

不同先验分布下的后验分布确定土力学参数

魏德永, 阮永芬, 闫明, 郭宇航, 丁海涛

Determination of Soil Mechanical Parameters From Posterior Distributions Under Different Prior Distributions

WEI Deyong, RUAN Yongfen, YAN Ming, GUO Yuhang, and DING Haitao

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410385>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于Bayes FFT的螺栓连接结构模型更新方法](#)

Model Updating for Bolted Structures Based on the Bayesian FFT Method

应用数学和力学. 2020, 41(8): 866–876

[奇异摄动反应扩散方程的后验误差估计及自适应算法](#)

A Posteriori Error Estimation and Adaptive Algorithm for Singularly Perturbed Reaction–Diffusion Equations

应用数学和力学. 2021, 42(3): 323–330

[一种选择工程随机载荷统计分布的累积剩余熵法](#)

A Cumulative Residual Entropy Method in Selection of Random Load Distributions

应用数学和力学. 2018, 39(12): 1343–1350

[基于分位点的广义Pareto分布函数最小二乘拟合方法](#)

A Least–Squares Fitting Method for Generalized Pareto Distributions Based on Quantiles

应用数学和力学. 2018, 39(4): 415–423

[深埋公路隧洞围岩应力和位移分布的复变函数解](#)

Complex Variable Function Solutions for Stress and Displacement Distributions in Surrounding Rock of Deep Buried Highway Tunnels

应用数学和力学. 2018, 39(5): 548–557

[基于Schwarz–Christoffel变换的圆形隧道围岩应力分布特征研究](#)

Research on Surrounding Rock Stress Distributions for Circular Tunnels Based on the Schwarz–Christoffel Transformation

应用数学和力学. 2019, 40(10): 1089–1098



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

不同先验分布下的后验分布确定土力学参数*

魏德永¹, 阮永芬¹, 闫明², 郭宇航², 丁海涛³

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 昆明 650500;
2. 中铁二十局集团第五工程有限公司, 昆明 650000;
3. 云南建投第一勘察设计有限公司, 昆明 650031)

摘要: 岩土工程中各土层参数的取值是根据现场及室内试验数据, 采用经典统计学方法进行确定的, 但这往往忽略了先验信息的作用. 与经典统计学方法不同的是, Bayes 法能从考虑先验分布的角度结合样本分布去推导后验分布, 为岩土参数的取值提供一种新的分析方法. 岩土工程勘察可视为对总体地层的随机抽样, 当抽样完成时, 样本分布密度函数是确定的, 故 Bayes 法中的后验分布取决于先验分布, 因此推导出两套不同的先验分布: 利用先验信息确定先验分布及共轭先验分布. 通过对先验及后验分布中超参数的计算, 当样本总体符合 $N(\mu, \sigma^2)$ 正态分布时, 对所要研究的未知参数 μ 和 σ 展开分析, 综合对比不同先验分布下后验分布的区间长度, 给出岩土参数 Bayes 推断中最佳后验分布所要选择的先验分布. 结果表明: 共轭情况下的后验分布总是比无信息情况下的后验区间短, 概率密度函数分布更集中, 取值更方便. 在正态总体情形下, 根据未知参数 μ 和 σ 的联合后验分布求极值方法, 确定样本总体中最大概率均值 μ_{\max} 和方差 σ_{\max} 作为工程设计采用值, 为岩土参数取值方法提供了一条新的路径, 有较好的工程意义.

关键词: 力学参数; Bayes 法; 先验及后验分布; μ, σ 联合分布; 后验最大概率

中图分类号: TU443 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410385

Determination of Soil Mechanical Parameters From Posterior Distributions Under Different Prior Distributions

WEI Deyong¹, RUAN Yongfen¹, YAN Ming², GUO Yuhang², DING Haitao³

(1. School of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P.R.China;
2. No.5 Engineering Corporation Limited of CR20G, Kunming 650000, P.R.China;
3. YCIH No.1 Engineering Survey and Design Co., Ltd., Kunming 650031, P.R.China)

Abstract: The values of soil layer parameters in geotechnical engineering were determined according to field and laboratory test data with classical statistical methods, without use of the prior information. Unlike classical statistical methods, the Bayes method combines samples from the perspective of prior distribution to deduce the posterior distribution, providing a new analytical method for the evaluation of geotechnical parameters. The geotechnical engineering survey makes a random sampling of the overall strata. The density function of the sample distribution is determined when the sampling is completed. Therefore, the posterior distribution in the Bayes method depends on the prior distribution, and 2 different sets

* 收稿日期: 2020-12-15; 修订日期: 2021-09-08

基金项目: 云南省重点研发计划(社会发展领域)(2018BC008)

作者简介: 魏德永(1993—), 男, 硕士 (E-mail: 396431183@qq.com);

阮永芬(1964—), 女, 教授, 硕士生导师 (通讯作者. E-mail: ryy64@163.com).

引用格式: 魏德永, 阮永芬, 闫明, 郭宇航, 丁海涛. 不同先验分布下的后验分布确定土力学参数[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(11): 1136-1149.

of prior distributions were derived: the prior distribution and the conjugate prior distribution were determined with the prior information. Through calculation of the parameters in the posterior distribution, with the sample generally conforming to the normal distribution of $N(\mu, \sigma^2)$, unknown parameters μ and σ were analyzed, the interval lengths of the posterior distribution under different prior distributions were comprehensively compared, and the prior distribution selected for the optimal posterior distribution in the Bayes inference of the geotechnical parameter was given. The results show that, the posterior distribution in the conjugate case is always shorter than that in the absence of information, and the probability density function distribution is more centralized and the value determination is more convenient. Under the overall normal situation, the extreme value method obtained based on the joint posterior distribution of unknown parameters μ and σ to determine maximum probability mean μ_{\max} and variance σ_{\max} in the sample as the adopted values in the engineering design, provides a way for the value determination of geotechnical parameters, and has engineering significance.

Key words: mechanical parameter; Bayes method; prior and posterior distributions; μ, σ joint distribution; posterior maximum probability

引 言

岩土工程可靠度分析需要合理的参数, 工程中常根据工程勘察的试验数据, 采用经典统计学法来确定岩土力学参数概率分布的密度函数, 进而根据概率密度函数计算岩土力学参数的可靠区间. 随着工程要求的提高, 经典统计学法已不能满足工程设计需要, 因此许多学者对岩土参数的确定提出了很多种方法.

张继周等^[1]对概率论中常见的 5 种分布系列: Bernoulli 分布、Poisson 分布、极值分布、中心极限分布和其他分布系列(如 β 分布及超几何分布等)进行综合分析, 对各种分布产生的背景及物理意义对比后得出中心极限分布系列是最适合岩土参数的概率分布. 宫凤强等^[2]采用二维正态信息扩散法去推断岩土参数概率分布. 随机反演方法可为有限数据条件下岩土力学参数统计特征及概率分布推断提供一条有效途径. 蒋水华等^[3]总结了岩土工程 Bayes 分析常用的参数先验概率分布及似然函数模型, 以一个不排水黏土边坡为例, 采用自适应 Bayes 更新方法系统, 探讨了参数先验概率分布和似然函数对空间变异边坡参数后验概率分布推断及可靠度更新的影响. 阮永芬等^[4]指出, 支持向量机法在理论基础和求解算法方面都具有明显优势, 为确保岩土力学参数取值的合理性, 采用支持向量机法对岩土力学参数进行反演, 并对反演结果进行了检验. 黄天朗等^[5]提出以 Legendre 多项式和 Chebyshev 多项式对岩土参数的概率分布函数进行推断. 宫凤强等^[6]为获得岩土参数概率分布的最佳推断方法, 首先考虑岩土参数均为非负值的特性, 提出以“ 3σ ”准则为基础, 并考虑样本数据偏度进行调整的积分区间确定方法. Kring 等^[7]提出了一种通过结合空间变化因素对岩土体结构进行稳定性分析的综合方法.

