http://www.applmathmech.cn

一类多方渗流方程正解的存在性和爆破性*

李建军，　唐依纳

（辽宁工程技术大学 理学院，辽宁 阜新 123000）

摘要：　该文研究了一类具有非局部 Neumann 边界条件和非线性吸收项的多方渗流方程解的全局存在性和爆破情况.首先针对所研究方程定义了其上下解,并建立和证明了比较原理;然后通过构造函数以及利用微分不等式、特征值特征函数、常微分方程的解和椭圆第二边值的解等方法对方程进行了研究,得到了对于不同取值范围的参数、权函数和初始值时,方程非负解的全局存在性和在有限时间内爆破的充分条件.

关　键　词：　Neumann 边界条件；　多方渗流方程；　全局存在性；　爆破
中图分类号：　O175.29　　　**文献标志码**：　A　　　DOI：10.21656/1000-0887.420022

Existence and Blowup of Positive Solutions to a Class of Multilateral Flow Equations

LI Jianjun，　TANG Yina
(*School of Sciences*, *Liaoning Technical University*,
Fuxin, *Liaoning* 123000, *P.R.China*)

Abstract: The global existence and blowup of the solutions to a class of multilateral filtration equations with non-local Neumann boundary conditions and nonlinear absorption terms were studied. First, the super- and sub-solutions were defined for the studied equations and the comparison principle was established. Then, the equation was investigated with constructed functions, differential inequalities, eigenfunctions, ordinary differential equation and elliptic second boundary value solutions. The global existence of non-negative solutions to the equations and the conditions for blowup in a finite time for the parameters, weight functions and initial values in different value ranges were obtained.

Key words: Neumann boundary condition; multilateral filtration equation; global existence; blowup

引　　言

考虑一类具有非局部 Neumann 边界条件和非线性吸收项的多方渗流方程的初边值问题：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + \int_\Omega u^p \mathrm{d}x - cu^q, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y) u^l(y,t)\mathrm{d}y, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期**：　2021-01-21；**修订日期**：　2021-03-08
作者简介：　李建军(1973—),男,副教授,博士(E-mail：lijianjun751026@163.com)；
唐依纳(1996—),女,硕士(通讯作者. E-mail：tyn973379@163.com).
引用格式：　李建军, 唐依纳. 一类多方渗流方程正解的存在性和爆破性[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(9)：924-931.

其中,Ω 是 $R^n(n \geqslant 1)$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域;$m > 1, p, q, l > 0$;c 是正常数;权函数 $k(x,y)$ 是定义在 $\partial\Omega \times \bar{\Omega}$ 上的非负连续函数;ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量;非负初值 $u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, 且满足相容条件:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \int_\Omega k(x,y) u_0^l(y) \mathrm{d}y, \qquad x \in \partial\Omega.$$

在过去的几十年里,已经有大量的文献研究了非局部非线性 Dirichlet 边界条件下方程(组)解的性质,参见文献[1-7],而对于具有非局部非线性 Neumann 边界条件的研究则少之又少.最近几年,人们逐渐开始关注具有非线性非局部 Neumann 边界条件的反应扩散方程解的全局存在性和爆破性[8-13].例如,2016 年,Gladkov 等[8]研究了半线性抛物方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x,t) u^p, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \displaystyle\int_\Omega k(x,y) u^l(y,t) \mathrm{d}y, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \in R^n(n \geqslant 1)$, $\partial u / \partial \nu$ 是函数 u 在外法线方向上的方向导数,$p > 0,\ l > 0$.他们证明了对于 $\max(p,l) \leqslant 1$,解是全局存在的;当 $p \leqslant 1, l > 1$ 时,解在边界上是爆破的;以及对于不同的初始值,解的全局性和爆破情况.

同年,Zhou 和 Yang[9]探究了具有加权非线性非局部 Neumann 边界条件的反应扩散方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x,t) u^p \displaystyle\int_\Omega u^q(y,t) \mathrm{d}y, & x \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \displaystyle\int_\Omega k(x,y) u^l(y,t) \mathrm{d}y, & x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $p, q, l > 0$.他们利用最大值原理和比较原理,得出了对于不同取值范围的 p, q, l 值,解的全局存在性和爆破性.

