ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887　　http://www.applmathmech.cn

具有白噪声的随机格点系统的随机吸引子的 Kolmogorov 熵*

班爱玲，　周　恺

（池州学院 大数据与人工智能学院，安徽 池州 247000）

摘要： 基于耗散的随机格点系统解的渐近行为理论，主要运用元素分解法与有限维空间中多面体球覆盖的拓扑性质，研究了具有白噪声的随机 Klein-Gordon-Schrödinger 格点动力系统的随机吸引子的 Kolmogorov 熵，并得到它的一个上界.

关　键　词： 白噪声；　格点系统；　随机吸引子；　Kolmogorov 熵

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.410360

Kolmogorov Entropy of Random Attractors for Stochastic Lattice Systems With White Noise

BAN Ailing，　ZHOU Kai

（*School of Big Data and Artificial Intelligence*, *Chizhou University*, *ChiZhou*, *Anhui* 247000, *P.R.China*）

Abstract: Based on the asymptotic behavior theory for solutions of dissipative stochastic lattice systems, the Kolmogorov entropy of random attractors in stochastic Klein-Gordon-Schrödinger lattice dynamic systems with white noise was studied with the element decomposition method and the topological properties of polyhedral sphere covering in the finite dimensional space, and an upper bound for the Kolmogorov entropy of random attractors was obtained.

Key words: white noise; lattice system; random attractor; Kolmogorov entropy

引　　言

Klein-Gordon-Schrödinger（简称 KGS）方程是量子场论中刻画守恒复中子场与介子场具有 Yukawa 相互作用的数学模型，对它的研究具有重要的现实意义.KGS 格点系统具有如下形式：

$$\begin{cases}\ddot{x}_j + \alpha \dot{x}_j + (Ax)_j + \gamma x_j - \nu |z_j|^2 = f_j, \\ \mathrm{i}\dot{z}_j - (Az)_j + \mathrm{i}\beta z_j + z_j x_j = g_j,\end{cases} \qquad j = (j_1, j_2, \cdots, j_k) \in Z^k, \tag{1}$$

其中 i 为虚数单位，$\alpha, \beta, \gamma, \nu$ 是正常数，f_j, g_j 为给定的函数.

---

* **收稿日期：** 2020-11-26；**修订日期：** 2021-05-19

基金项目： 安徽省自然科学基金（青年项目）（1708085QA13）

作者简介： 班爱玲（1982—），女，讲师，硕士（通讯作者. E-mail：736953938@qq.com）.

引用格式： 班爱玲，周恺. 具有白噪声的随机格点系统的随机吸引子的 Kolmogorov 熵［J］. 应用数学和力学，2021，**42**（7）：735-740.

格点动力系统解的渐近行为已经得到不少学者的关注与研究[1-9],对于无噪声扰动的自治与非自治 KGS 格点系统(1),文献[4-6]分别证明了该类系统的全局吸引子和核截面的存在性及其分形维数估计.文献[8-9]证明了系统(1)具有白噪声扰动的 KGS 格点系统存在随机吸引子,但关于该随机格点系统的随机吸引子的 Kolmogorov 熵的上界估计至今未见报道.然而吸引子的 Kolmogorov 熵的有界性是一个重要的研究课题,Kolmogorov 熵是动力系统轨道分裂数目渐近增长率的一种度量,它可以度量系统运动的混乱程度,即 Kolmogorov 熵可用于区分系统的运动状态(规则运动、混沌运动、随机运动).当系统处于规则运动时,Kolmogorov 熵为零;当系统处于确定的混沌运动时,Kolmogorov 熵为大于零的常数;当系统处于随机运动时,Kolmogorov 熵趋于无穷大.因此 Kolmogorov 熵越大,系统混沌的程度就越严重或系统越复杂,所以 Kolmogorov 熵的数值是判断运动性质的重要指标.