然而上述方法都是在经典统计学基础上进行修正后提出的, 不能考虑到样本先验信息的影响. Bayes 法不同于经典统计学方法, 它能充分考虑样本的先验信息及样本信息, 因此国内外学者将 Bayes 法引入岩土工程力学参数的分析: 吴越等^[8]提出岩土强度参数在满足正态分布时, 考虑均值和偏差联合的最大后验估计. 阮永芬等^[9]通过超参数的计算确定了岩土参数分布的先验和后验分布, 并借助 Fisher 信息量推求当样本量趋于无穷时岩土参数的收敛取值, 证明了岩土参数正态和对数正态分布两者是可互换的, 误差可忽略. 朱万闯等^[10]从经典的近似 Bayes 计算方法出发, 对其前沿研究进展进行了系统的综述, 并对其在复杂数据处理中的应用前景及其和前沿人工智能方法的深入联系进行了分析和讨论. Li 等^[11]指出先验和后验分布是 Bayes 统计法的重要组成部分. Lin 等^[12]提出了一种基于 Bayes 反演的参数估计和不确定性分析与工程判断相结合的框架. Straub 等^[13]提出了 Monte-Carlo 的替代方法, 该方法对于更新力学参数模型和其他计算模型特别有效, 被称为使用结构可靠性方法 (BUS) 进行的 Bayes 更新. Goller 等^[14]指出在 Bayes 模型更新中, 使用动态数据的结构系统的参数识别, 可将后验分布表述为两个概率密度函数(一个与先验分布有关, 一个与样本分布有关)的乘积, 先验分布的选择对后验分布影响较大. Frank^[15]对 Bayes 统计法中未知参数后验估计时正则化常数进行了讨论, 给出如何确定正则化常数的方法. 李书等^[16]提出将统计分析中的 Bayes 方法应用到参数识别

问题中,提出了利用测量频率的 Bayes 估计识别动力学模型.

岩土工程勘察实质上是对某区域内的岩土体进行部分随机抽样,并以经典数理统计理论为基础确定抽样部分样本的分布特征参数:如形状参数 σ 和位置参数 μ ,从而以抽样样本的概率密度函数来代替该区域的总体密度函数.但以样本代替总体依然是不全面的,总体分布中的特征参数此时仍然未知,但总体分布的特征参数的部分信息也确实包含在抽样信息中.想要确定总体分布的特征参数可通过扩大抽样的方法,让部分抽样逐渐接近总体的方法来实现.但这需要极大的样本量,这对于岩土工程勘察来说就需花费巨大的成本,这是不可能的.岩土工程勘察是一个动态过程,随着工程的开展,可逐渐获得更多地层总体隐藏的信息,把这些信息整理利用,去对之前抽样的样本数据进行更新,就可获得一个更加符合实际地层的密度函数称之为后验密度函数.但正如文献 [14] 所说:在确定后验分布时,样本分布由抽样形式决定,抽样完成样本分布也基本确定,故先验分布对其影响较大.因此,本文提出根据不同先验分布推导后验分布的计算方法,并对不同先验分布下的后验分布进行对比分析,给出确定岩土力学参数的先验分布与其对应的后验分布方式的选择依据.以昆明滇池国际会展中心及地铁 5 号线部分站点处的成层状互层分布的饱和软土:泥炭质土、黏土、粉土的内摩擦角 ϕ 和黏聚力 c 为例进行验证分析,并验证了推导的实用性和合理性.这能为岩土参数的取值提供一种新的分析理论及方法,有着良好的工程意义.

1 从 Bayes 公式推导后验密度

Bayes 公式是统计学中一个重要的概率公式^[17]:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}, \quad (1)$$

式中, $P(A|B_i)$, $P(B_i|A)$ 分别称为先验及后验概率.式 (1) 中若 A 记为结果, B_i 就为致使 A 发生的原因,所以该公式也可理解为知道结果,找出使其发生的原因.对于存在密度函数的情形下,先验及后验概率也称为先验及后验分布,则式 (1) 转化为

$$\pi(\theta|x) = \frac{h(x,\theta)}{m(x)} = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Omega} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}, \quad (2)$$

式中, θ 为未知特征参数 (本文主要指均值 μ 或方差 σ); $h(x,\theta)$ 为抽样样本分布与未知参数先验分布的乘积; $f(x|\theta)$ 为未知参数的样本密度函数; $\pi(\theta)$ 为样本先验分布,是本文研究的关键; $m(x)$ 为抽样样本的边缘分布,又因 $m(x)$ 与 θ 无关,故 $1/m(x)$ 可看作与 θ 无关的常数.式 (2) 简化为

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta). \quad (3)$$

式 (2) 是 Bayes 公式的密度函数,式 (3) 为简化式, \propto 表示正比于.它集中了总体 Ω 样本先验信息中一切有关未知参数 θ 的一切信息,又排除了与 θ 无关信息后的结果.

后验分布计算可按如下步骤进行:

① 写出未知参数 θ 的似然函数的核心部分,即 $f(x|\theta)$ 中与 θ 有关的部分,以及先验分布 $\pi(\theta)$ 中与 θ 有关的部分.

② 根据式 (3) 写出未知参数后验密度的核心部分, $\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \propto \{f(x|\theta)\} \cdot \{\pi(\theta)\}$, 即后验密度的核心部分是样本概率函数与先验分布 $\pi(\theta)$ 中与 θ 有关部分的乘积.

③ 将第二部得到的结果添加正则化常数^[15], 可以和 x 有关, 便得到后验密度函数.

抽样完成后样本信息是唯一确定的,故后验分布推断的一切出发点都在先验分布的选取上,不同先验分布的选取决定着后验分布的形式,有必要对不同先验分布下后验分布的结果进行对比分析,选取最准确的先验分布作为 Bayes 推断方法.而 Bayes 统计推断中常用的先验分布确定方法主要有三种^[18]: 利用先验信息确定先验分布、无信息先验分布、共轭先验分布.但无信息先验分布的主观性较强,故不进行深入探讨.现对剩余的两种先验分布展开详细讨论,综合对比确定最合适的后验分布计算法,并给出推荐依据.

2 利用先验信息确定先验及后验分布

利用先验信息确定未知参数 θ 先验分布的常用方法有: 直方图、相似对数、选定先验分布形式再确定超参数、定分度及变分度法等^[18]. 最实用的方法为选定先验分布的密度函数形式再计算超参数. 但存在的问题是先验分布 $\pi(\theta)$ 的密度函数如何选择, 若选择不当将导致失误. 通常假设未知参数 θ 的先验密度 $\pi(\theta)$ 为 $N(\alpha, \beta)$ 的正态分布, 其中 α, β 为待确定的超参数. 只要能计算出 α, β 就能得出先验分布的表达式, 对超参数 α, β 做出估计, 得到估计量 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, 使 $\pi(\theta; \alpha, \beta)$ 和 $\pi(\theta; \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ 很接近, 并以 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 代替 α, β , 既选定为先验分布的密度函数, 得到超参数的估计值, 先验分布的表达式也就随之确定.

计算超参数的方法: 从先验信息中整理加工获得前几阶样本的样本矩, 先验分布的总体矩是超参数, 令两者相等, 解方程便可得到超参数的估计值. 假设能得到未知参数 θ 的出现次数及概率 f_i , 就可整理形成表 1, 并以特征参数 θ 用每个小区间的中点值代替, 便可以得到 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 的估计值.

表 1 样本矩确定先验超参数表
Table 1 Sample moment determination of prior hyper parameters

θ	$[x_1+x_i]$	$[x_{i+1}+x_k]$	$[x_{k+1}+x_j]$...	$[x_{s+1}+x_n]$
f_i	E	F	G	...	H

此时

$$\hat{\alpha} = E \frac{x_1 + x_i}{2} + F \frac{x_{i+1} + x_k}{2} + \dots + H \frac{x_{s+1} + x_n}{2}, \tag{4}$$

$$\hat{\beta} = E \left(\frac{x_1 + x_i}{2} - \hat{\alpha} \right)^2 + F \left(\frac{x_{i+1} + x_k}{2} - \hat{\alpha} \right)^2 + \dots + H \left(\frac{x_{s+1} + x_n}{2} - \hat{\alpha} \right)^2. \tag{5}$$

故 $\pi(\theta) \sim N(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ 即为所求, 先验分布也随之确定. 代入式 (3) 便可得到利用先验信息确定先验分布下的后验分布.

