细的内容可参见文献[1-7].

* **收稿日期：** 2021-01-28；**修订日期：** 2021-03-24

基金项目： 广东省普通高校创新团队项目(2020WCXTD008);广州华商学院科研团队项目(2021HSKT01)

作者简介： 李远飞(1982—),男,特聘教授,博士(通讯作者. E-mail：liqfd@163.com).

引用格式： 李远飞，曾鹏，陈雪姣. 二元热传导方程的 Phragmén-Lindelöf 型二择一结果[J]. 应用数学和力学，2021，**42**(9)：968-978.

考虑到实际中热量在柱体侧面上与外界发生热交换的情形,Horgan 和 Payne[8]研究了稳态的调和方程

$$\Delta u = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in R$$

在非线性边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} + g(u) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial D$$

下的解空间二择性,其中 $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$.文献[9]把文献[8]的研究推广到了瞬态的热量方程中,在对方程中参数的不同范围上,证明了解要么指数式(多项式)增长,要么指数式(多项式)衰减.

我们尤其需要注意,文献[10]研究了具有局部非齐次 Neumann 边界条件的热量方程在有界区域 Ω 上解的存在性以及爆破时间的下界.首先把区域 Ω 的边界记为 $\partial\Omega$,以及 $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.所谓的局部非齐次 Neumann 边界条件是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \boldsymbol{x} \in \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = u^q, & \boldsymbol{x} \in \Gamma_2. \end{cases}$$

这种边界条件模拟了柱体表面的绝热材料受到破坏或者受到局部破坏的情形.受此启发, 考虑到柱体侧面上的绝热材料局部受到破坏的情况, 本文研究了热量方程在局部非齐次 Neumann 边界条件下的空间渐近性质.这种类型的研究可称为 Phragmén-Lindelöf 型二择一型研究, 在物理、力学和生物学等学科上有巨大的应用价值.Phragmén-Lindelöf 型二择一型研究是指方程的解在空间变量趋于无穷时要么指数式(多项式)增长要么指数式(多项式)衰减,关于此方面的最新成果可见文献[11-14].本文的主要创新点如下: 首先我们考虑的非齐次 Neumann 边界条件事实上是一个非线性条件,这就造成文献中一些常用的不等式在本文中就不再成立.我们通过对非线性项作出适当的限制, 从而得到一个关键的微分不等式,然后得到了解的二择性.其次, 我们给出了一些注解, 对本文的结果进行了推广.

1　准 备 工 作

在本文中, 我们考虑一个二元混合物中热传导方程非线性模型:

$$u_t = k_1\Delta u + f_1(u,v), \qquad (\boldsymbol{x},t) \in R \times (0, T), \tag{1}$$

$$v_t = k_2\Delta v + f_2(u,v), \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in R \times (0, T), \tag{2}$$

其中 k_1, k_2 是大于零的常数, 函数 f_1, f_2 满足

$$uf_1(u,v) + vf_2(u,v) \leqslant 0. \tag{3}$$

模型(1)~(3)适用于层状复合材料导热性能的研究,Iesan[15]、Quintanilla[16]以及 Iesan 等[17]对该模型做了进一步的讨论和研究.

区域 D 的边界记为 ∂D,且 $\partial D = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$.本文将经常用到以下记号:

$$R(z) := \{\boldsymbol{x} \in R,\ x_3 \geqslant z \geqslant 0\},\ D(z) := \{(x_1,x_2) \in D,\ x_3 = z \geqslant 0\},$$

$$\Omega_i(z) := \{(x_1,x_2) \in \Omega_i,\ x_3 = z \geqslant 0\},\ \Omega_i^*(z) := \{(x_1,x_2) \in \Omega_i,\ x_3 \geqslant z \geqslant 0\},$$

其中　$i = 1,2$.

模型(1)~(3)具有以下局部非齐次 Neumann 边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \qquad (\boldsymbol{x},\ t) \in \Omega_1^*(0) \times (0,T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h_1(u) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial n} + h_2(v) = 0, \qquad (\boldsymbol{x},\ t) \in \Omega_2^*(0) \times (0,T), \tag{5}$$

其中函数 h_1, h_2 满足

$$uh_1(u) \geqslant c_1 | u |^{2p},\ vh_2(v) \geqslant c_2 | v |^{2q}, \qquad c_1,\ c_2 > 0,\ p,\ q \geqslant \frac{1}{2}. \tag{6}$$

在柱体的有限端 $D \times \{0\} \times (0,T)$, 有

$$u=g_1(x_1,x_2,t),\ v=g_2(x_1,x_2,t),\tag{7}$$

其中 g_1 和 g_2 是大于零的可微函数,并在柱体的侧面上满足兼容性条件.初始条件为

$$u=v=0,\qquad \boldsymbol{x}\in R,\ t=0.\tag{8}$$

我们给出以下几个引理.

