

Internet路由器随机建模与收敛性分析

周 军, 张 健, 杨顺枫

Stochastic Modeling and Convergence Analysis of Internet Routers

ZHOU Jun, ZHANG Jian, and YANG Shunfeng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420026>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

同时具有logistic出生和Markov切换的随机SIRS传染病模型的动力学

Dynamics of a Class of Stochastic SIRS Infectious Disease Models With Both Logistic Birth and Markov Switching

应用数学和力学. 2021, 42(12): 1327-1337

具有随机扰动和Markov切换的中立型耦合神经网络的自适应同步

Adaptive Synchronization of Neutral-Type Coupled Neural Networks With Stochastic Perturbations and Markovian Jumpings

应用数学和力学. 2020, 41(12): 1381-1391

具有白噪声的随机格点系统的随机吸引子的Kolmogorov熵

Kolmogorov Entropy of Random Attractors for Stochastic Lattice Systems With White Noise

应用数学和力学. 2021, 42(7): 735-740

基于多切换传输的复变量混沌系统的有限时组合同步控制

Finite-Time Combination Synchronization Control of Complex-Variable Chaotic Systems With Multi-Switching Transmission

应用数学和力学. 2019, 40(11): 1299-1308

对偶变量块体混合元及其位移元的收敛性和精度分析

Convergence and Precision of the Dual-Variable Brick Mixed Element and Its Displacement Element

应用数学和力学. 2017, 38(2): 153-162

Hilbert空间中求解分裂可行问题CQ算法的强收敛性

Strong Convergence of CQ Algorithms for Split Feasibility Problems in the Hilbert Spaces

应用数学和力学. 2019, 40(1): 108-114



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

Internet 路由器随机建模与收敛性分析*

周 军^{1,2}, 张 健¹, 杨顺枫¹

(1. 西南林业大学 数理学院, 昆明 650224;
2. 东华大学 信息科学与技术学院, 上海 201620)

摘要: 目前建立的路由收敛模型大部分都是确定性模型, 而路由器在收敛过程中存在丢包、链路噪声、互连拓扑结构突变等现象. 针对这些随机问题, 该文引入 Bernoulli 白序列分布、Wiener 过程、Markov 过程, 提出了一种新的随机动力系统模型, 应用随机微分方程理论和随机分析方法得出其路由收敛的充分条件, 结果证明, 随机环境下路由状态收敛与路由器连接拓扑的 Laplace 矩阵、Markov 切换的平稳分布、网络中数据包的成功传输率以及噪声强度息息相关. 最后通过一个数值实例验证了相关结论的有效性.

关键词: 路由收敛; Gauss 白噪声; Laplace 矩阵; Markov 切换; Itô 公式
中图分类号: TP393 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420026

Stochastic Modeling and Convergence Analysis of Internet Routers

ZHOU Jun^{1,2}, ZHANG Jian¹, YANG Shunfeng¹

(1. School of Mathematics and Physics, Southwest Forestry University, Kunming 650224, P.R.China;
2. College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, P.R.China)

Abstract: The existent route convergence models are mainly deterministic ones, and various phenomena, such as packet losses, link noises, and sudden changes in interconnecting topology will occur in the route convergence process. Aimed at these random problems, a new stochastic dynamic system model was proposed by means of the Bernoulli white sequence distribution, the Wiener process and the Markov process. Based on the stochastic differential equation theory and the stochastic analysis methods, the sufficient conditions for the route convergence were given. The results prove that, the convergence of the routing state in a random environment is closely related to the Laplacian matrix of the router connection topology, the smooth distribution of the Markov switching, the successful transmission rate of the data packets, and the noise intensity in the network. Finally, a numerical example illustrates the effectiveness of the results.

Key words: route convergence; white Gaussian noise; Laplacian matrix; Markov switching; Itô formula

引 言

路由信息协议分为内部网关协议和外部网关协议: 内部网关协议包含 RIP 协议、OSPF 协议等; 外部网关协议包含 BGP 协议、SPVP 协议等^[1]. 目前针对路由收敛问题的研究, 主要集中在两个方面: 一是收敛性的研

* 收稿日期: 2021-01-27; 修订日期: 2021-05-26

基金项目: 云南省基础研究计划(202001AT070112)

作者简介: 周军(1980—), 男, 讲师, 博士(E-mail: zhouchaos@126.com);

杨顺枫(1982—), 男, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: yangshunfeng@126.com).

引用格式: 周军, 张健, 杨顺枫. Internet 路由器随机建模与收敛性分析[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(2): 207-214.

究,其主要探讨路由发散的原因,以及如何才能保证路由的收敛;二是收敛时间的研究,其主要关注如何加快收敛速度,缩短收敛所需的时间^[2].