2018 年,Wang 等[10]研究了如下反应扩散方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a u^p \displaystyle\int_\Omega u^q(y,t) \mathrm{d}y - b u^m, & x \in \Omega,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \displaystyle\int_\Omega k(x,y) u^l(y,t) \mathrm{d}y, & x \in \partial\Omega,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $p, q, l, m > 0, k(x,y)$ 是定义在 $x \in \partial\Omega, y \in \Omega$ 的正连续有界函数.在非局部非线性 Neumann 边界条件下,他们讨论了解的全局与非全局存在性的条件.

2019 年,Liu 等[13]研究了如下具有非线性非局部边界通量和完全耦合源的反应扩散方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t) u^\alpha v^p,\ v_t = \Delta v + c_2(x,t) u^q v^\beta, & (x,t) \in Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \displaystyle\int_\Omega k_1(x,y,t) u^m(y,t) \mathrm{d}y, & (x,t) \in S_T, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \displaystyle\int_\Omega k_2(x,y,t) u^n(y,t) \mathrm{d}y, & (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中常数 $\alpha, \beta, p, q, m, n \geqslant 0$.他们把解分成了同时和非同时爆破两类,并证明了爆破速率以及爆破时间的上界和下界.

本文是在上述文献的基础上将 Δu 升级为 Δu^m, 从而对具有非局部非线性 Neumann 边界条件和非线性吸收项的多方渗流方程(1)展开研究.这样进行改进以及创新的依据是:数学上通常把半线性抛物型方程 $\partial u / \partial t = \Delta u + f(u, x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 叫做反应扩散方程,其中 $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示某种意义下的浓度(或温

度、密度等),则根据 Fick 第一定律 $J=-D\partial u/\partial x$,扩散系数 D 为常数;而将 Δu 升级为 Δu^m 后,根据 Fick 第二定律 $\partial u/\partial t=D\partial^2 u/\partial x^2$,方程的扩散系数 D 是随浓度,也就是方程中的 u 变化的,此时,方程变为拟线性抛物型方程,相对于半线性抛物型方程而言,其研究难度更大.此外,热传导方程的传播速度为无穷大,而多方渗流方程可以描述有限传播速度,故对多方渗流方程解的性质的研究在某些方面更具有现实意义.而与 Dirichlet 边界条件相比,具有 Neumann 边界条件的方程研究难度更大,因为我们需要对未知函数在边界外法线的方向导数进行求解,这无疑为论文论证过程中的构造函数这一重要环节增加了难度,且求导后的函数值的正负性可能会发生变化,同样为论文的研究造成了更大的困难.综上为本文研究内容的创新点和难点阐述.本文的安排如下:首先在第 1 节中,针对所研究方程(1),定义了上下解并建立了比较原理,其在后面证明过程中有着重要作用;在第 2 节,对于不同取值范围的 p,q,l,m、权函数 $k(x,y)$ 以及初始值进行了分类讨论,得出问题(1)的全局存在性和在有限时间内爆破的充分条件;在最后一节中,我们进行了简单的总结.

1 比较原理

在本节中,针对问题(1)建立了比较原理.令

$$Q_T=\Omega\times(0,T),\ S_T=\partial\Omega\times(0,T),\ \Gamma_T=S_T\cup\bar{\Omega}\times\{0\},\qquad T>0.$$

下面给出问题(1)的上解和下解的定义.

定义 1 如果非负函数 $\bar{u}\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(Q_T\cup\Gamma_T)$ 满足

$$\begin{cases}\bar{u}_t\geqslant\Delta\bar{u}^m+\displaystyle\int_\Omega\bar{u}^p\mathrm{d}x-c\bar{u}^q, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}\geqslant\displaystyle\int_\Omega k(x,y)\bar{u}^l(y,t)\mathrm{d}y, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ \bar{u}(x,0)\geqslant u_0(x), & x\in\bar{\Omega},\end{cases}\tag{2}$$

则称 $\bar{u}$ 是问题(1)的上解.

如果 $\underline{u}\geqslant 0$ 满足式(2)的相反符号,则称 $\underline{u}\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(Q_T\cup\Gamma_T)$ 是问题(1)的下解.