引理 1[18] 如果 ω 是一个光滑函数,D 是二维空间中的一个有界区域, 则存在大于零的常数 C_1 使得

$$\int_D \omega^2\mathrm{d}A\leqslant \Lambda_1\left[\left(\int_{\Omega_2}|\omega|\,\mathrm{d}l\right)^2+\int_D|\nabla_2\omega|^2\mathrm{d}A\right],$$

其中 ∇_2 表示二维的梯度算子.

引理 2 设函数 $F(z)$ 是一个可微函数,$F'(z)\geqslant 0$ 且 $F(z)$ 满足:对于 $z\geqslant z_0$,

$$|F(z)|\leqslant m_0[F'(z)]^{1/2}+m_1[F'(z)]+m_2[F'(z)]^{3/2},\qquad m_1,\ m_2>0,\ 0<m_0<\frac{m_1^2}{3m_2^2}.\tag{9}$$

1) 若存在 $z_0\geqslant 0$ 使得 $F(z_0)\geqslant 0$,则存在大于零的常数 d_1 和 d_2 使得

$$F(z)\geqslant[d_1z+d_2]^3$$

成立.

2) 若对任意的 $z\geqslant 0$ 使得 $F(z)<0$, 则有

$$\lim_{x\to\infty}\left[-F(z)\exp\left(\frac{m_2}{2m_1}z\right)\right]\leqslant d_3,$$

其中 d_3 是大于零的常数.

证明 1) 由于 $F'(z)\geqslant 0$ 且 $F(z_0)\geqslant 0$,所以 $F(z)\geqslant F(z_0)\geqslant 0$,$z\geqslant z_0$.因此由式(9)可得

$$F(z)\leqslant m_1[F'(z)]+m_2[F'(z)]^{3/2},\qquad z\geqslant z_0.\tag{10}$$

式(10)可以改写为

$$\left\{[F'(z)]^{1/2}+\frac{m_1}{3m_2}\right\}^3\geqslant\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3},\qquad z\geqslant z_0,$$

即

$$F'(z)\geqslant\left[\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right]^2,\qquad z\geqslant z_0.\tag{11}$$

对式(11)从 z_0 到 z 积分,可得

$$3\int_{z_0}^{z}\frac{\left[\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right]^2+\frac{2m_1}{3m_2}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right]+\frac{m_1^2}{9m_2^2}}{\left[\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right]^2}\times$$
$$\mathrm{d}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right]\geqslant z-z_0,$$

即

$$3\left[\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z_0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}\right]+\frac{2m_1}{m_2}\left[\ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)-\right.$$
$$\left.\ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z_0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)\right]-$$
$$\frac{\frac{m_1^2}{3m_2^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}}+\frac{\frac{m_1^2}{3m_2^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z_0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}}\geqslant z-z_0.\tag{12}$$

舍弃式(12)左边的第五项,并利用不等式

$$\sqrt[3]{a+b} \leqslant \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}, \qquad a, b > 0.$$

由式(12)可得

$$\frac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\sqrt[3]{F(z)} + \ln\sqrt[3]{F(z)} \geqslant \frac{m_2}{2m_1}(z-z_0) + \frac{m_2}{2m_1}Q_1(z_0), \tag{13}$$

其中

$$Q_1(z_0) = 3\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z_0) + \frac{m_1^3}{27m_2^3}} - \frac{m_1}{m_2} + \ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{m_2}F(z_0) + \frac{m_1^3}{27m_2^3}} - \frac{m_1}{3m_2}\right) - \frac{2m_1}{m_2}\ln\frac{1}{\sqrt[3]{m_2}} - \frac{\dfrac{m_1^2}{3m_2^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{m_2}F(z_0) + \dfrac{m_1^3}{27m_2^3}} - \dfrac{m_1}{3m_2}}.$$

注意到 $e^x > x, x > 0$, 所以

$$\frac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\sqrt[3]{F(z)} + \ln\sqrt[3]{F(z)} = \ln\left[\exp\left(\frac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\sqrt[3]{F(z)}\right)\sqrt[3]{F(z)}\right] \leqslant \ln\left[\exp\left(\left(1 + \frac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\right)\sqrt[3]{F(z)}\right)\right] = \left(1 + \frac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\right)\sqrt[3]{F(z)}. \tag{14}$$