3 正态总体情形下共轭先验及后验分布

若样本分布已知, 为了理论上的需要, 可选择未知参数的先验分布为共轭先验分布, 定义如下: 若 Ψ 表示由未知参数 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ 组成的分布, 对分布族中任取一个分布 $\pi \in \Psi$ 及样本 x_i 后, 所得到的后验分布 $\pi(\theta|x)$ 仍然属于 Ψ , 则可把 Ψ 称为一个共轭先验分布族. 但它仅对未知参数 θ 而言, 离开 θ 说共轭先验分布是无意义的^[18].

3.1 未知参数的共轭先验分布确定

已知 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 是从总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的样本, 设 $\mu \sim N(\lambda, \tau^2)$ 为 μ 的先验信息, λ 和 τ 为待确定超参数, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 条件分布记为 $f(\theta|x)$, 根据共轭先验分布的定义则有

$$\pi(\mu|x) \propto f(x|\mu)\pi(\mu) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(\mu-\lambda)^2}{\tau^2} \right] \right\}. \tag{6}$$

设

$$\rho = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\sigma^2 \tau^2}, \tag{7}$$

将式 (6) 右侧部分凑为完全平方项:

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(\mu-\lambda)^2}{\tau^2} = \rho \left[\mu - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \right]^2 + \frac{(x-\lambda)^2}{\sigma^2 + \tau^2}, \tag{8}$$

将式 (8) 代回式 (6), 并略去常数项可得

$$\pi(\mu|x) \propto \exp \left\{ -\frac{\rho}{2} \left[\mu - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \right]^2 - \frac{(x-\lambda)^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)} \right\} \propto \exp \left\{ -\frac{\rho}{2} \left[\mu - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2} \right) \right]^2 \right\}. \tag{9}$$

从式 (9) 可知, $\pi(\mu|x)$ 服从 $N \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2} \right), \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right)$ 的正态分布. 结合共轭先验分布的定义可知, 此时正态

分布均值 μ 的共轭先验分布族为正态分布.同理可推导 σ^2 的共轭先验分布族为逆 Gamma $\Gamma^{-1}(r/2, \zeta/2)$ 分布, r, ζ 为待确定的超参数.故在求取共轭先验分布对应的后验分布时,可选未知参数 θ 的共轭先验分布为正态-逆 Gamma 分布.

3.2 μ 和 σ 皆未知时的共轭先验分布下的后验分布

知道未知参数的先验分布、样本分布后,可据式(3)来确定后验分布.下面再具体介绍确定后验分布的一种新方法.

在已知未知参数的共轭先验分布为正态-逆 Gamma 分布后,可逐渐求取共轭后验分布.步骤如下:

设

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad T = (\bar{x}, S^2), \quad \phi = (\mu, \sigma^2),$$

则 \bar{x} 服从 $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$ 分布,而 $(n-1)S^2/\sigma^2$ 服从 $\chi_{(n-1)}^2$ 分布,且两者相互独立,由因子分解定理^[18]可知 $T=(\bar{x}, S^2)$ 是 $\phi = (\mu, \sigma^2)$ 的联合充分统计量.其联合先验密度为

$$f(x|\phi) = \frac{\sqrt{n(n-1)}^{(n-1)/2}}{\sqrt{\pi}2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma^{-n} (S^2)^{(n-1)/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)S^2+n(\bar{x}-\mu)^2]\right\}. \quad (10)$$

故 (μ, σ^2) 的似然函数为

$$f(\mu, \sigma^2|x) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)S^2+n(\bar{x}-\mu)^2]\right\}. \quad (11)$$

选择 (μ, σ^2) 的先验密度为正态-逆 Gamma 先验,即 $\mu|\sigma^2 \sim N(\lambda, \tau^2), \sigma^2 \sim \Gamma^{-1}(r/2, \zeta/2)$, λ, τ, r, ζ 为待确定超参数,可通过拟合样本密度函数确定,其联合密度为

$$\pi(\theta, \sigma^2) = \pi_1(\theta|\sigma^2) \times \pi_2(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(r+1)/2+1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[k(\mu-\bar{x})^2+\zeta]\right\}. \quad (12)$$

将式(11)及(12)代入式(3),便可得到共轭先验分布下 μ 和 σ^2 的联合后验密度核部分的表达式:

$$\begin{cases} \pi(\theta, \sigma^2|x) \propto (\sigma^2)^{-((v_n+1)/2+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[v_n\sigma_n^2+k_n(\mu-\mu(\bar{x}))^2]\right\}, & v_n = n+r, \quad k_n = n+k, \\ \mu(\bar{x}) = \frac{n\bar{x}+k\mu}{n+k}, \\ v_n\sigma_n = (n-1)S^2+\zeta+\frac{nk}{n+k}(\bar{x}-\lambda)^2, \end{cases} \quad (13)$$

式中, n 为样本量, k, k_n, v_n, σ_n 为后验超参数, $\mu(\bar{x})$ 为后验均值.从式(13)可知后验分布超参数均由先验分布超参数来确定.文献[14]对式(13)添加正则化常数 $C = \sqrt{\frac{k_n}{2\pi}} \cdot \frac{(v_n\sigma_n^2)^{v_n/2}}{2^{v_n/2}\Gamma(v_n/2)}$,便可得到 μ 和 σ^2 的联合后验密度:

$$\pi(\mu, \sigma^2|x) = C(\sigma^2)^{-((v_n+1)/2+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[v_n\sigma_n^2+k_n(\mu-\mu(\bar{x}))^2]\right\}. \quad (14)$$

从式(14)知,给定 μ 时,可得 σ^2 的后验密度为 $\Gamma^{-1}(v_n/2, v_n\sigma_n^2/2)$ 的逆 Gamma 分布;给定 σ^2 后,可得 μ 的后验密度为 $t(v_n, \mu(\bar{x}), \sigma_n^2/k_n)$ 的一元 t 分布.

4 工程案例分析

昆明滇池国际会展中心及地铁5号线的10多个站点都地处滇池湖沼相沉积的软土层.从地表以下分布的土层分别为:杂填土、泥炭质土、粉土、黏土等.地下水在地表下1m左右,三种土的饱和度较高,可视为饱和土.随工程的开展,得到了三种土的内摩擦角 φ 、黏聚力 c 的大量试验数据,具体数值见表2.对于饱和和软黏土一般采用直接快剪强度指标^[19]进行分析,故本文采用直接快剪指标进行分析.

未知参数 θ 为均值 μ 或标准偏差 σ ,实际工程中,需确定 μ 就能给出工程的可靠采用值,而 σ 表征样本的离散

程度, 两个参数一旦确定, 样本总体信息也就确定, 故后面将针对 μ 和 σ 展开分析。

从经典统计学理论可知, μ 的信息就隐藏在原始样本信息中, 需分组计算样本均值. 如果分组组数太多, 则均值信息及计算量也会增多; 反之分组组数太少, 计算量虽然会减少但所得均值信息不足以反应总体情况. 为便于计算把原始样本按照 5 个一组依次进行不同组合后求其平均值. 对于样本总量非 5 的倍数时, 就取样本量最接近 5 的倍数且保证该样本量中必须含最大及最小值. 剩余数据则直接求其平均值, 具体计算公式如下:

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^{j+4} x_j}{5}, \quad j = 1, 6, 11, \dots, n-4; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n/5. \tag{15}$$

表 2 土体 c 和 φ 原始试验样本
Table 2 The c and φ original samples of soil

soil name	sample size N	f_{ak} / kPa	index name	index value
4-1 peaty soil	200	50	c /kPa	16.7, 50.6, 12.10, ..., 32.9, 28.7, 30.5, 46.4, 42.7, 3.3
	200		φ (°)	6.1, 3.8, 5.2, ..., 3.6, 6.9, 6.6, 6.1, 9.8, 9.8, 2.3
4-2 silty soil	190	80	c /kPa	18.5, 20.1, 20.3, 20.6, ..., 31.5, 31.8, 32.7, 34.8
	190		φ (°)	15, 15, 14, 12.3, ..., 18, 18.1, 18.4, 18.6, 18.7, 19.3
4-2 clay	210	90	c /kPa	34.44, 30.16, 28.53, 38.30, ..., 29.66, 31.54, 6.64
	210		φ (°)	5.91, 5.69, 7.24, ..., 6.71, 5.10, 7.21, 5.21