如果一个函数既是问题(1)在 Q_T 中的上解又是下解,则称其是问题(1)在 Q_T 中的解.

根据文献[14]中定理 4.1.1 有如下引理.

引理 1 设 $u_0(x)>0(x\in\bar{\Omega})$,且 $u(x,t)$ 是问题(1)在 Q_T 中的解,则当$(x,t)\in Q_T\cup\Gamma_T$ 时,有 $u(x,t)>0$.

引理 2(比较原理) 令 $\bar{u}(x,t)$ 和 $\underline{u}(x,t)$ 分别是问题(1)在 Q_T 中的上解和下解,若初始值满足 $\underline{u}(x,0)>0,\bar{u}(x,0)\geqslant\delta>0$,其中 δ 是任意正常数,且 $\bar{u}(x,0)\geqslant\underline{u}(x,0)$,则当$(x,t)\in Q_T\cup\Gamma_T$ 时,有

$$\bar{u}(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t).$$

证 定义函数 $\varphi(x,t)\in C^{2,1}(\bar{Q}_t)(0<t<T)$ 为非负函数,且满足齐次 Neumann 边界条件 $\partial\varphi/\partial\nu=0$.将式(2)中的第一个不等式两边同时乘以 φ,然后对其在 Q_t 上积分,利用 Green 公式计算得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\varphi(x,t)\bar{u}(x,t)\mathrm{d}x\geqslant\\&\quad\int_\Omega\varphi(x,0)\bar{u}(x,0)\mathrm{d}x+\iint_{Q_t}\left(\bar{u}\varphi_\tau+\bar{u}^m\Delta\varphi+\varphi\int_\Omega\bar{u}^p\mathrm{d}y-c\varphi\bar{u}^q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\\&\quad m\int_0^t\int_{\partial\Omega}\bar{u}^{m-1}\varphi\int_\Omega k(x,y)\bar{u}^l\mathrm{d}y\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{3}$$

另一方面,下解满足与式(3)相反的不等式:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\varphi(x,t)\underline{u}(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\\&\quad\int_\Omega\varphi(x,0)\underline{u}(x,0)\mathrm{d}x+\iint_{Q_t}\left(\underline{u}\varphi_\tau+\underline{u}^m\Delta\varphi+\varphi\int_\Omega\underline{u}^p\mathrm{d}y-c\varphi\underline{u}^q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\end{aligned}$$

$$m\int_0^t\int_{\partial\Omega}\underline{u}^{m-1}\varphi\int_\Omega k(x,y)\underline{u}^l\mathrm{d}y\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

令 $\omega(x,t)=\underline{u}(x,t)-\bar{u}(x,t)$, 用式(4)减式(3)并运用中值定理得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\varphi(x,t)\omega(x,t)\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_\Omega\varphi(x,0)\omega(x,0)\mathrm{d}x+\iint_{Q_t}\omega(\varphi_\tau+\Phi_1\Delta\varphi-c\varphi\Phi_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\\&\iint_{Q_t}\varphi\left(\int_\Omega\omega\Phi_3\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+ml\int_0^t\int_{\partial\Omega}\underline{u}^{m-1}\varphi\left(\int_\Omega k(x,y)\omega\theta_1^{l-1}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\tau+\\&m(m-1)\int_0^t\int_{\partial\Omega}\omega\theta_2^{m-2}\varphi\left(\int_\Omega k(x,y)\bar{u}^l(y,\tau)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}S_x\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\Phi_1(x,t)=m\int_0^1(\theta\underline{u}+(1-\theta)\bar{u})^{m-1}\mathrm{d}\theta,$$

$$\Phi_2(x,t)=q\int_0^1(\theta\underline{u}+(1-\theta)\bar{u})^{q-1}\mathrm{d}\theta,$$

$$\Phi_3(x,t)=p\int_0^1(\theta\underline{u}+(1-\theta)\bar{u})^{p-1}\mathrm{d}\theta,$$