针对以上两类问题,很多 Internet 路由级模型被建立进行分析.例如,文献 [3] 通过有向图建立 BGP 通讯网络模型并分析其收敛时间,根据实验注入数据和故障测量数据探讨了网络拓扑结构和策略对路由收敛速度的影响.文献 [4] 使用有向图对 BGP 收敛过程建模,针对 BGP 报文的处理和等待时间以及各种延迟对收敛时间的影响,给出了一种新的 BGP 收敛时间上界.上述文献指出:AS 内部的拓扑、更新报文处理过程等对 BGP 收敛的影响仍是开放性问题.文献 [5] 根据表征 Internet 路由级拓扑规律的多项特征值,提出了面向 Internet 路由级拓扑的 DNLH(dynamic non-linear hierarchy) 模型,并结合遗传算法优化了节点间非线性连接参数.文献 [6] 分析了无标度模型、启发式优化拓扑模型、IGen 模型等路由器级拓扑模型优缺点,并提出了 AS 级-域内双层模型.文献 [7] 把各路由器中网络流量建模为无限多个到达代理的无限流,每个代理负责无限小的流量或作业,利用 Lyapunov 稳定性定理,理论证明了离散时间自私路由算法收敛于 Wardrop 均衡.文献 [8] 基于复杂网络模型提出了一种路由器级互联网拓扑演化模型,可将其用于收敛性控制等路由控制.

以上文献建立的模型都是确定性模型.事实上,路由协议在执行过程中会发生许多随机事件,这些随机因素会影响路由器的收敛.比如:路由信息在路由器之间交换时存在随机丢包情况,丢包会影响路由的收敛^[9];突然的网络攻击、断电等会导致路由器互连拓扑结构的改变,网络拓扑结构对路由收敛存在很大影响^[3];路由器连接链路存在噪声,根据 Shannon 定理,噪声会影响链路状态传输速度,从而影响路由协议的收敛性和收敛速度^[10].显然,建立路由随机模型并对其进行收敛性分析更贴近现实也更有意义.基于此目标,本文引入 Bernoulli 白序列分布、Gauss 白噪声、Markov 过程建立其随机动力系统模型,应用随机微分方程理论和随机分析方法得出其路由收敛的充分条件,结果表明:在噪声强度有限的情况下,路由设备的收敛与路由器连接拓扑的 Laplace 矩阵、Markov 切换平稳分布以及网络中数据包的成功传输率息息相关.最后通过数值仿真证明了所得结论的正确性.

1 问题描述

为了讨论 N 个互联路由设备的收敛性,我们首先应用代数图理论建立其随机系统模型.让一个无向图 $G = (V, E, A)$ 来代表这 N 个路由设备的连通性,其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 代表点集,每个节点代表一个路由器; $E \subseteq V \times V$ 代表边集; $A = (a_{ij})_{N \times N}$ 为邻接矩阵,代表路由器之间的链接状态.对于邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N}$,如果 $(v_j, v_i) \in E$,那么 $a_{ij} \neq 0$,否则 $a_{ij} = 0$,并且当 $i = j$ 时,有 $a_{ii} = 0$.以 RIP 协议为例,当 $a_{ij} \neq 0$ 时, a_{ij} 代表路由器 v_i 与邻接路由器 v_j 之间的距离, $a_{ij} = 0$ 代表路由器 v_i 与路由器 v_j 不相邻.另外,定义图 G 的 Laplace 矩阵^[11] $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$,其中 $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$,当 $i \neq j$ 时,有 $l_{ij} = -a_{ij}$.对于节点 v_i , $N(i) = \{v_j \in V : (v_j, v_i) \in E\}$ 代表其所有邻居节点.定义两个 $m \times n$ 矩阵 A 和 B 的 Hadamard 乘积(也称分素乘积,entrywise product),标记为 $A \cdot B$,其为 $(A \cdot B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ 的 $m \times n$ 矩阵. $\lambda_{\max}(\cdot)$ 代表矩阵的最大特征值.同时,让

$$\mathbf{x}_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

代表第 i 路由设备的路由表信息,则有

$$d\mathbf{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} c_{ij}(r(t))a_{ij}(r(t))(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))dt + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_i(t))d\omega(t), \quad (1)$$

其中 $c_{ij}(t)$ 满足 Bernoulli 白序列分布,模拟网络中接收双方因网络拥塞、流量不匹配、传输误差等原因而产生的丢包现象,当 $a_{ij} \neq 0$ 且 $c_{ij}(t) = 1$ 时,邻接节点 j 到 i 的路由信息传输成功,没有丢包,反之当 $a_{ij} \neq 0$ 且 $c_{ij}(t) = 0$ 时,发生丢包.令 $P(c_{ij}(t) = 1) = q_{ij}$, $P(c_{ij}(t) = 0) = 1 - q_{ij}$, $q_{ij} \in [0, 1]$,这里 $1 - q_{ij}$ 表示丢包率,代表当前网络不同节点间的传输质量,其值可根据当前网络测量,显然有 $E\{c_{ij}(t) - q_{ij}\} = 0$.