结合式(13)和(14),可得

$$F(z) \geqslant \left[\frac{m_2}{2m_1(1 + 3m_2/(2m_1\sqrt[3]{m_2}))}(z-z_0) + \frac{m_2}{2m_1(1 + 3m_2/(2m_1\sqrt[3]{m_2}))}Q_1(z_0)\right]^3, \tag{15}$$

取

$$d_1 = \frac{m_2}{2m_1\left(1 + \dfrac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\right)},\ d_2 = \frac{m_2}{2m_1\left(1 + \dfrac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\right)}Q_1(z_0) - \frac{m_2 z_0}{2m_1\left(1 + \dfrac{3m_2}{2m_1\sqrt[3]{m_2}}\right)},$$

即可完成引理 2 中 1) 的证明.

2) 由于对任意的 $z \geqslant 0$ 使得 $F(z) < 0$, 所以

$$-F(z) \leqslant m_0[F'(z)]^{1/2} + m_1[F'(z)] + m_2[F'(z)]^{3/2}, \qquad z \geqslant 0. \tag{16}$$

于是由式(16)可得

$$F'(z) \geqslant \left[\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z_0) + \frac{m_1^3}{27m_2^3}} - \frac{m_1}{3m_2}\right]^2, \qquad z \geqslant 0. \tag{17}$$

对式(17)从 0 到 z 积分,可得

$$3\int_0^z \frac{\left[\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(z) + \dfrac{m_1^3}{27m_2^3}} - \dfrac{m_1}{3m_2}\right]^2 + \dfrac{2m_1}{3m_2}\left[\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(z) + \dfrac{m_1^3}{27m_2^3}} - \dfrac{m_1}{3m_2}\right] + \dfrac{m_1^2}{9m_2^2}}{\left[\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(z) + \dfrac{m_1^3}{27m_2^3}} - \dfrac{m_1}{3m_2}\right]^2} \times \mathrm{d}\left[\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z) + \frac{m_1^3}{27m_2^3}} - \frac{m_1}{3m_2}\right] \leqslant -z,$$

即

$$3\left[\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z) + \frac{m_1^3}{27m_2^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(0) + \frac{m_1^3}{27m_2^3}}\right] +$$

$$\frac{2m_1}{m_2}\left[\ln\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)-\ln\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)\right]-$$

$$\frac{\dfrac{m_1^2}{3m_2^2}}{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(z)+\dfrac{m_1^3}{27m_2^3}}-\dfrac{m_1}{3m_2}}+\frac{\dfrac{m_1^2}{3m_2^2}}{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(0)+\dfrac{m_1^3}{27m_2^3}}-\dfrac{m_1}{3m_2}}\leqslant -z. \tag{18}$$

在式(18)中舍弃右边的第一项和第六项，可得

$$\ln\left[\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)\exp\left(-\frac{\dfrac{m_1}{6m_2}}{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(z)+\dfrac{m_1^3}{27m_2^3}}-\dfrac{m_1}{3m_2}}\right)\right]\leqslant$$

$$-\frac{m_2}{2m_1}z+\frac{3m_2}{2m_1}\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}+\ln\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right).$$

所以

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(z)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)\exp\left(-\frac{\dfrac{m_1}{6m_2}}{\sqrt[3]{-\dfrac{1}{m_2}F(0)+\dfrac{m_1^3}{27m_2^3}}-\dfrac{m_1}{3m_2}}\right)\leqslant Q_0\exp\left(-\frac{m_2}{2m_1}z\right), \tag{19}$$

其中

$$Q_0=\ln\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}-\frac{m_1}{3m_2}\right)\exp\left(\frac{3m_2}{2m_1}\sqrt[3]{-\frac{1}{m_2}F(0)+\frac{m_1^3}{27m_2^3}}\right).$$

由于 $-F(z)>0$，结合 $F(z)$ 的单调性以及式(19)可知 $-F(z)$ 必然随 $z\to\infty$ 呈指数式衰减，且衰减率至少和 $\exp(-zm_2/(2m_1))$ 一样快。证毕。