θ_1 和 θ_2 是介于 $\underline{u}(x,t)$ 和 $\bar{u}(x,t)$ 之间的正连续函数.由 $\underline{u}$, $\bar{u}\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(Q_T\cup\Gamma_T)$ 可知 $\underline{u}(x,t)$ 和 $\bar{u}(x,t)$ 是有界函数,当 $m>1$, $p\geqslant 1$ 和 $q\geqslant 1$ 时,显然有 $\Phi_i(i=1,2,3)$ 是有界的;当 $0<p<1$ 时,由于 $\underline{u}(x,t)>0$,且 $\bar{u}(x,t)\geqslant\delta>0$,可得 $\Phi_3(x,t)\leqslant\delta^{p-1}$.因此,可利用文献[15](P:118-123)中的方法,选取函数 $\varphi(x,t)$ 为下面问题的一个解:

$$\begin{cases}\varphi_\tau+\Phi_1\Delta\varphi-c\varphi\Phi_2=0, & (x,\tau)\in Q_t,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0, & (x,\tau)\in S_t,\\ \varphi(x,t)=\gamma(x), & x\in\Omega,\end{cases}$$

其中, $\gamma(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $0\leqslant\gamma(x)\leqslant 1$.则有

$$\int_\Omega\omega(x,t)\gamma(x)\mathrm{d}x\leqslant C_1\int_0^t\int_\Omega\omega_+\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C_2\int_0^t\int_{\partial\Omega}\omega_+\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant(C_1+C_2)\int_0^t\int_\Omega\omega_+\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

其中, $\omega_+=\max\{0,\omega\}$ 且 $C_1,C_2>0$.

因为不等式(6)对每一个函数 $\gamma(x)$ 都成立,可以在 $L^1(\Omega)$ 中选择函数序列 $\gamma_n(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 使其收敛到函数:

$$\gamma(x)=\begin{cases}1, & \omega(x,t)>0,\\ 0, & \omega(x,t)\leqslant 0.\end{cases}$$

用 $\gamma_n(x)$ 代替式(6)中的 $\gamma(x)$,并令 $n\to\infty$, 得到

$$\int_\Omega\omega_+(x,t)\mathrm{d}x\leqslant(C_1+C_2)\int_0^t\int_\Omega\omega_+\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

利用 Gronwall 不等式知 $\omega_+=0$, 即

$$\bar{u}(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t),\qquad(x,t)\in Q_T.$$

综上, $\bar{u}(x,t)\geqslant\underline{u}(x,t)$, $(x,t)\in Q_T\cup\Gamma_T$. □

注 1　利用不动点定理和压缩映射原理,可以得到问题(1)古典解的局部存在性[16].证明过程是标准的,此处省略.

2　全局存在性和有限时间内爆破

本节给出了对于不同取值范围的 p,q,l,m、权函数 $k(x,y)$ 以及初始值,方程(1)的非负解的全局存在性和爆破情况.

令 λ 和 $\varphi(x)$ 分别是下面问题的特征值和对应的特征函数：

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi, & x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

则 $\lambda > 0$，在 Ω 上 $\varphi(x) > 0$，在 $\partial\Omega$ 上 $\partial\varphi/\partial\nu < 0$，将这样的 $\varphi(x)$ 进行单位化，使得 $\int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$。记 $M = \sup_{\partial\Omega\times\bar\Omega} k(x,y)$，$L = \sup_{\bar\Omega}\varphi(x)$。

定理 1 设 $q \geqslant p, q \geqslant m$（或 $p \leqslant 1, q \geqslant m$），$l \leqslant 1$，则对任意的函数 $k(x,y)$ 及任意的非负初值，问题(1)都有全局解。

证 让 λ 和 $\varphi(x)$ 满足式(7)，令 $\bar u(x,t) = d\exp[(bt - a\varphi(x))/m]$。在 $q \geqslant p, q \geqslant m$ 的情况下，常数 a，b 和 d 满足

$$a \geqslant mM|\Omega| \max_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^{-1},\ b \geqslant 0,\ d \geqslant \max\{1, \exp(aL/m)\sup_{\bar\Omega} u_0(x)\}.$$

或在 $p \leqslant 1, q \geqslant m$ 的情况下，常数 a，b 和 d 满足

$$a \geqslant mM|\Omega| \max_{\partial\Omega}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^{-1},\ b \geqslant m\exp(aL/m)|\Omega|,\ d \geqslant \max\{1, \exp(aL/m)\sup_{\bar\Omega} u_0(x)\}.$$