另外, $\{r(t), t \in T\}$ 是定义在一个有限空间 $S = \{1, 2, \dots, m\}$ 取值的右连续 Markov 链,其值随时间在其有限空间内依概率随机切换,当 $r(t)$ 取值不同时,路由器之间的链接状态 $a_{ij}(r(t))$ 也就不同,相应 $c_{ij}(r(t))$ 也不同.本文中其被用来模拟因路由器节点故障、断电或网络攻击等而造成的路由器互连拓扑结构改变.其生成函数 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{m \times m}$ 定义如下:

$$P\{r(t+\delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\delta + o(\delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ij}\delta + o(\delta), & i = j, \end{cases}$$

式中 $\delta > 0$ 并且 $\gamma_{ij} \geq 0$ 是从状态 i 到状态 j 的转移速率. 如果 $i \neq j$, 那么 $\gamma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \gamma_{ij}$.

根据 Shannon 定理, 路由信息在传输过程中会遭遇大量的链路噪声. 链路噪声通常来源于多个独立或近似独立的细小噪声的叠加, 其总和近似服从正态分布, 而 Brown 运动恰是具有正态分布的随机过程, 因此本文让一个定义在完备空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 的 n 维 Brown 运动 $\omega(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)]^T$ 来模拟路由信息在传输过程中遭遇的 Gauss 白噪声, 其中 $g(\cdot, \cdot)$ 代表噪声强度函数, 对于噪声强度函数, 我们总假设其满足 Lipschitz 条件.

假设 1 存在正对角矩阵 H , 使得

$$(g(t, \mathbf{x}_i(t)) - g(t, \mathbf{s}(t)))^T (g(t, \mathbf{x}_i(t)) - g(t, \mathbf{s}(t))) \leq \|H(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t))\|^2, \quad (2)$$

对所有 $(t, \mathbf{x}_i(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ 都成立, 并且 $g(t, 0) = 0$ 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 都成立.

注 1 模型 (1) 只考虑了路由设备与其邻接节点交换链路状态信息的情况, 因此式 (1) 中第 i 路由设备的路由表信息只与其邻接节点 $j \in N_i$ 路由信息进行交换. 路由器之间的链接主要体现在其邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N}$ 上, 当 $a_{ij} \neq 0$ 时, a_{ij} 代表路由器 v_i 与邻接路由器 v_j 之间的距离, $a_{ij} = 0$ 代表路由器 v_i 与路由器 v_j 不相邻. 同时本文考虑的丢包、链路噪声、互连拓扑结构突变等情况, 分别利用模型 (1) 中三个随机过程 $c_{ij}(t)$, $d\omega(t)$ 和 $r(t)$ 来模拟.

针对模型 (1), 为了得到我们的结论, 相关概念介绍如下.

定义 1 如果 N 个路由设备的路由表信息 $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{s}(t)$, $t \rightarrow +\infty$, 则这 N 个路由设备是收敛的.

让 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t)$ 代表第 i 个路由器的路由信息 $\mathbf{x}_i(t)$ 与最终收敛状态 $\mathbf{s}(t)$ 之间的误差, 则式 (1) 转换成误差系统:

$$d\mathbf{e}_i(t) = \sum_{j \in N_i} c_{ij}(r(t)) a_{ij}(r(t)) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) dt + \tilde{g}(t, \mathbf{e}_i(t)) d\omega(t), \quad (3)$$

其中 $\tilde{g}(t, \mathbf{e}_i(t)) = g(t, \mathbf{x}_i(t)) - g(t, \mathbf{s}(t))$.

注 2 零状态是误差系统 (3) 的平衡点. 为了实现 N 个路由设备的收敛, 接下来误差系统 (3) 在孤立平衡点零处的稳定性将被讨论.

定义 2^[12] 误差系统 (3) 是均方稳定的, 如果对于任何 $\xi(0) \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \int_0^T \|\mathbf{e}(t; \xi(0))\|^2 dt < \infty. \quad (4)$$

为了得到路由收敛的充分条件, 我们还需要如下假设及引理.

假设 2 右连续的 Markov 链 $\{r(t)\}$ 是各态历经的.

基于假设 2, 本文中的 Markov 链 $\{r(t)\}$ 存在唯一的平稳分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$, 其中 $\pi_i > 0$ 并且 $\sum_{k=1}^m \pi_k = 1$. 不失一般性, 我们总是假定 Markov 过程的初始状态是其平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$.