得到位置参数 μ 的样本信息, 给出其拟合分布图, 如图 1 所示. 文献 [1] 指出在概率论统计中, 常见的五种分布中, 正态分布和对数正态分布是最适合土体力学参数的概率分布, 如果变异系数小于 0.3 且偏度系数小于 0.025 时选择正态分布, 反之, 选择对数正态分布. 偏度 (skewness) 是描述数据分布偏离对称轴方向程度的度量, 是统计数据分布非对称程度的数字特征, 偏度是样本三阶标准化矩, 用下式计算^[17]:

$$S_k(x) = E \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^3 \right]. \tag{16}$$

如果偏度系数大于 0, 数据多数集中于对称轴右侧; 小于 0 则数据集中于对称轴左侧; 等于 0 则正好为对称的正态分布. 可见偏度系数过大或过小都是不适合, 故在同时满足偏度系数的绝对值小于 0.025, 且变异系数 (CCV) 小于 0.3 时选择正态分布, 反之选择对数正态分布. 按式 (15) 得到三种土各参数分组后的 μ_i , 以该标准作为检验分布是否满足正态分布或者对数正态分布的依据, 检验结果如表 3 所示.

结合文献 [1] 和 K-S 检验法结果可知, 除 $\mu_{c,c}$ 偏度系数绝对值大于 0.025, 应采用对数正态分布来描述, 其余力学参数都可用正态分布来描述. 文献 [9] 指出, 对数正态分布和正态分布可相互转化, 且误差是可忽略的, 故本文 $\mu_{c,c}$ 依然视为正态分布处理后进行后验分布计算. 图 1 是最直观的 μ_i 的样本信息. 为推求 μ_i 的后验分布, 以图 1 为基础, 结合前面的推导部分推求 μ_i 的先验信息, 在逐步推求后验分布.

4.1 利用先验信息计算先验分布下确定后验分布

需选定先验分布形式, 结合图 1, 假定未知参数 μ 的先验分布服从 $N(\alpha, \beta)$ 的正态分布, 按照表 1 构造样本矩分布表, 并计算 α, β 的矩估计值 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, 再代替 α, β , 先验分布随之确定. 在确定超参数 α, β 后, 又因假定先验分布为正态分布:

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp \left\{ -\frac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2} \right\}. \tag{17}$$

则可确定先验分布表达式. 据式 (3) $(\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta))$, 便可确定后验分布表达式的核心部分, 其中 $f(x|\theta)$ 指特征参数 μ 的样本信息, 根据图 1 确定. 例如泥炭质土的 c , 利用先验信息确定先验分布对应的后验分布为

$$\pi(\mu_{c, ps}|x) \propto f(x|\mu_{c, ps})\pi(\mu_{c, ps}) \propto \exp \left\{ -\frac{(x-29.6)^2}{2 \times 12.8} \right\} \exp \left\{ -\frac{(x-28.8)^2}{2 \times 10.37} \right\} \exp \left\{ -\left(\frac{(x-28.8)^2}{20.74} + \frac{(x-29.6)^2}{25.6} \right) \right\}. \tag{18}$$

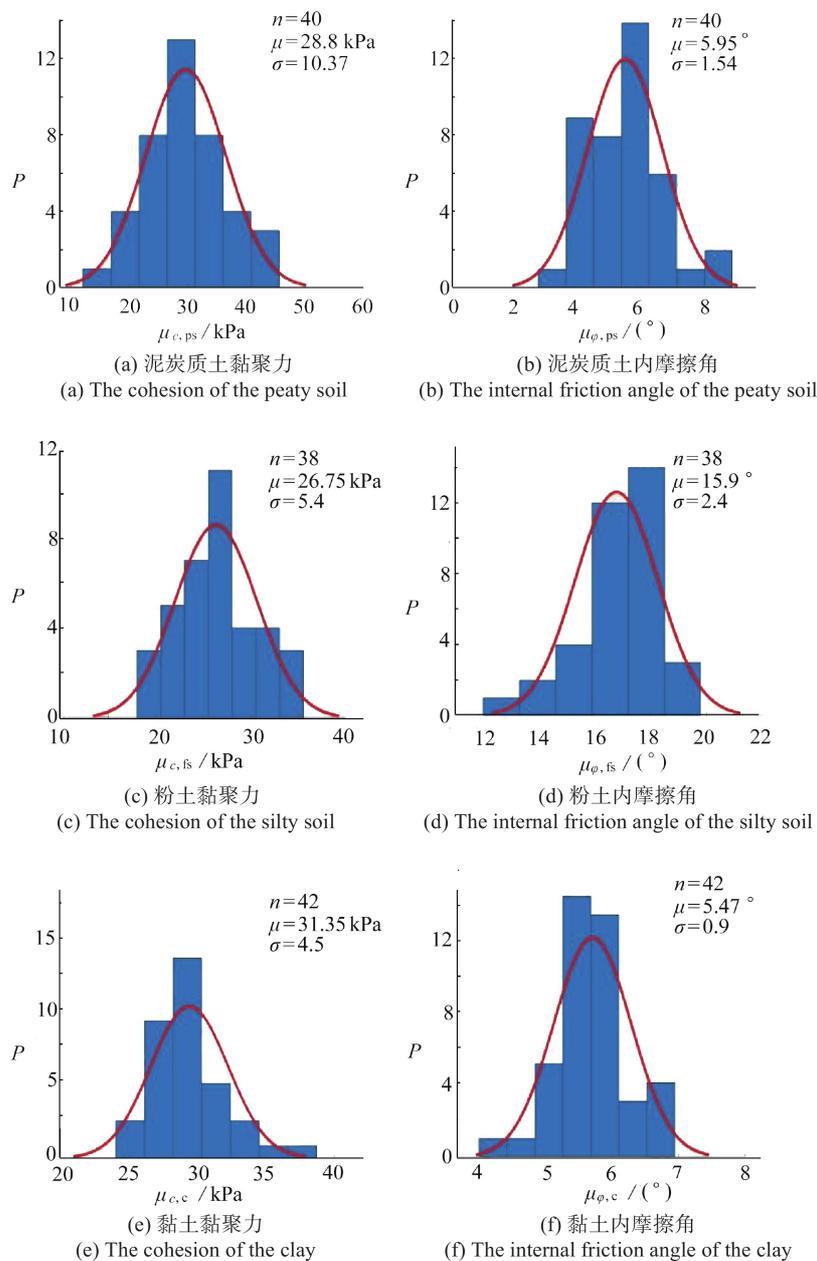


图 1 岩土力学参数平均值 μ 的样本概率分布图

Fig. 1 Sample probability distribution diagrams of average value μ of rock and soil mechanics parameters

表 3 土体力学指标分布模型选择依据

Table 3 Basis for selection of soil mechanics index distribution model

index	number in fig. 1	CCV	absolute value of S_k	type of density function
$\mu_{c,ps}$	(a)	0.232 07	0.015 89	normal distribution
$\mu_{\phi,ps}$	(b)	0.216 97	0.023 64	normal distribution
$\mu_{c,fs}$	(c)	0.163 66	0.016 38	normal distribution
$\mu_{\phi,fs}$	(d)	0.088 32	0.022 41	normal distribution
$\mu_{c,c}$	(e)	0.10 195	0.027 14	lognormal distribution
$\mu_{\phi,c}$	(f)	0.099 91	0.024 58	normal distribution

同理可得其他土力学参数的后验分布表达式,如表 4 所示.