则由简单的计算可得，只要 $q \geqslant p, q \geqslant m$ 时，

$$c \geqslant (|\Omega| + a\lambda\varphi + a^2|\nabla\varphi|^2)\exp(aqL/m);$$

或 $p \leqslant 1, q \geqslant m$ 时，

$$c \geqslant (a\lambda\varphi + a^2|\nabla\varphi|^2)\exp(aqL/m).$$

则

$$\begin{aligned} &\bar u_t - \Delta\bar u^m - \int_\Omega \bar u^p\mathrm{d}x + c\bar u^q = \\ &\quad \frac{b}{m}\bar u - (a\lambda\varphi + a^2|\nabla\varphi|^2)\bar u^m - d^p\exp(pbt/m)\int_\Omega \exp[-ap\varphi(x)/m]\mathrm{d}x + c\bar u^q \geqslant \\ &\quad \frac{b}{m}\bar u + c\bar u^q - d^p|\Omega|\exp(pbt/m) - (a\lambda\varphi + a^2|\nabla\varphi|^2)\bar u^m \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\bar u}{\partial\nu} - \int_\Omega k(x,y)\bar u^l(y,t)\mathrm{d}y = \\ &\quad d\exp(bt/m)\frac{a}{m}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) - d^l\exp(lbt/m)\int_\Omega k(x,y)\exp[-al\varphi(y)/m]\mathrm{d}y \geqslant \\ &\quad d\exp(bt/m)\left(\frac{a}{m}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) - M|\Omega|\right) \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$\bar u(x,0) = d\exp[-a\varphi(x)/m] \geqslant u_0(x).$$

因此，$\bar u(x,t)$ 是问题(1)的上解。由比较原理可知 $u(x,t) \leqslant \bar u(x,t)$，则问题(1)有全局解。 □

定理 2 设 $p > q > m > 1, l > 0, 1/L > 2c$，则对任意的函数 $k(x,y) > 0$，$u_0(x)$ 满足 $\int_\Omega u_0(x)\varphi(x)\mathrm{d}x > 1$，则问题(1)的解在有限时间爆破。

证 选取 $\varphi(x)$ 满足式(7)，令 $u(x,t)$ 是问题(1)的解，定义如下辅助函数：

$$J(t) = \int_\Omega \varphi(x)u(x,t)\mathrm{d}x.$$

对函数 $J(t)$ 关于 t 求导可得

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_\Omega \varphi\left(\Delta u^m + \int_\Omega u^p\mathrm{d}x - cu^q\right)\mathrm{d}x \geqslant \\ &\quad -\lambda\int_\Omega \varphi u^m\mathrm{d}x + \int_\Omega u^p\mathrm{d}x - c\int_\Omega \varphi u^q\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8}$$

因为 $q > m$，由 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$\int_\Omega \varphi u^m \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega \varphi u \mathrm{d}x\right)^{(q-m)/(q-1)} \left(\int_\Omega \varphi u^q \mathrm{d}x\right)^{(m-1)/(q-1)} \leqslant$$
$$\frac{q-m}{q-1}\varepsilon^{-(m-1)/(q-m)}\int_\Omega \varphi u \mathrm{d}x + \frac{m-1}{q-1}\varepsilon\int_\Omega \varphi u^q \mathrm{d}x, \tag{9}$$

其中

$$\varepsilon = \frac{c(q-1)}{\lambda(m-1)}.$$

将式(9)代入式(8)中,有

$$J'(t) \geqslant -\lambda\left(\frac{q-m}{q-1}\varepsilon^{-(m-1)/(q-m)}\int_\Omega \varphi u \mathrm{d}x + \frac{m-1}{q-1}\varepsilon\int_\Omega \varphi u^q \mathrm{d}x\right) + \int_\Omega u^p \mathrm{d}x - c\int_\Omega \varphi u^q \mathrm{d}x.$$

令

$$K = \lambda(q-m)/(q-1)\cdot\varepsilon^{-(m-1)/(q-m)},$$

则

$$J'(t) \geqslant -K\int_\Omega \varphi u \mathrm{d}x + \int_\Omega u^p \mathrm{d}x - 2c\int_\Omega \varphi u^q \mathrm{d}x.$$