另外, 我们定义矩阵 $\mathbf{P}(r(t)) = \mathbf{Q}(r(t)) \cdot \mathbf{L}(r(t))$, 其中 $\mathbf{P}(t) = (p_{ij})_{N \times N}(t)$, $p_{ij}(t) = q_{ij}(t) l_{ij}(t)$, $p_{ii}(t) = -\sum_{j=1, j \neq i}^N p_{ij}$ 且 $q_{ij} \in [0, 1]$, $q_{ii} = 1$. 当网络连接拓扑 $G(t)$ 随着 Markov 链 $\{r(t)\}$ 在 $m \in S$ 个不同的网络拓扑 $G(t) \in \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 中随机跳变时, 对应的 Laplace 矩阵 $\mathbf{L}(r(t))$ 也不断切换. 为了讨论方便, 我们定义 $G_{\text{un}} = \cup_{i=1}^m G_i$ 代表所有子拓扑 $G_i (i \in S)$ 的联合拓扑, 相应地有 $\mathbf{L}_{\text{un}} = \cup_{i=1}^m \mathbf{L}_i$ 以及 $\mathbf{P}_{\text{un}} = \cup_{i=1}^m \mathbf{P}_i$.

假设 3 联合拓扑 g_{un} 是连通的.

基于文献 [13] 中引理 4, 联合拓扑 g_{un} 的 Laplace 矩阵 \mathbf{L}_{un} 是半正定矩阵, 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足

$$\boldsymbol{\theta} \mathbf{L}_{\text{un}} \boldsymbol{\theta}^T = \boldsymbol{\Lambda} := \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}, \quad (5)$$

其中 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 是其 N 个特征值.

引理 1^[14] (Dynkin 公式) 针对 Itô 型随机微分方程, 考虑 Lyapunov 泛函 $V(t, \mathbf{x}(t)) \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, 如果 $V(t, \mathbf{x}(t))$ 和其无穷小算子 $\mathcal{L}V(t, \mathbf{x}(t))$ 都在 $[0, t]$ 以概率 1 有界, 那么

$$EV(t, \mathbf{x}(t)) = EV(0, \mathbf{x}(0)) + E \int_0^t \mathcal{L}V(s, \mathbf{x}(s)) ds.$$

2 主要结果

引理 2 基于假设 3, 对称矩阵 \mathbf{P}_{un} 是正定矩阵, 也就是说, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足

$$\boldsymbol{\theta} \mathbf{P}_{\text{un}} \boldsymbol{\theta}^T = \boldsymbol{\Lambda} := \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}, \quad (6)$$

其中 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 是其 N 个特征值.

证明 根据 \mathbf{P}_{un} 的定义:

$$\mathbf{P}_{\text{un}} = \sum_{k=1}^m \mathbf{Q}(k) \cdot \mathbf{L}(k) = \sum_{k=1}^m (\mathbf{1}_{N \times N} - (1 - q_{ij}(r(t)))_{N \times N}) \cdot \mathbf{L}(k) = \mathbf{L}_{\text{un}} - \sum_{k=1}^m (1 - q_{ij}(r(t)))_{N \times N} \cdot \mathbf{L}(k),$$

其中 $\mathbf{1}_{N \times N}$ 代表全 1 矩阵, 当 $i \neq j$ 时, $q_{ij} \in [0, 1]$, $q_{ii} = 1$, $l_{ij} = -a_{ij}$. 显然对于每个 $m \in S$, $(1 - q_{ij}(r(t)))_{N \times N} \cdot \mathbf{L}(k)$ 矩阵对角线上的元素全为 0, 其他元素均小于等于零, 而 \mathbf{L}_{un} 除对角元素外其他元素均小于等于零, 且 $l_{\text{un}(ii)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N l_{\text{un}(ij)}$, 则 $|p_{\text{un}(ii)}| > \left| \sum_{j=1, j \neq i}^N p_{\text{un}(ij)} \right|$, \mathbf{P}_{un} 是严格对角占优矩阵. 根据 Gersgorin 圆盘定理, \mathbf{P}_{un} 是正定矩阵.

定理 1 在假设 1~3 下, 如果存在

$$\lambda_{\max}(\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \min_{k \in S} \{\pi_k\} \mathbf{P}_{\text{un}}) \leq 0, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{N \times N}$, $\mathbf{P}_{\text{un}} = \cup_{i=1}^m \mathbf{P}_i$ 且 $\mathbf{P}(r(t)) = \mathbf{Q}(r(t)) \cdot \mathbf{L}(r(t))$, 那么随机环境下的路由网关协议是均方收敛的.