引理 3 设函数 $F(z)$ 是一个可微函数，$F'(z)\geqslant 0$ 且 $F(z)$ 满足

$$|F(z)|\leqslant m_3[F'(z)]^{1/2}+m_4[F'(z)],\qquad m_3,\ m_4>0. \tag{20}$$

1) 若存在 $z_0\geqslant 0$ 使得 $F(z_0)\geqslant 0$，则存在大于零的常数 d_4，使得

$$F(z)\geqslant d_4\exp\left(\frac{1}{m_4}z\right)$$

成立。

2) 若对任意的 $z\geqslant 0$ 使得 $F(z)<0$，则有

$$\lim_{x\to\infty}\left[-F(z)\exp\left(\frac{m_2}{2m_1}z\right)\right]\leqslant d_5,$$

其中 d_5 是大于零的常数。

证明 1) 若存在 $z_0\geqslant 0$ 使得 $F(z_0)\geqslant 0$，与引理 2 类似，由式(20)可得

$$F(z)\leqslant m_3[F'(z)]^{1/2}+m_4[F'(z)],\qquad z\geqslant z_0. \tag{21}$$

在式(21)中解出 $F'(z)$ 可得

$$F'(z)\geqslant\left[\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right]^2. \tag{22}$$

对式(22)从 z_0 到 z 积分，可得

$$2m_4\int_{z_0}^{z}\frac{\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}}{\left[\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right]^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right)\geqslant z-z_0,$$

即

$$2m_4\ln\left(\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right)-2m_4\ln\left(\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z_0)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right)-$$
$$\frac{m_3}{\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}}+\frac{m_3}{\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z_0)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}}\geqslant z-z_0. \tag{23}$$

在式(23)中舍弃第三项,可得

$$\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\geqslant Q_1\exp\left(\frac{1}{2m_4}z\right), \tag{24}$$

其中

$$Q_1=m_5\exp\left(\frac{-m_3}{2m_5m_4}-\frac{1}{2m_4}z_0\right),\ m_5=\sqrt{\frac{1}{m_4}F(z_0)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}.$$

再利用不等式

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},\qquad a,b>0,$$

然后在式(24)两边平方可得

$$F(z)\geqslant m_4Q_1^2\exp\left(\frac{1}{m_4}z\right).$$

在引理 2 中取 $d_4=m_4Q_1^2$ 即可.

2）若对任意的 $z\geqslant 0$ 使得 $F(z)<0$, 类似地, 可得

$$-F(z)\leqslant m_3[F(z)]^{1/2}+m_4[F(z)],\qquad z\geqslant 0.$$

于是可得

$$2m_4\ln\left(\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right)-2m_4\ln\left(\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(0)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right)-$$
$$\frac{m_3}{\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}}+\frac{m_3}{\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(0)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}}\leqslant -z. \tag{25}$$

在式(25)中舍弃第四项, 再采取和式(19)类似的计算可得

$$\left(\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}\right)\exp\left(-\frac{\frac{m_3}{2m_4}}{\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(z)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}}\right)\leqslant Q_2\exp\left(-\frac{1}{2m_4}z\right), \tag{26}$$

其中

$$Q_2=\sqrt{-\frac{1}{m_4}F(0)+\frac{m_3^2}{4m_4^2}}-\frac{m_3}{2m_4}.$$

与引理 2 类似, 由式(26)即可完成对引理 3 的证明.证毕.

2　二择一定理

为了推导本文的二择一结果，首先引入一个辅助函数：

$$E(z,t)=\int_0^t\int_{D(z)}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x_3}u+k_2\frac{\partial v}{\partial x_3}v\right)\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta:=J_1+J_2. \tag{27}$$

设 z_0 是 x_3 轴上的某个点满足 $0\leqslant z_0\leqslant z$.利用散度定理以及方程(1)和(2)，可得

$$\begin{aligned}E(z,t)-E(z_0,t)=&\int_0^t\int_{z_0}^z\int_{D(\xi)}[k_1\nabla\cdot(\nabla uu)+k_2\nabla\cdot(\nabla vv)]\mathrm{d}A\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\&\int_0^t\int_{z_0}^z\int_{\Omega_2(\xi)}[k_1h_1(u)u+k_2h_2(v)v]\mathrm{d}l\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\\&\int_0^t\int_{z_0}^z\int_{D(\xi)}[k_1|\nabla u|^2+k_2|\nabla v|^2]\mathrm{d}A\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\frac{1}{2}\int_{z_0}^z\int_{D(\xi)}(u^2+v^2)\mathrm{d}A\mathrm{d}\xi\,\Big|_{\eta=t}-\\&\int_0^t\int_{z_0}^z\int_{D(\xi)}[uf_1(u,v)+vf_2(u,v)]\mathrm{d}A\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\\&\int_0^t\int_{z_0}^z\int_{\Omega_2(\xi)}[k_1h_1(u)u+k_2h_2(v)v]\mathrm{d}l\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \tag{28}$$