对 u^p 运用逆 Young 不等式,再由 Jensen 不等式以及 $\int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$ 得

$$J'(t) \geqslant \int_\Omega\left(-Ku + \frac{p}{Lq}u^q - 2cu^q\right)\varphi \mathrm{d}x - \frac{p-q}{q}|\Omega| \geqslant$$
$$\left(\frac{p}{Lq}u^q - 2c\right)J^q - \left(KJ + \frac{p-q}{q}|\Omega|\right).$$

因为 $p/(Lq) - 2c > 0$,且 $f(J) = J^q$ 是凸函数,则存在 $\eta > 1$, 使得

$$\left(\frac{p}{Lq} - 2c\right)J^q \geqslant 2\left(KJ + \frac{p-q}{q}|\Omega|\right), \qquad J \geqslant \eta.$$

故

$$J'(t) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{p}{Lq} - 2c\right)J^q. \tag{10}$$

由式(10)有

$$\lim_{t\to T_0^-} J(t) = +\infty,$$

其中

$$T_0 = \frac{2}{(q-1)(p/(Lq) - 2c)J^{q-1}(0)}.$$

综上,由比较原理知, $u(x,t)$ 在有限时间爆破.

定理 3　设 $p = q > 1$, 则问题(1)既有爆破解又有全局解.

(i) 若 $|\Omega| > c$, $u_0(x)$ 足够大,则对任意 $k(x,y) \geqslant 0$, 解在有限时间内爆破.

(ii) 若 $p > m$, $l > 1$, $\int_\Omega k(x,y)\mathrm{d}y \leqslant 1$, c 充分大,则当 $u_0(x) \leqslant (\rho\psi(x))^{1/m}$ 时,解全局存在.其中 ρ 由式(12)定义, $\psi(x)$ 是如下椭圆方程第二边值问题的正解:

$$\begin{cases} \Delta\psi(x) = k = \dfrac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} = 1, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

证　(i) 考虑常微分方程

$$\underline{u}'(t) = (|\Omega| - c)\underline{u}^p, \quad \underline{u}(0) = \underline{u}_0,$$

其中

$$0 < \underline{u}_0 < \min_{\bar{\Omega}} u_0(x).$$

显然, $\underline{u}(t)$ 是问题(1) 的下解,而 $\lim_{t\to T_0^-} \underline{u}(t) = +\infty$, 其中

$$T_0 = \frac{1}{(p-1)(|\Omega| - c)\underline{u}_0^{p-1}}.$$

所以,由比较原理可知 $u(x,t)$ 在有限时间内爆破.

(ii) 在式(11)中,对于正常数 C,$\psi(x) + C$ 仍是式(11)的解,因此不妨令 $0 < A < \psi(x) < B$.设 $\bar{u}(x) = (\rho\psi(x))^{1/m}$, 其中

$$\left(\frac{k}{cA^{p/m} - B^{p/m}|\Omega|}\right)^{m/(p-m)} < \rho < \left(\frac{1}{mB^{1+(l-1)/m}}\right)^{m/(l-1)}. \tag{12}$$

经计算,对于 $(x,t) \in Q_T$, 有

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_t(x) - \Delta\bar{u}^m = -\rho\Delta\psi(x) = \\
&\quad -\rho k > \rho\cdot\rho^{(p-m)/m}(B^{p/m}|\Omega| - cA^{p/m}) > \\
&\quad \rho^{p/m}\left(\int_\Omega \psi^{p/m}(x)\,\mathrm{d}x - c\psi^{p/m}(x)\right) = \\
&\quad \int_\Omega \bar{u}^p(x)\,\mathrm{d}x - c\bar{u}^q(x).
\end{aligned}$$

对于 $(x,t) \in S_T$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu} - \int_\Omega k(x,y)\bar{u}^l(y,t)\,\mathrm{d}y = \\
&\quad \frac{1}{m}\rho^{1/m}\psi^{1/m-1} - \rho^{l/m}\int_\Omega k(x,y)\psi^{l/m}(y)\,\mathrm{d}y = \\
&\quad \rho^{1/m}\left(\frac{1}{m}\psi^{1/m-1} - \rho^{(l-1)/m}\int_\Omega k(x,y)\psi^{l/m}\mathrm{d}y\right) > \\
&\quad \rho^{1/m}\left(\frac{1}{m}\psi^{1/m-1} - \frac{1}{mB^{1+(l-1)/m}}\int_\Omega k(x,y)\psi^{l/m}\mathrm{d}y\right) > 0.
\end{aligned}$$

此外, $u_0(x) \leqslant (\rho\psi(x))^{1/m}$.