表 4 利用先验信息计算先验及后验分布表
Table 4 Calculated prior and posterior distributions with prior information

soil name	mechanical parameter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	sample distribution $f(x \mu) \propto$	posterior distribution $\pi(\mu x) \propto$
4-1 peaty soil	μ_c	29.6	12.8	$\exp\left\{-\frac{(x-28.8)^2}{2 \times 10.37}\right\}$	$\exp\left\{-\left(\frac{(x-28.8)^2}{20.74} + \frac{(x-29.6)^2}{25.6}\right)\right\}$
	μ_φ	5.6	2.14	$\exp\left\{-\frac{(x-5.95)^2}{2 \times 1.54}\right\}$	$\exp\left\{-\left(\frac{(x-5.6)^2}{4.28} + \frac{(x-5.95)^2}{3.08}\right)\right\}$
4-2 silty soil	μ_c	26.3	7.57	$\exp\left\{-\frac{(x-26.75)^2}{2 \times 5.4}\right\}$	$\exp\left\{-\left(\frac{(x-26.75)^2}{10.8} + \frac{(x-26.3)^2}{15.54}\right)\right\}$
	μ_φ	16.83	2.59	$\exp\left\{-\frac{(x-16.44)^2}{2 \times 2.4}\right\}$	$\exp\left\{-\left(\frac{(x-16.44)^2}{5.18} + \frac{(x-15.9)^2}{4.8}\right)\right\}$
4-2 clay	μ_c	29.86	5.20	$\exp\left\{-\frac{(x-29.4)^2}{2 \times 4.5}\right\}$	$\exp\left\{-\left(\frac{(x-29.86)^2}{10.4} + \frac{(x-29.4)^2}{9}\right)\right\}$
	μ_φ	5.59	1.1	$\exp\left\{-\frac{(x-5.47)^2}{2 \times 0.9}\right\}$	$\exp\left\{-\left(\frac{(x-5.59)^2}{2.2} + \frac{(x-5.47)^2}{1.8}\right)\right\}$

4.2 共轭先验分布下确定后验分布

由前面的分析可知, 在共轭先验分布中, 因选择 (μ, σ^2) 的先验密度为正态-逆 Gamma 先验即 $\mu|\sigma^2 \sim N(\lambda, \tau^2), \sigma^2 \sim \Gamma^{-1}(r/2, \zeta/2)$, λ, τ, r, ζ 为待确定超参数. 从式 (13) 可看出, 后验分布超参数都和先验分布超参数有关, 故开始逐步求解先验分布中的超参数. 因在共轭先验分布中 μ 的先验分布 $\mu|\sigma^2 \sim N(\lambda, \tau^2)$ 为正态分布, 利用先验信息确定先验分布时 μ 的先验分布服从 $N(\alpha, \beta)$ 的正态分布, 故可让 $\alpha = \lambda, \beta = \tau^2$. 即两种方法确定的先验分布可共用一套先验正态分布, 如果此时代入式 (3), 那么两者的后验分布是一样的. 但是在 3.2 小节的推论中共轭后验分布采取了另外一种方法, 故虽然在相同的先验分布下, 但后验分布是不同的.

超参数 k 的确定. 从图 1 可知, 对 μ_i 进行概率分布拟合时存在一个标准偏差 σ , 而共轭先验分布或利用先验信息确定的先验分布为正态分布, 也存在一个标准偏差 τ^2 , 考虑到先验分布有较强的主观性, 故 k 可视为两者比值的相反数, 即 $k = -\tau^2/\sigma^2$, 其中 σ^2 表示位置参数 μ 的样本信息的标准偏差, τ^2 表示利用先验信息的先验分布推导得到的先验分布的标准偏差, 数值上等于表 4 中 $\hat{\beta}$.

先验分布中超参数 r, ζ 的确定. 从 $\sigma^2 \sim \Gamma^{-1}(r/2, \zeta/2)$ 可知, 超参数 r, ζ 和位置参数 μ 的标准偏差分布有关, 且从经典数理统计理论可知, 如果 $X \sim \Gamma(r/2, \zeta/2)$, 则 $1/X \sim \Gamma^{-1}(r/2, \zeta/2)$. 故类似于利用先验信息确定先验分布, 分组方法是将原始得到的数据按 5 个一组的方式求其标准偏差, 并计算其倒数, 然后做出其 Gamma 分布拟合图如图 2 所示.

用来确定超参数的先验分布及后验分布的相关参数确定后, 可依据式 (13) 计算共轭先验分布以及后验分布时的超参数, 计算结果见表 5. 超参数确定后, 便可得出岩土力学参数的先验和后验分布图像. 现以泥炭质土的 c 和 φ 为例分别给出在不同先验、后验及样本 3 种分布下均值 μ 的概率 f 的密度函数图, 如图 3 所示.

对不同算法下的先验分布和后验分布差异性较大的原因进行了深入分析: 从前边的推导过程可知, 在共轭先验分布情况确定的后验分布为给定 μ 时, 可得 σ^2 的后验密度为 $\Gamma^{-1}(v_n/2, v_n\sigma_n^2/2)$ 的逆 Gamma 分布; 给定 σ^2 后可得 μ 的后验密度为 $t(v_n, \mu(\bar{x}), \sigma_n^2/k_n)$ 的一元 t 分布. 其中后验超参数 $\mu(\bar{x})$ 为位置参数, v_n 为自由度, σ_n^2/k_n 为刻度参数. 代入表 5 所得的先验超参数, 由式 (13) 计算所得 $\mu(\bar{x})$ 的结果可知, 共轭情况下的后验均值是比样本分布均值以及共轭情况下的先验均值要小, 故图 3(a)、(d) 两图中后中后验分布总体靠左; 另外根据 t 分布的性质: v_n 为 t 分布的自由度, 自由度越大 t 分布在分布形式上就越接近正态分布, 查阅文献可知, 在自由度大于 30 时, t 分布的分布形式已经很接近正态分布^[17]. 从表 5 可知 v_n 均大于 40, 故在分布形式上又较接近正态分布. 同时还有刻度参数 σ_n^2/k_n 对 t 分布进行制约, 结合表 5 可知, t 分布的刻度参数均较小, 故在密度函数上表现为区间更短, 分布更加集中.

分析图 3 (b)、(e) 发现, 利用先验信息下的先验分布, 确定的后验分布的位置参数 (密度函数对称轴) 与先验分布和样本分布的位置参数 (密度函数对称轴) 相比可知, 后验分布的位置参数在先验分布与样本分布的位置参数的中间. 从表 4 最后一列可知, 利用先验信息下的先验分布所确定的后验分布在形式上是两个正态分

布函数的乘积,故利用先验信息情况下的后验分布表现为先验分布与样本分布的一个折中取值,在分布形式上还是正态分布.