对式(28)微分，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)=&\int_0^t\int_{D(z)}[k_1|\nabla u|^2+k_2|\nabla v|^2]\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta+\frac{1}{2}\int_{D(z)}(u^2+v^2)\mathrm{d}A\,\Big|_{\eta=t}-\\&\int_0^t\int_{D(z)}[uf_1(u,v)+vf_2(u,v)]\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta+\int_0^t\int_{\Omega(z)}[k_1h_1(u)u+k_2h_2(v)v]\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \tag{29}$$

接下来，使用 Hölder 不等式、Young 不等式和引理 1，由式(27)可得

$$\begin{aligned}|J|_1\leqslant& k_1\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_{D(z)}u^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\leqslant\\&k_1\sqrt{\Lambda_1}\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\left[\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}|u|\,\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right)^2+\int_0^t\int_{D(z)}|\nabla_2u|^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right]^{1/2}\leqslant\\&\frac{1}{2}k_1\sqrt{\Lambda_1}\int_0^t\int_{D(z)}|\nabla u|^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta+\\&\frac{1}{2}k_1\sqrt{\Lambda_1}\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}|u|\,\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right).\end{aligned} \tag{30}$$

利用式(6)，有

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}|u|\,\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right)\leqslant\\&\quad|\Omega_2|^{(2p-1)/(2p)}\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}|u|^{2p}\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right)^{1/(2p)}\leqslant\\&\quad|\Omega_2|^{(2p-1)/(2p)}c_1^{-1/(2p)}\left[\frac{p}{p+1}\varepsilon_1^{-p}\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{(p+1)/(2p)}+\right.\\&\quad\left.\frac{1}{p+1}\varepsilon_1\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}uh_1(u)\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right)^{(p+1)/(2p)}\right],\end{aligned}$$

其中 ε_1 是大于零的任意常数，$|\Omega_2|$ 表示区域 Ω_2 的长度.取 $\varepsilon_1=p^{1/(p+1)}$ 再把上式代入到式(30)，可得

$$\begin{aligned}|J_1|\leqslant&\frac{1}{2}k_1\sqrt{\Lambda_1}\int_0^t\int_{D(z)}|\nabla u|^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta+\\&k_1\sqrt{\Lambda_1}\,|\Omega_2|^{(2p-1)/(2p)}c_1^{-1/(2p)}\left[\frac{p}{p+1}\varepsilon_1^{-p}\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{(p+1)/(2p)}+\right.\\&\left.\frac{1}{p+1}\varepsilon_1\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}|u|^{2p}\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right)^{(p+1)/(2p)}\right].\end{aligned} \tag{31}$$

类似地,可得

$$|J_2| \leqslant \frac{1}{2}k_2\sqrt{\Lambda_1}\int_0^t\int_{D(z)}|\nabla v|^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta + k_2\sqrt{\Lambda_1}\,|\Omega_2|^{(2q-1)/(2q)}c_2^{-1/(2q)}\left[\frac{q}{q+1}\varepsilon_2^{-q}\left(\int_0^t\int_{D(z)}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2\mathrm{d}A\mathrm{d}\eta\right)^{(q+1)/(2q)} + \frac{1}{q+1}\varepsilon_2\left(\int_0^t\int_{\Omega_2(z)}|v|^{2q}\mathrm{d}l\mathrm{d}\eta\right)^{(q+1)/(2q)}\right], \tag{32}$$

其中 $\varepsilon_2 = q^{1/(q+1)}$.把式(31)和(32)代入式(27),可得

$$|E(z,t)| \leqslant C_1\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right] + C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(p+1)/(2p)} + C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(q+1)/(2q)}, \tag{33}$$

其中

$$C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda_1}\max\{k_1,k_2\},\ C_2 = k_1\sqrt{\Lambda_1}\,|\Omega_2|^{(2p-1)/(2p)}C_1^{-1/(2p)}\varepsilon_1^{-p},$$

$$C_3 = k_2\sqrt{\Lambda_1}\,|\Omega_2||\Omega_2|^{(2q-1)/(2q)}c^{-1/(2q)}\frac{p}{p+1}\varepsilon_1^{-p}.$$

下一步我们讨论在 p, q 的不同范围上, 方程(1)~(8)解的空间渐近性质.