由比较原理可知, $u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t)$, 因此问题(1)有全局解. □

3 总　　结

本文研究了一类具有非局部 Neumann 边界条件以及非线性吸收项的多方渗流方程解的性质,即全局存在性和有限时间内爆破.经过几种情况的讨论和证明可知,解的全局性和爆破取决于参数 p,q,l,m,权函数 $k(x,y)$ 以及初始值的范围.在整个研究过程中,本文首先定义了方程(1)的上下解并建立和证明了比较原理,为后面解的性质的证明奠定了基础;再构造合适的函数,并利用微分不等式、特征函数、常微分方程的解以及椭圆方程第二边值问题的解等方法,得出了方程(1)解的全局存在性和爆破的充分条件,丰富了这一数学领域的研究.

致谢 本文作者衷心感谢辽宁工程技术大学学科创新团队资助项目(LNTU20TD-13)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] POINSOT T J, LELE S K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **101**(1): 104-129.

[2] 朱位秋. 几类非线性系统对白噪声参激与/或外激平稳响应的精确解[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(2): 155-164.(ZHU Weiqiu. Exact solutions for stationary responses of several classes of nonlinear systems to parametric and/or external white noise excitations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, **11**(2): 155-164.(in Chinese))

[3] GLADKOV A, KIM K I. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, **338**(1): 264-273.

[4] WANG Y, MU C, XIANG Z. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2007, **192**(2): 579-585.

[5] YE Z, XU X J. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources[J]. *Nonlinear Analysis*, 2013, **82**: 115-126.

[6] LI Y H, MI Y S, MU C L. Properties of positive solutions for a nonlocal nonlinear diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2014, **34**(3): 748-758.

[7] 张正策, 王彪. 含有非线性梯度项的退化抛物方程解的爆破率估计[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(6): 756-764.(ZHANG Zhengce, WANG Biao. Blow-up rate estimate for degenerate parabolic equation with nonlinear gradient term[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(6): 756-764.(in Chinese))

[8] GLADKOV A, KAVITOTA T. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition[J]. *Applicable Analysis*, 2016, **95**(9): 1974-1988.

[9] ZHOU S, YANG Z D. Blow-up of solutions for a reaction-diffusion equation with nonlinear nonlocal boundary condition[J]. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 2016, **16**: 1-9.

[10] WANG J, YANG H. Properties of solutions for a reaction-diffusion equation with nonlinear absorption and nonlinear nonlocal Neumann boundary condition[J]. *Boundary Value Problems*, 2018, **2018**. DOI: 10.1186/s13661-018-1069-9.

[11] LIU B, WU G, SUN X, et al. Blow-up estimate in a reaction-diffusion equation with nonlinear nonlocal flux and source[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2019, **78**(6): 1862-1877.

[12] GLADKOVA A, GUEDDA M. Global existence of solutions of a semilinear heat equation with nonlinear memory condition[J]. *Applicable Analysis*, 2020, **99**(16): 2823-2832.

[13] LIU B, LIN H, LI F, et al. Blow-up analyses in reaction-diffusion equations with nonlinear nonlocal boundary flux[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2019, **70**(4): 106-133.

[14] 王明新. 非线性抛物型方程[M]. 北京: 科学出版社, 1993.(WANG Mingxin. *Nonlinear Parabolic Equation*[M]. Beijing: Science Press, 1993.(in Chinese))

[15] ANDERSON J R. Local existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations[J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 1991, **16**(1): 105-143.

[16] GLADKOV A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition[J]. *Lithuanian Mathematical Journal*, 2017, **57**(4): 468-478.