证明 给定任意的 $\xi(0) \in \mathbb{R}^n$, 为了方便, 我们记 $\mathbf{e}(t; \xi(0)) = \mathbf{e}(t)$. 考虑如下 Lyapunov 泛函 $V(\mathbf{e}(t), t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, 其中

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{e}(t)) &= E \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) \right], \\ V_k(t, \mathbf{e}(t)) &= E \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) \mathbf{1}_{r(t)=k} \right], \quad \forall k \in S. \end{aligned} \quad (8)$$

根据 Itô 公式有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_k(t, \mathbf{e}(t)) &= E \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\sum_{j \in N_i} c_{ij}(r(t)) a_{ij}(r(t)) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) \right] \mathbf{1}_{r(t)=k} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^N T_{\text{trace}}(\tilde{\mathbf{g}}^T(t, \mathbf{e}_i(t)) \tilde{\mathbf{g}}(t, \mathbf{e}_i(t)) \mathbf{1}_{r(t)=k}) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

根据假设 1 有

$$\sum_{i=1}^N T_{\text{trace}}[\tilde{\mathbf{g}}^T(t, \mathbf{e}_i(t)) \tilde{\mathbf{g}}(t, \mathbf{e}_i(t)) \mathbf{1}_{r(t)=k}] \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_i(t) \mathbf{1}_{r(t)=k}. \quad (10)$$

同时根据 $c_{ij}(t)$ 是 Bernoulli 白序列分布, 存在 $E\{c_{ij}(r(t)) - q_{ij}(r(t))\} = 0$, 有

$$\begin{aligned} E \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\sum_{j \in N_i} c_{ij}(r(t)) a_{ij}(r(t)) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) \right] \mathbf{1}_{r(t)=k} \right\} &= \\ E \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\sum_{j \in N_i} (c_{ij}(r(t)) - q_{ij}(r(t)) + q_{ij}(r(t))) a_{ij}(r(t)) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) \right] \mathbf{1}_{r(t)=k} \right\} &= \\ E \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\sum_{j \in N_i} q_{ij}(r(t)) a_{ij}(r(t)) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) \right] \mathbf{1}_{r(t)=k} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

将式 (10)、(11) 代入式 (9) 可得

$$\mathcal{L}V_k(t, \mathbf{e}(t)) \leq E \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\sum_{j \in N_i} q_{ij}(r(t)) a_{ij}(r(t)) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) \right] \mathbf{1}_{r(t)=k} + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_i(t) \mathbf{1}_{r(t)=k} \right\}. \quad (12)$$

根据假设 2, $\{r(t)\}$ 的初值是其不变分布 π , 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t, \mathbf{e}(t)) &\leq E \left\{ \sum_{k=1}^m \pi_k \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \sum_{j \in N_i} q_{ij}(k) a_{ij}(k) (\mathbf{e}_j(t) - \mathbf{e}_i(t)) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{e}_i(t) \right\} \leq \\ &E \left\{ \mathbf{e}^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{e}(t) - \sum_{k=1}^m \pi_k \mathbf{e}^T(t) \mathbf{P}(k) \mathbf{e}(t) \right\} \leq E \{ \mathbf{e}^T(t) (\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \min_{k \in S} \{ \pi_k \} \mathbf{P}_{un}) \mathbf{e}(t) \} \leq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{e}(t) = [e_1^T(t), e_2^T(t), \dots, e_N^T(t)]^T$, $\mathbf{P}_{un} = \bigcup_{i=1}^m \mathbf{P}_i$ 且 $\mathbf{P}(r(t)) = \mathbf{Q}(r(t)) \cdot \mathbf{L}(r(t))$.

根据引理 2, 对称矩阵 \mathbf{P}_{un} 是正定矩阵, 即存在 $\kappa > 0$ 使得 $-\kappa = \lambda_{\max}(\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \min_{k \in S} \{ \pi_k \} \mathbf{P}_{un})$, 则

$$\mathcal{L}V(t, \mathbf{e}(t)) \leq -E(\kappa |\mathbf{e}(t)|^2); \quad (14)$$

根据引理 1 有

$$-E \int_0^T \mathcal{L}V(t, \mathbf{e}(t)) dt = EV_0 - EV_T \leq EV_0; \quad (15)$$

最后, 根据式 (14) 和 (15) 我们得到

$$E \int_0^T |\mathbf{e}(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\kappa} EV_0 < \infty. \quad (16)$$

根据定义 (2), 系统 (3) 在平衡点零处是均方渐近稳定的. 换句话说, N 个路由设备的路由状态在假设 1~3 和条件 (7) 下能实现均方收敛. 定理得证.