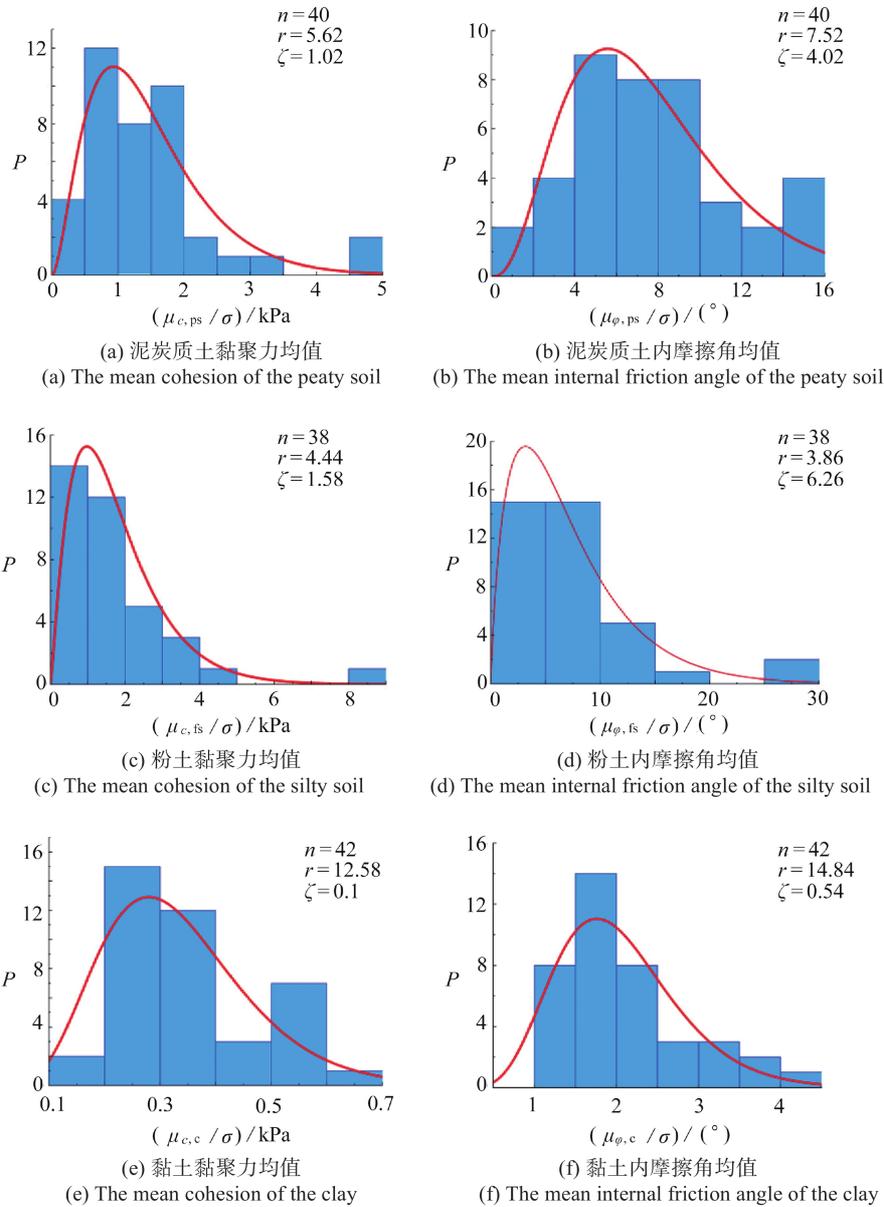


图2 岩土力学参数均值 μ 的 $1/\sigma$ 的Gamma密度函数分布图

Fig. 2 Gamma density function distribution diagrams of $1/\sigma$ for mean value μ of rock and soil mechanical parameters

表5 共轭先验、后验分布超参数计算表

Table 5 The hyper parameter calculation table of conjugate prior and posterior distributions

soil name	index	n	\bar{x}	μ	S^2	r	ζ	k	k_n	$\mu(\bar{x})$	v_n	σ_n
4-1 peaty soil	c	40	27.87 kPa	28.8 kPa	12.1	5.62	1.02	1.23	40.86	27.89 kPa	45.62	10.37
	φ	40	5.44°	5.95°	2.14	7.52	4.02	0.72	40.72	5.45°	47.52	1.86
4-2 silty soil	c	38	26.33 kPa	26.75 kPa	7.57	4.44	1.58	0.71	39.58	26.3 kPa	42.44	6.64
	φ	38	16.84°	15.9°	2.58	3.86	6.26	0.93	41.86	16.8°	41.86	2.32
4-2 clay	c	42	29.81 kPa	31.35 kPa	5.20	12.58	0.1	0.86	42.86	29.8 kPa	54.58	4.003
	φ	42	5.68°	5.47°	1.1	14.84	0.54	0.82	42.82	5.6°	56.84	0.803

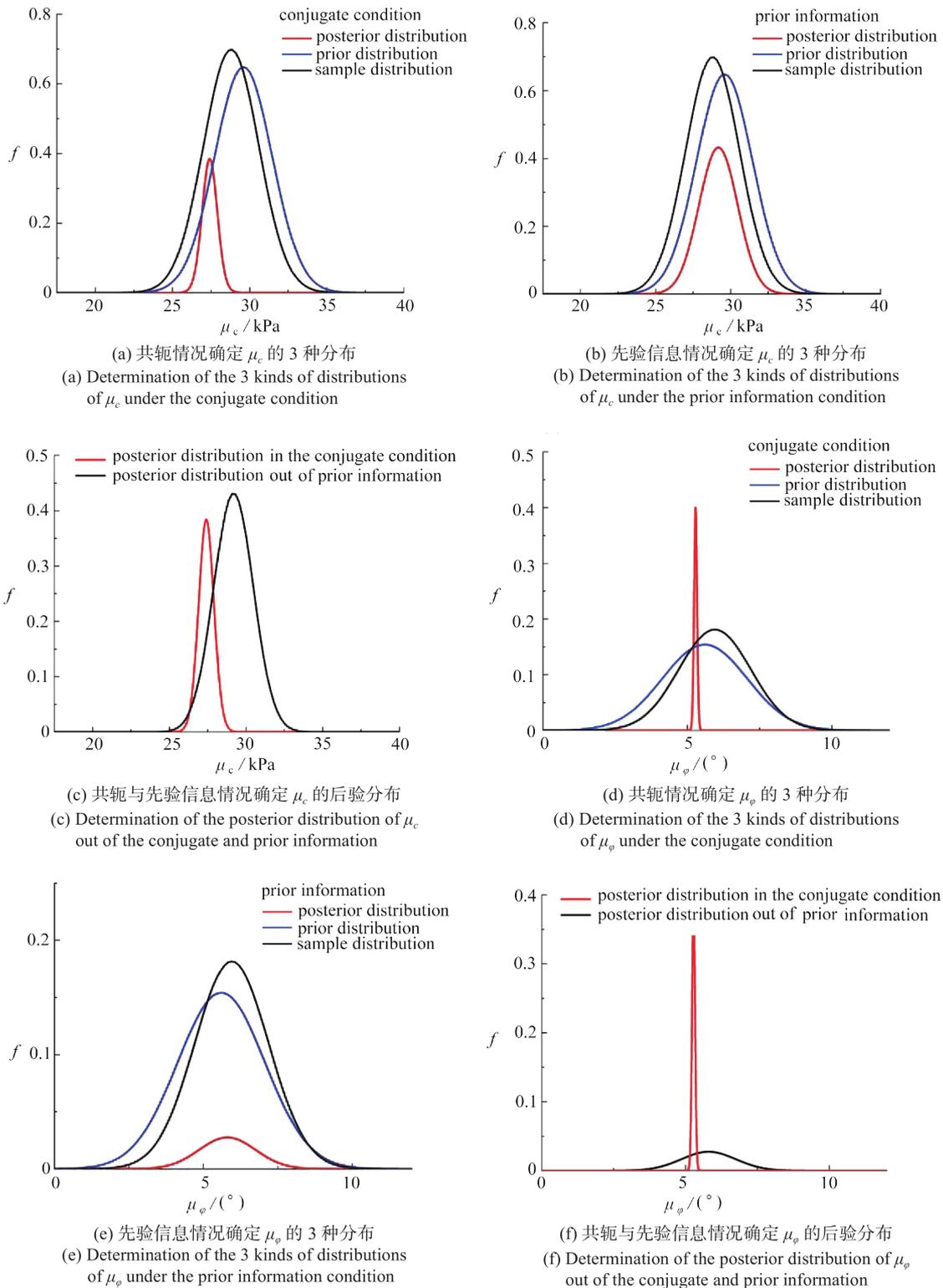


图 3 泥炭质土 c, φ 的均值 μ 的后验分布概率密度曲线

Fig. 3 The posterior distribution probability density curves of mean value μ of peat c and φ

从图 3 中的 (a)~(e) 可知, 无论何种情况下确定的后验分布, 对于 c 或 φ 来说后验分布都比样本分布和先验分布集中, 区间更短, 取值更加方便, 这也说明了 Bayes 法在一定程度上能对参数进行更新, 综合考虑样本信息和先验信息, 对不确定性逐渐消除. 再分析图 3(c)、(f) 可知, 共轭先验情况下确定的后验分布总是比利用先验信息情况下确定的后验分布区间要窄, 密度函数更加集中. 因此共轭先验分布确定的后验分布明显优于

利用先验信息情况下确定的后验分布,同理分析未知参数的方差 σ 的后验分布 (逆 Gamma 分布) 也能得到相同结论.后面通过未知参数联合分布方式给出 μ 和 σ 的最优后验密度,并得到指标的推荐值.

4.3 参数 μ 与 σ 的最优后验密度函数选取

分析可知,共轭先验分布对应的后验分布是 Bayes 法中最好的后验分布,所以就以共轭情况下的后验分布为基础进行分析.