① 当 $1/2 \leqslant q \leqslant p < 1$ 时,$1 < (p+1)/(2p) \leqslant (q+1)/(2q) \leqslant 3/2$.于是利用 Young 不等式,可得

$$C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(p+1)/(2p)} = C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(2p-1)/p}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(3/2)((1-p)/p)} \leqslant \frac{2q-1}{q}C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right] + \frac{1-p}{p}C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{3/2}. \tag{34}$$

类似地

$$C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(q+1)/(2q)} \leqslant \frac{2q-1}{q}C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right] + \frac{1-q}{q}C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{3/2}. \tag{35}$$

把式(34)和(35)代入式(33),可得

$$|E(z,t)| \leqslant C_4\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right] + C_5\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{3/2}, \tag{36}$$

其中

$$C_4 = C_1 + \frac{2p-1}{p}C_2 + \frac{2q-1}{q}C_3,\ C_5 = \frac{1-p}{p}C_2 + \frac{1-q}{q}C_3.$$

② 当 $1/2 \leqslant q \leqslant 1 < p$ 时,$1/2 < (p+1)/(2p) < 1 < (q+1)/(2q) \leqslant 3/2$.利用 Young 不等式,可得

$$C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(p+1)/(2p)} = C_2\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(1/2)(p-1)/p}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{1/p} \leqslant \frac{p-1}{p}C_2\varepsilon_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{1/2} + \frac{1}{p}C_2\varepsilon_3^{1-p}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right], \tag{37}$$

其中 ε_3 是大于零的任意常数.把式(35)和(37)代入到式(33),可得

$$|E(z,t)| \leqslant C_6\varepsilon_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{1/2} + C_7\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right] + C_8\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{3/2}, \tag{38}$$

其中

$$C_6 = \frac{p-1}{p}C_2,\ C_7 = C_1 + \frac{1}{p}C_2\varepsilon_3^{1-p} + \frac{2q-1}{q}C_3,\ C_8 = \frac{1-q}{q}C_3.$$

在式(36)中利用引理 2($m_0 = 0$);在式(38) 中取 $\varepsilon_3 < C_7^2/(3C_6C_8^2)$, 然后利用引理 2,可得到以下定理.

定理 1　设 u, v 为问题(1)~(8)在一个半无穷柱体 R 上的解.当 $1/2 \leqslant q < 1$,$1/2 \leqslant p < 1$ 或 $p > 1$ 时, 则以下两种情况必有一种成立, 即能量函数要么随 $z \to \infty$ 多项式增长, 且增长速度至少和 z^3 一样快; 要么

随 $z \to \infty$ 指数式衰减, 且衰减速度至少和 $\exp(-zC_5/(2C_4))$ 一样快.

注 1 当能量函数衰减时, $\lim_{z\to\infty} E(z,t) = 0$.此时我们对式(29) 从 0 到 z 积分,可得

$$-E(z,t) = \int_0^t \int_{R(z)} [k_1 |\nabla u|^2 + k_2 |\nabla v|^2] \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\eta + \frac{1}{2}\int_{R(z)} (u^2 + v^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \bigg|_{\eta = t} - \int_0^t \int_{R(z)} [uf_1(u,v) + vf_2(u,v)] \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\eta + \int_0^t \int_{\Omega_2^*(z)} [k_1 h_1(u)u + k_2 h_2(v)v] \mathrm{d}l\mathrm{d}\eta.$$

③ 当 $p \geqslant q > 1$ 时,$1/2 < (p+1)/(2p) \leqslant (q+1)/(2q) < 1$.与式(37)类似,可得

$$C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{(q+1)/(2q)} \leqslant \frac{q-1}{q}C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{1/2} + \frac{1}{q}C_3\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]. \tag{39}$$

把式(37)和(39)代入式(33), 可得

$$|E(z,t)| \leqslant C_9\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]^{1/2} + C_{10}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right], \tag{40}$$

其中

$$C_9 = \frac{p-1}{p}C_2\varepsilon_3 + \frac{q-1}{q}C_3,\ C_{10} = C_1 + \frac{1}{p}C_2\varepsilon_3^{1-p} + \frac{1}{q}C_3.$$

在式(40)中利用引理 3, 可得以下定理.