注 3 假设 3 保证了各路由器之间的连通性. 在假设 3 条件下, 根据式 (7), 路由设备的收敛性还与 Markov 过程平稳分布 π 、噪声强度相关矩阵 \mathbf{H} 、路由连接联合拓扑、相邻网络节点之间丢包率 $1 - q_{ij}$ 有关. 当丢包率 $1 - q_{ij}$ 越小时, q_{ij} 越大, 式 (7) 越容易满足, 各路由器的路由更容易收敛. 当噪声强度相关矩阵 \mathbf{H} 越小时, 结论也一样.

注 4 在理想状态下, 网络中任何相邻节点之间没有丢包、噪声和切换, 这时 $\mathbf{P}_{un} = \mathbf{L}_{un}$, $\min_{k \in S} \{ \pi_k \} = 1$, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. 在联合拓扑 G_{un} 是连通的情况下, 即联合拓扑下任何两个路由器之间存在路径, 这时联合拓扑 G_{un} 的 Laplace 矩阵 \mathbf{L}_{un} 相应特征值 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, 显然式 (7) 也成立, 路由器收敛, 这也与我们的经验相符.

3 数值模拟

为了验证以上结论的正确性, 我们使用 MATLAB 数值仿真 5 个路由设备 (每个设备的路由表有三个状态分量, 用来代表三条路由) 的收敛情况. 5 个路由设备的拓扑结构将跟随 Markov 链 $\{r(t)\}$ 在 G_1 和 G_2 中随机切换 (图 1), 其中 Markov 链在空间 $S = \{1, 2\}$ 取值, 它的生成函数 Γ 定义为 $\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$, 根据遍历定理 $\pi = \pi \mathbf{P}$, 可得 $\pi = [5/9, 4/9]$.

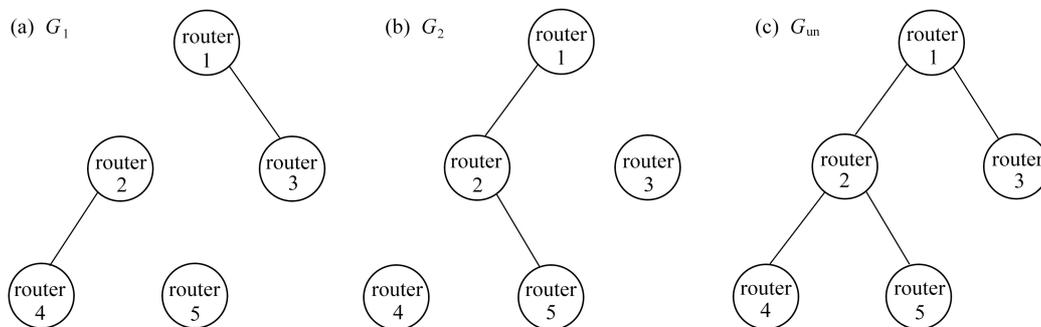


图 1 路由设备网络连接拓扑图
Fig. 1 The router connection topology

另外, 让噪声强度函数为 $g(t, \mathbf{x}_i(t)) = \mathbf{R} \mathbf{x}_i(t)$, 且图 1 中各图对应的 Laplace 矩阵, 以及 \mathbf{Q}, \mathbf{R} 分别为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_{un} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.03 \\ 0.01 & 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 & 0.03 \\ 0.01 & 0.04 & 0.03 \\ 0.02 & 0.02 & 0.03 \end{bmatrix}.$$

基于以上参数, $\min_{k \in S} \{\pi_k\} = 4/9$, 当 $H^T H = 0.04 I_{5 \times 5}$ 时满足假设 1. 使用 MATLAB 函数 $\text{eig}(\cdot)$ 求矩阵 $H^T H - \min_{k \in S} \{\pi_k\} P_{un}$ 的特征值分别为 $-1.714 2, -0.888 4, -0.404 4, -0.270 4, -0.078 1$, 显然不等式 (7) 成立. 根据定理 1, 5 个路由设备路由状态收敛.

根据以上参数, 利用 Euler-Maruyama 方法^[15] 得到式 (4) 的数值解, 并使用 MATLAB 数值仿真 5 个路由设备的收敛情况: 图 2 显示 2-模态的 Markov 链, $\{r(t)\}$ 在状态空间 1 和 2 中随机切换, 其中 1 代表路由设备的拓扑结构 G_1 , 2 代表路由设备的拓扑结构 G_2 , 用来模拟因路由器节点故障、断电或网络攻击等而造成的路由器互连拓扑结构改变. 图 3 显示路由设备 $x_1 \sim x_5$ 的第 1 个状态分量 $x_{11} \sim x_{51}$ 的收敛情况, 图示大约在 25 ms 左右其收敛到同一状态. 图 4、5 分别表示路由设备 $x_1 \sim x_5$ 的第 2, 3 个状态分量收敛到同一状态.