选择最优的后验分布后,需要给出岩土力学参数均值 μ 或 σ 的最可靠值,这才是工程所关心的重点.在确定共轭先验分布超参数后,根据式 (14) 便可得出未知参数的联合后验密度表达式:

$$\pi(\mu, \sigma^2|x) \propto (\sigma^2)^{-24.31} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[4877.48+(\mu-27.89)^2]\right\}. \tag{19}$$

为寻找该二元函数的极值,通过求解下列方程组得出极值点的坐标:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi(\mu, \sigma^2|x)}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \pi(\mu, \sigma^2|x)}{\partial \sigma} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

以泥炭质土的 c 和 φ 为例,解得 c 的极值点坐标为 $\mu = 27.89$ kPa, $\sigma = 9.24$; φ 的极值点坐标为: $\mu = 5.45^\circ$, $\sigma = 1.85$,做出其二元函数与取得极值时给定 σ 对应的 μ 的概率分布图像如图 4.

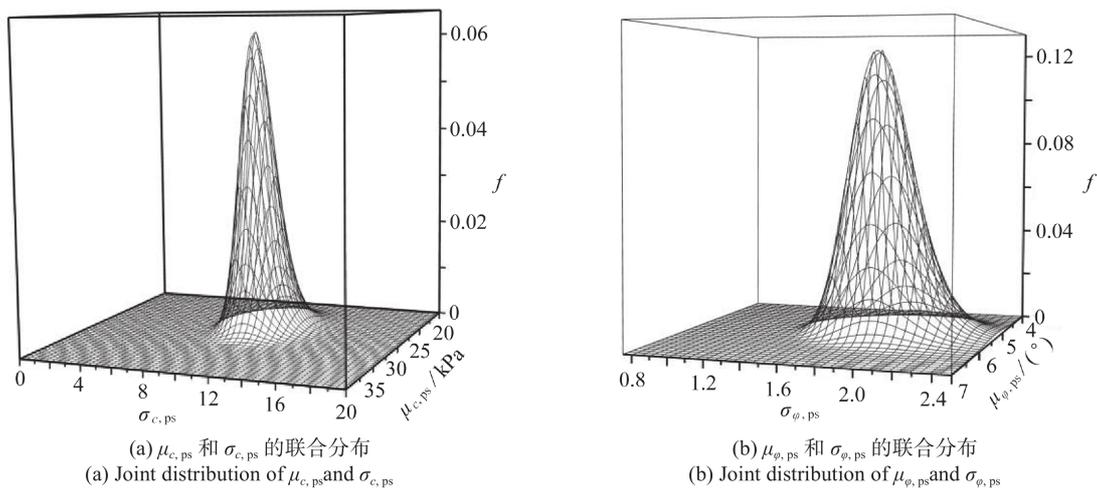


图 4 未知参数的联合分布图

Fig. 4 Joint distribution diagrams of unknown parameters

得到未知参数的联合分布后,通过求极值方法求出联合分布的极值点,把联合分布向一个未知参数极值点平面投影就可得到另一个未知参数的最优概率曲线.如对泥炭质土 c 来说:向等平面 $\sigma = 9.24$ 投影就可得到 $\mu_{c,ps}$ (一元 t 分布) 的最优后验密度曲线如图 5(a);向平面投影可得 $\sigma_{c,ps}$ (Gamma 分布) 的最优后验密度如图 5(b).同理可得 φ 的未知参数的最优概率密度曲线图 5(c)、(d).

从图 5(a)、(c) 可知, Bayes 法依据共轭先验分布确定后验分布后确定岩土力学参数时,泥炭质土的 c 快剪指标建议取 27.89 kPa, φ 为 5.45°.勘察报告采用经典统计学理论给出 c 的快剪建议值为 29.12 kPa, φ 为 6.02°.本文 Bayes 法的计算结果比经典统计学法计算结果偏小,偏安全.另外,本文采用的样本量较大,根据大数定律和中心极限定律可知,在大样本情况下当样本量到达某一值时,经典统计学算法所确定的值也会逐渐收敛.但是两者在样本量为多少时,会产生明显的差异,后续会展开深入的研究.同理可得,共轭情况下泥炭质土 c, φ 快剪指标的标准偏差建议分别取 9.24, 1.85 作为地层总体信息的特征参数,此时地层总体信息中两个未知参数已经确定.同理分析可得其余土层的 c 和 φ 在最优后验密度下的 μ_{\max} 和 σ_{\max} 取值.

另外考虑到岩土参数样本概率密度函数不一定满足正态分布,此时共轭后验分布的确定计算量是比较大的,文献 [9] 中已证明对数正态分布经数学转化后采用正态分布来进行后验分布计算时,误差是可忽略的.因

此, 对其余数理统计中常见分布采用正态分布来代替时的误差进行计算, 并给出其余概率分布转化为正态分布时的计算公式, 如表 6 所示.

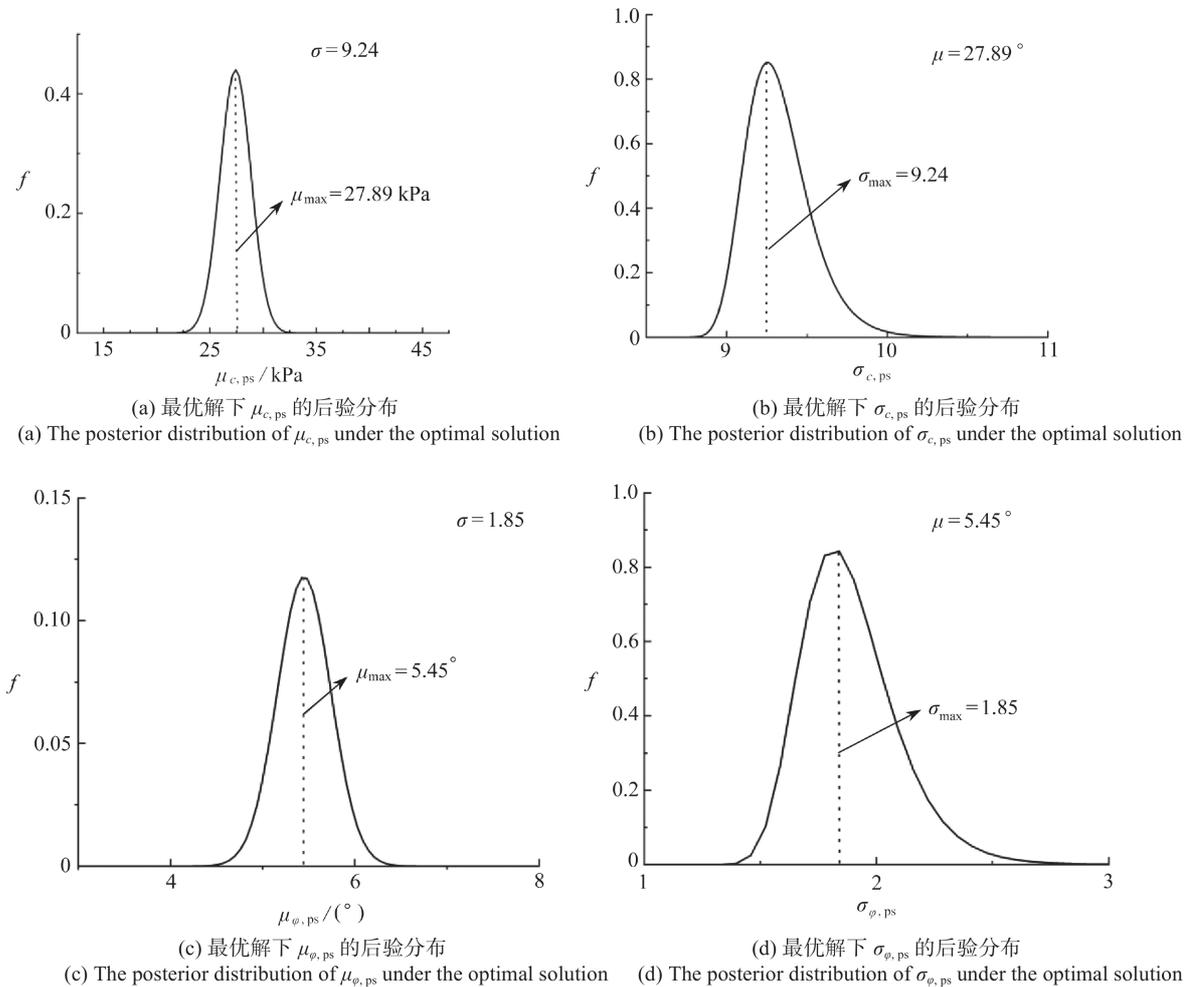


图 5 岩土力学参数最优后验分布密度曲线

Fig. 5 The optimal posterior distribution density curves of rock and soil mechanical parameters