定理 2 设 u, v 为问题(1)~(8)在一个半无穷柱体 R 上的解.当 $p \geqslant q > 1$ 时,则以下两种情况必有一种成立,即能量函数要么随 $z \to \infty$ 指数式增长, 且增长速度至少和 $\exp(z/C_{10})$ 一样快; 要么随 $z \to \infty$ 指数式衰减, 且衰减速度至少和 $\exp(-z/(2C_{10}))$ 一样快.

④ 当 $p = q = 1$ 时,式(33)可以写为

$$|E(z,t)| \leqslant C_{11}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right], \tag{41}$$

其中 $C_{11} = C_1 + C_2 + C_3$.由式(41)可知

$$E(z,t) \leqslant C_{11}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]$$

或者

$$-E(z,t) \leqslant C_{11}\left[\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)\right]$$

成立.

对上式积分可得以下定理.

定理 3 设 u, v 为问题(1)~(8)在一个半无穷柱体 R 上的解.当 $p = q = 1$ 时,则以下两种情况必有一种成立,即能量函数要么随 $z \to \infty$ 指数式增长, 且增长速度至少和 $\exp(z/C_{11})$ 一样快; 要么随 $z \to \infty$ 指数式衰减, 且衰减速度至少和 $\exp(-z/C_{11})$ 一样快.

注 2 若 $f_1(u,v) = -\tau(u-v)$, $f_2(u,v) = \tau(u-v)$, $\tau > 0$, 方程(1)和(2)在刚性固体二元混合物中有着广泛的应用. Horgan 和 Quintanilla[19] 就获得了解在柱体区域上的空间衰减估计, 不过他们在柱体侧面上假设解满足齐次 Dirichlet 边界条件.然而我们的结果可以直接推广到此种情形.更一般地, 我们的结果也可以向更加一般的情形推广, 例如:

(i) 线性函数

$$f_1(u,v) = -\tau_1 u + \tau_2 v,\ f_2(u,v) = \tau_3 u - \tau_4 v, \qquad \tau_i > 0,\ \tau_1\tau_4 \geqslant \frac{1}{4}(\tau_2 + \tau_3)^2.$$

(ii) 非线性函数

$$f_1(u,v) = -auv^2,\ f_2(u,v) = buv^2, \qquad a \geqslant b > 0.$$

注 3 本文的方法可以向更一般化的抛物方程推广, 例如:

$$\tau_1 u_t + \tau_2 v_t = k_1 \Delta u + f_1(u,v),$$
$$\tau_2 u_t + \tau_3 v_t = k_2 \Delta v + f_2(u,v),$$

其中　　$\tau_1 > 0, \tau_1\tau_3 > \tau_2^2$.

3　结论及展望

本文把已有文献中的结果推广到了具有局部非线性边界条件的二元抛物方程之中,我们的主要工作是控制了边界项.然而本文的研究还可以持续下去:第一,可以利用文献[20]的方法研究方程(1)和(2)在局部非线性条件下解的存在性以及爆破现象;第二, 如果方程(1)和(2)受到一个辅助条件的约束, 该条件是由温度的初始值和之后某个时刻的值的组合构成,即

$$u(\boldsymbol{x},0) = \alpha u(\boldsymbol{x},T), \tag{42}$$

其中 α 是一个非零常数.这种条件是由 Showalter[21]引入的, 并一直受到学术界的关注.如果式(8)由式(42)代替, 此时研究问题 (1)和(2)解的空间渐近性是一个有意思的话题.据笔者所知, 这种类型的研究目前还比较少, 是我们接下来关注的重点.

致谢　本文作者衷心感谢广州华商学院科研团队项目(2021HSKT01)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] LIESS O. Necessary conditions in Phragmén-Lindelöf type estimates and decomposition of holomorphic functions[J]. *Mathematische Nachrichten*, 2017, **290**(8/9): 1328-1346.

[2] 李远飞, 石金诚, 曾鹏. 三维柱体上调和方程的二择一结果[J]. 海南大学学报自然科学版, 2020, **38**(1): 6-12. (LI Yuanfei, SHI Jincheng, ZENG Peng. Phragmén-Lindelöf alternative type results for the harmonic equation in a 3D cylinder[J]. *Natural Science Journal of Hainan University*, 2020, **38**(1): 6-12.(in Chinese))

[3] MARKOWSKY G. The exit time of planar Brownian motion and thePhragmén-Lindelöf Principle[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2015, **422**(1): 638-645.

[4] GENTILI G, STOPPATO C, STRUPPA D C. A Phragmén-Lindelöf principle for slice regular functions[J]. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 2011, **18**(4): 749-759.