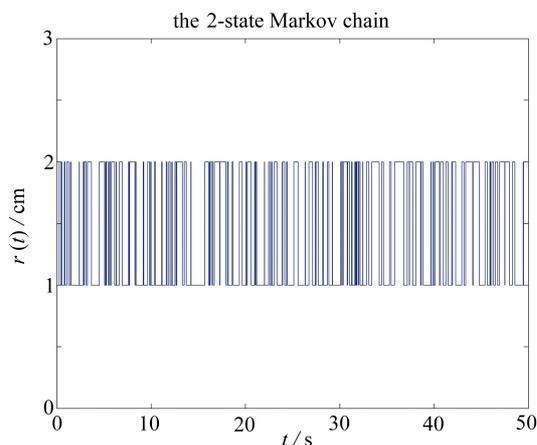


图 2 2-状态 Markov 链

Fig. 2 The 2-state Markov chain

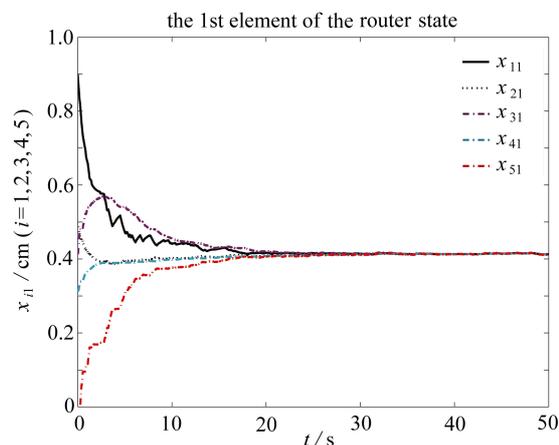


图 3 5 个路由器路由状态第 1 个分量

Fig. 3 The 1st element of the 5-router state

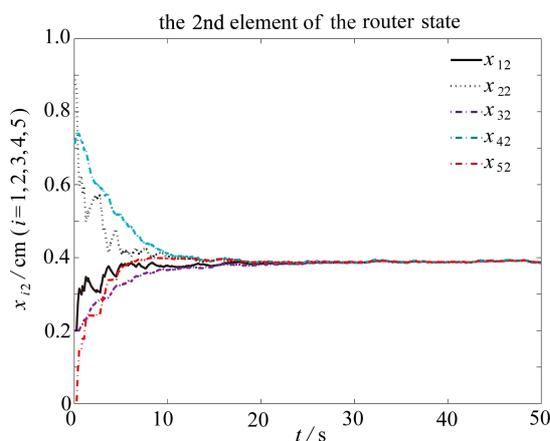


图 4 5 个路由器路由状态第 2 个分量

Fig. 4 The 2nd element of the 5-router state

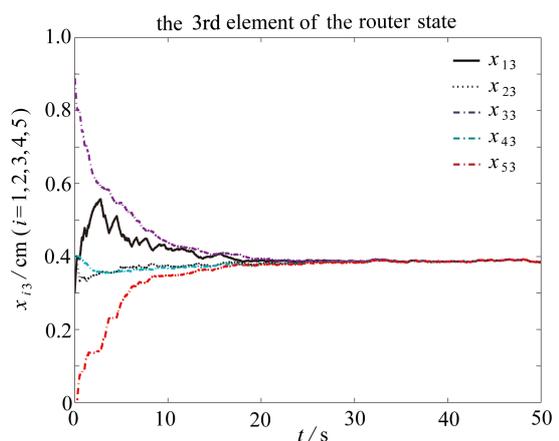


图 5 5 个路由器路由状态第 3 个分量

Fig. 5 The 3rd element of the 5-router state

具体的算法步骤如下:

第一步 设置 5 个路由器路由状态变量 $x_1(0) \sim x_5(0)$ 初始值;

第二步 根据成功传输率矩阵 Q , 使用 MATLAB 函数 $\text{sign}(\text{fix}(\text{rand}(1, \text{length}(t)/(1-q_{ij}))))$, 构建 Bernoulli 白序列分布, 用来模拟网络中相邻节点间传输过程中的丢包情形;

第三步 运用了独立增量性生成 Brown 运动, 使用 MATLAB 函数

$$W = \text{cumsum}(\text{sqrt}(dt) * 0.2 * \text{randn}(1, \text{length}(t)))$$

构建 Brown 运动, 使用 $w(k+1) - w(k)$ 模拟网络中的 Gauss 白噪声;

第四步 根据矩阵指数函数得到转移概率阵, 并得到逐列累加转移概率阵, 进一步模拟 Markov 切换;

第五步 在第二、三、四步的基础上, 根据 Euler-Maruyama 方法得到式(4)的数值解;

第六步 保存结果, 即可得图 2~5.