表 6 岩土工程参数概率分布函数转化表

Table 6 The transformation table of probability distribution functions of geotechnical engineering parameters

distribution type	probability density function	normal distribution μ	normal distribution σ
normal distribution	$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ
lognormal distribution	$f(x, \alpha, \gamma) = \frac{1}{\gamma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\left(\frac{\ln x - \alpha}{2\gamma}\right)^2\right\}$	$\mu = e^{\alpha + \gamma^2/2}$	$\sigma = e^{2\alpha + \gamma^2} (e^{\gamma^2} - 1)$
Gamma distribution	$f(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$	$\mu = \frac{\gamma}{\lambda}$	$\sigma = \frac{\gamma}{\lambda^2}$
exponential distribution	$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\mu = \frac{1}{\lambda}$	$\sigma = \frac{1}{\lambda^2}$
Beta distribution	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$	$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\sigma = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\beta + \alpha + 1)}$

5 结 论

本文通过对两种不同先验分布确定的后验分布下的 Bayes 公式推导的原理和过程进行比较, 将其应用对岩土参数取值进行分析, 并以昆明滇池国际会展中心及地铁 5 号线多个站点勘察所得的三种土的 c 和 ϕ 作为分析对象, 给出两种先验分布下的后验分布的推荐使用情况, 主要结论如下:

1) Bayes 法能考虑到先验信息的作用,并结合样本信息共同推导后验分布,所得岩土力学参数较经典统计学理论确定的岩土力学参数更加合理;

2) 对提出的两种根据先验分布确定后验分布的方法综合对比,共轭情况下的后验分布区间明显比利用先验信息情况下的后验分布区间短,取值更方便,共轭先验情况下的实用性更强;

3) 通过对未知参数在共轭先验分布确定的后验分布中的联合分布求其极值,让未知参数取到的概率最大,并以此时的值作为岩土力学参数的推荐使用值,比较合理,有着较好的工程意义;

4) 本文算法不仅可用于样本满足正态分布时的后验分布计算,对于其余常见概率分布的样本密度函数则可以通过数学的方法将其转化为正态分布进行后验分布的计算,扩大了运用范围。

致谢 本文作者衷心感谢中铁四院西南勘察设计有限公司和云南建投第一勘察设计院集团等勘察单位为论文提供大量的勘察报告,确保了本文数据来源的可靠性。

参考文献(References):

- [1] 张继周, 缪林昌. 岩土参数概率分布类型及其选择标准[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(S2): 3526-3532. (ZHANG Jizhou, MIAO Linchang. Types and selection criteria of probability distribution of rock and soil parameters[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, **28**(S2): 3526-3532.(in Chinese))
- [2] 宫凤强, 黄天朗, 王天成. 推断岩土参数概率分布的二维正态信息扩散法[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(10): 2232-2242. (GONG Fengqiang, HUANG Tianlang, WANG Tiancheng. A two dimensional normal information diffusion inference method for probabilistic distributions of geotechnical parameters[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, **37**(10): 2232-2242.(in Chinese))
- [3] 蒋水华, 刘源, 章浩龙, 等. 先验概率分布及似然函数模型的选择对边坡可靠度评价影响的定量评估[J]. 岩土力学, 2020, **41**(9): 3087-3097. (JIANG Shuihua, LIU Yuan, ZHANG Haolong, et al. Quantitatively evaluating the effects of prior probability distribution and likelihood function models on slope reliability assessment[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020, **41**(9): 3087-3097.(in Chinese))
- [4] 阮永芬, 高春钦, 刘克文, 等. 基于粒子群算法优化小波支持向量机的岩土力学参数反演[J]. 岩土力学, 2019, **40**(9): 3662-3669. (RUAN Yongfen, GAO Chunqin, LIU Kewen, et al. Inversion of rock and soil mechanics parameters based on particle swarm optimization wavelet support vector machine[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(9): 3662-3669.(in Chinese))
- [5] 黄天朗, 宫凤强, 伍婷玉. 小样本岩土参数概率分布的正交多项式推断方法[J]. 工程力学, 2017, **34**(8): 85-95. (HUANG Tianlang, GONG Fengqiang, WU Tingyu. Orthogonal polynomial inference method of the probability distribution function for small samples of geotechnical parameters[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(8): 85-95.(in Chinese))
- [6] 宫凤强, 黄天朗, 李夕兵. 岩土参数最优概率分布推断方法及判别准则的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(12): 2452-2460. (GONG Fengqiang, HUANG Tianlang, LI Xibing. Research on approximation method and discriminative criterion of the optimal probability distribution of geotechnical parameters[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2016, **35**(12): 2452-2460.(in Chinese))
- [7] KRING K, CHATTERJEE S. Uncertainty quantification of structural and geotechnical parameter by geostatistical simulations applied to a stability analysis case study with limited exploration data[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2020, **125**(1): 1365-1609.
- [8] 吴越, 刘东升, 孙树国, 等. 岩土强度参数正态-逆伽马分布的最大后验估计[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, **38**(6): 1188-1196. (WU Yue, LIU Dongsheng, SUN Shuguo, et al. Maximum a posteriori estimation of normal inverse gamma distribution of geotechnical strength parameters[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2019, **38**(6): 1188-1196.(in Chinese))
- [9] 阮永芬, 魏德永, 杨均, 等. 用Bayes法及后验分布极限确定土力学参数[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(3): 438-446. (RUAN Yongfen, WEI Deyong, YANG Jun, et al. Determination of soil mechanical parameters by Bayes method and posterior distribution limit[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, **42**(3): 438-446.(in Chinese))

- Chinese))
- [10] 朱万闯, 季春霖, 邓柯. 近似Bayes计算前沿研究进展及应用[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(11): 1179-1203. (ZHU Wanchuang, JI Chunlin, DENG Ke. Recent progress of approximate Bayesian computation and its applications[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(11): 1179-1203.(in Chinese))
- [11] LI Z Y, WANG Y H, YANG G L. Bayesian inference of empirical coefficient for foundation settlement[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University(English Edition)*, 2009, **197**(1): 22-29.
- [12] LIN C P, HUNG Y C. Parameter estimation and uncertainty analysis incorporating engineering judgement by Bayesian inversion[C]//JUANG C H, PHOON K K, PUPPALA A J, et al. *GeoRisk 2011: Geotechnical Risk Assessment and Management*. 2011: 295-302.
- [13] STRAUB D, PAPAIOANNOU I. Bayesian updating with structural reliability methods[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2015, **141**(3): 1-13.
- [14] GOLLER B, BECK J L, SCHUËLLEG I, et al. Evidence-based identification of weighting factors in Bayesian model updating using modal data[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, **138**(5): 430-440.
- [15] Frank T C. On prior parameter structure investigation to parameter uncertainty[C]//American Society of Civil Engineers. *World Water and Environmental Resources Congress*. 2005.
- [16] 李书, 卓家寿, 任青文. 动力模型参数识别中的Bayes方法[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(4): 402-408. (LI Shu, ZHUO Jiashou, REN Qingwen. Parameter identification of dynamic models using a Bayes approach[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, **21**(4): 402-408.(in Chinese))
- [17] 戴琳. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011. (DAI Lin. *Probability Theory and Mathematical Statistics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2011. (in Chinese))
- [18] 韦来生, 张伟平. Bayes分析[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 2013. (WEI Laisheng, ZHANG Weiping. *Bayes Analysis*[M]. Beijing: University of Science and Technology of China, 2013. (in Chinese))
- [19] 刘江涛, 杨正东, 孙飞达, 等. 昆明湖相沉积软土区基坑土体抗剪强度分析研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(S2): 125-129. (LIU Jiangtao, YANG Zhengdong, SUN Feida, et al. Shear strength of lacustrine deposits in soft soil area of Kunming[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, **36**(S2): 125-129.(in Chinese))