[5] LIU Yan, LIN Changhao. Phragmén-Lindelöf alternative type alternative results for the stokes flow equation [J]. *Mathematical Inequalities & Applications*, 2006, **9**(4): 671-694.

[6] 李远飞. 在一个半无穷柱体上的非标准 Stokes 流体方程的二择一问题[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(4): 406-419.(LI Yuanfei. Phragmén-Lindelöf type results for non-standard Stokes flow equations around semi-infinite cylinder[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(4): 406-419.(in Chinese))

[7] 李远飞, 肖胜中, 郭连红, 等. 一类二阶拟线性瞬态方程组的 Phragmén-Lindelöf 型二择性结果[J]. 吉林大学学报(理学版), 2020, **58**(5): 1047-1054.(LI Yuanfei, XIAO Shengzhong, GUO Lianhong, et al. Phragmén-Lindelöf type alternative results for a class of second order quasilinear transient equations[J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2020, **58**(5): 1047-1054.(in Chinese))

[8] HORGAN C O, PAYNE L E. Phragmén-Lindelöf type results for harmonic functions with nonlinear boundary conditions[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1993, **122**(2): 123-144.

[9] 李远飞, 李志青. 具有非线性边界条件的瞬态热传导方程的二择一结果[J]. 数学物理学报, 2020, **40A**(5): 1248-1258.(LI Yuanfei, LI Zhiqing. Phragmén-Lindelöf type results for transient heat conduction equation with nonlinear boundary conditions[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2020, **40A**(5): 1248-1258.(in Chinese))

[10] YANG X, ZHOU Z F. Blow-up problems for the heat equation with a local nonlinear Neumann boundary condition[J]. *Journal of Differential Equations* 2016, **261**(5): 2738-2783.

[11] LESEDUARTE M C, QUINATANILLA R. Phragmén-Lindelöf of alternative for the Laplace equation with dynamic boundary conditions[J]. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2017, **7**(4): 1323-1335.

[12] 李远飞, 陈雪姣, 石金诚. 二元混合物中的热传导方程 Phragmén-Lindelöf 二择性[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, **55**(12): 1-12, 24.(LI Yuanfei, CHEN Xuejiao, SHI Jincheng. Phragmén-Lindelöf alternative for the heat conduction equations in a binary mixture[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2020, **55**(12): 1-12, 24.(in Chinese))

[13] 李远飞, 曾鹏. 具有非线性边界条件的调和方程在无界区域上的 Phragmén-Lindelöf 二择性结果[J]. 河南大学

学报(自然科学版), 2020, **50**(3): 365-372.(LI Yuanfei, ZENG Peng. Phragmén-Lindelöf alternative type results for the harmonic equation with nonlinear boundary conditions in an unbounded region[J]. *Journal of Henan University* (*Natural Science*), 2020, **50**(3): 365-372.(in Chinese))

[14] JAVIER J G, JAVIER S, GERHARD S. A Phragmén-Lindelöf theorem via proximate orders, and the propagation of asymptotics[J]. *The Journal of Geometric Analysis Volume*, 2020, **30**(4): 3458-3483.

[15] IESAN D. A theory of mixtures with different constituent temperatures[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1997, **20**(2): 147-167.

[16] QUINTANILLA R. Study of the solutions of the propagation of heat in mixtures[J]. *Dynamics of Continuous*, *Discrete and Impulsive Systems* (*Series B*): *Applications and Algorithms*, 2001, **8**(1): 15-28.

[17] IESAN D, QUINTANILLA R. On the problem of propagation of heat in mixtures[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **4**(3): 529-552.

[18] CIALET P G. *Mathematical Elasticity*(*Vol I*): *Three-Dimensional Elasticity*[M]. *Studies in Mathematics and Its Applications*. Amsterdam, North-Holland: Springer, 1988.

[19] HORGAN C, QUINTANILLA R. Spatial decay of transient end effects for nonstandard linear diffusion problems [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2005, **70**(1): 119-128.

[20] 李远飞, 肖胜中, 陈雪姣. 非线性边界条件下具有变系数的热量方程解的存在性及爆破现象[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 92-101.(LI Yuanfei, XIAO Shengzhong, CHEN Xuejiao. Existence and blow-up phenomena of solution to heat equations with variable coefficients under nonlinear boundary condutions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 92-101.(in Chinese))

[21] SHOWALTER R E. Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations[J]. *Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis*, 1985, **110**: 421-425.