4 结 论

针对噪声、丢包和互连拓扑突变环境下路由器的收敛问题, 本文引入三个随机过程建立相应的随机动力系统模型并分析其收敛性. 分析结果显示: 在噪声强度有限的情况下, 当路由连接拓扑的 Laplace 矩阵、Markov 切换平稳分布以及网络中数据包的成功传输率满足一定数值关系时路由器能实现收敛. 且当网络中数据包的成功率越高(网络中丢包率越小)、噪声强度越小、路由器连接拓扑切换不频繁时, 路由器更容易收敛, 反之也成立. 本文建立的随机模型只是现实模型的简化, 还有许多其他因素(比如传输时滞等)有待进一步考虑和研究.

致 谢 本文作者衷心感谢西南林业大学科研启动基金(112007)和西南林业大学数理学院课程建设项目《计算机网络》对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] GRIFFIN T G, SHEPHERD F B, WILFONG G. The stable paths problem and interdomain routing[J]. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2002, **10**(2): 232-243.
- [2] 张微, 吴建平, 徐恪, 等. 边界网关协议BGP4路由收敛问题研究进展[J]. *小型微型计算机系统*, 2006, **27**(5): 818-824. (ZHANG Wei, WU Jianping, XU Ke, et al. Research progress of convergence problem of border gateway protocol 4 (BGP4)[J]. *Mini-Micro Systems*, 2006, **27**(5): 818-824.(in Chinese))
- [3] LABOVITZ C, AHUJA A, WATTENHOFER R, et al. The impact of Internet policy and topology on delayed routing convergence[C]//*Proceedings IEEE INFOCOM 2001 Conference on Computer Communications*. 2001.
- [4] 赵金晶, 朱培栋, 周丽涛. 域间路由协议BGP收敛时间的定量分析及预测[J]. *计算机工程与科学*, 2007, **29**(9): 56-57. (ZHAO Jinjing, ZHU Peidong, ZHOU Litao. Analysis and prediction on the BGP convergence time[J]. *Computer Engineering and Science*, 2007, **29**(9): 56-57.(in Chinese))
- [5] 张昕, 赵海, 李超. 一种基于多项复杂特征的Internet 路由级拓扑建模方法[J]. *电子学报*, 2008, **36**(1): 57-63. (ZHANG Xin, ZHAO Hai, LI Chao. A model for router-level topology of Internet based on complex characters [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, **36**(1): 57-63.(in Chinese))
- [6] 李鹤帅, 朱俊虎, 王清贤, 等. Internet建模的关键: 研究AS间路由器级连接[J]. *计算机科学*, 2016, **43**(9): 135-139. (LI Heshuai, ZHU Junhu, WANG Qingxian, et al. Key of Internet modeling-looking inside inter-AS router-level connection[J]. *Computer Science*, 2016, **43**(9): 135-139.(in Chinese))
- [7] PIETRABISSA A, CELSI L R. Discrete-time selfish routing converging to the wardrop equilibrium[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(3): 1288-1294.
- [8] SUN G, BIN S. Router-level Internet topology evolution model based on multi-subnet composited complex network model[J]. *Journal of Internet Technology*, 2017, **18**(6): 1-8.
- [9] ABDULKADHIM M. Routing protocols convergence activity and protocols related traffic simulation with it's impact on the network[J]. *International Journal of Computer Science Engineering and Technology*, 2015, **5**(3): 40-43.
- [10] RABBANI H, BEYGI L, GHOSHONI S, et al. Quality of transmission aware optical networking using enhanced Gaussian noise model[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2019, **37**(3): 831-838.

- [11] 赵玮, 任凤丽. 基于牵制控制的多智能体系统的有限时间与固定时间一致性[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(3): 299-307. (ZHAO Wei, REN Fengli. Finite-time and fixed-time consensus for multi-agent systems via pinning control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(3): 299-307.(in Chinese))
- [12] ZHOU J, CAI T T, ZHOU W N, et al. Master-slave synchronization for coupled neural networks with Markovian switching topologies and stochastic perturbation[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(6): 2249-2263.
- [13] NI W, CHEN D. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *System and Control Letters*, 2010, **59**(3/4): 209-217.
- [14] MAO X R, YUAN C G. *Stochastic Differential Equations With Markovian Switching*[M]. London: Imperial College Press, 2006.
- [15] 马丽, 马瑞楠. 一类随机泛函微分方程带随机步长的EM逼近的渐近稳定[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(1): 97-107. (MA Li, MA Ruinan. Almost sure asymptotic stability of the Euler-Maruyama method with random variable stepsizes for stochastic functional differential equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 97-107.(in Chinese))