本文考虑具有白噪声的随机 KGS 格点动力系统:

$$\begin{cases}\ddot{x}_j + \alpha\dot{x}_j + (Ax)_j + \gamma x_j - \nu|z_j|^2 = f_j + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \dot{w}_n^{(1)}, \\ \mathrm{i}\dot{z}_j - (Az)_j + \mathrm{i}\beta z_j + z_j x_j = g_j + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n z_j \circ \dot{w}_n^{(2)},\end{cases} \qquad j = (j_1, j_2, \cdots, j_k) \in Z^k, \tag{2}$$

初值为 $x(0) = (x_{j0})_{j\in Z^k} = x_0$,$\dot{x}(0) = (x_{j0}^1)_{j\in Z^k} = x_0^1$,$z(0) = (z_{j0})_{j\in Z^k} = z_0$ 的随机吸引子的 Kolmogorov 熵的上界估计.其中 $x = (x_j)_{j\in Z^k}$,$x_j \in \mathbf{R}$,$z = (z_j)_{j\in Z^k}$,$z_j \in \mathbf{C}$($\mathbf{R}$ 是实数集,$\mathbf{C}$ 是复数集),$f = (f_j)_{j\in Z^k}$,$g = (g_j)_{j\in Z^k} \in C_b(\mathbf{R}, l^2)$,i 为虚数单位,$\alpha,\beta,\gamma,\nu$ 是正常数,$a_n, b_n (n = 1,2,\cdots,N)$ 均为实数,$(w_n^{(1)}, w_n^{(2)})$ 是概率空间(Ω, F, P) 上相互独立的标准实值双边 Wiener 过程.

1 预 备 知 识

设 $k \in \mathbf{Z}_+$($\mathbf{Z}_+$ 为正整数集),定义 l^2, L^2 分别为

$$l^2 = \left\{x = (x_j): j = (j_1, j_2, \cdots, j_k) \in Z^k, x_j \in \mathbf{R}, \sum_{j\in Z^k} x_j^2 < \infty\right\},$$

$$L^2 = \left\{z = (z_j): j = (j_1, j_2, \cdots, j_k) \in Z^k, z_j \in \mathbf{C}, \sum_{j\in Z^k} z_j^2 < \infty\right\}.$$

$X = l^2$ 或 L^2,且 X 的内积和范数分别为

$$(x,y) = \sum_{j\in Z^k} x_j \bar{y}_j,\ \|x\|^2 = (x,x) = \sum_{j\in Z^k} |x_j|^2, \qquad \forall x, y \in X,$$

其中 $\bar{y}_j$ 表示 y_j 的共轭.在 X 上定义线性算子 A, B:

$$A = \sum_{p=1}^{k} A_p,\ A_p = B_p B_p^* = B_p^* B_p, \qquad p = 1,2,\cdots,k,$$

其中 B_p^* 表示 B_p 的伴随算子,对于 $\forall x = (x_j)_{j\in Z^k} \in X$,$j = (j_1, j_2, \cdots, j_k) \in Z^k$,定义

$$(A_p x)_j = 2x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p, \cdots, j_k)} - x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p+1, \cdots, j_k)} - x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p-1, \cdots, j_k)},$$

$$(B_p x)_j = x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p+1, \cdots, j_k)} - x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p, \cdots, j_k)},\ (B_p^* x)_j = x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p-1, \cdots, j_k)} - x_{(j_1, j_2, \cdots, j_p, \cdots, j_k)}.$$

设 (Ω, F, P) 是一个概率空间,其中 $\Omega = \{\omega \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}\times\mathbf{R}): \omega(0) = 0\}$,$\Omega$ 上的 Borel σ-代数 F 由紧开拓扑生成,P 是 F 上的 Wiener 测度,Ω 上的变换族 $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}}$ 定义为:$\theta_0 = \mathrm{id}$(恒等算子),$\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$,$\theta_t\omega(\cdot) = \omega(\cdot + t) - \omega(t)$,$t, s \in \mathbf{R}$.于是 $(\Omega, F, P, (\theta_t)_{t\in\mathbf{R}})$ 成为一个遍历度量动力系统.

对于任意 $x = (x_j)_{j\in Z^k}$,$y = (y_j)_{j\in Z^k} \in l^2$,在 l^2 上定义一个新的内积 $(\cdot,\cdot)_\gamma$ 为

$$(x,y)_\gamma = \sum_{p=1}^{k} (B_p x, B_p y) + \gamma(x,y),\ \|x\|_\gamma^2 = (x,x)_\gamma = \sum_{p=1}^{k} \|B_p x\|^2 + \gamma\|x\|^2,$$

从而对任意 $x = (x_j)_{j\in Z^k} \in l^2$,有 $\|B_p x\|^2 \le 4\|x\|^2$,$\gamma\|x\|^2 \le \|x\|_\gamma^2 \le (4k + \gamma)\|x\|^2$.

记 $l^2 = (l^2, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$,$l_\gamma^2 = (l^2, (\cdot,\cdot)_\gamma, \|\cdot\|_\gamma)$,显然,范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_\gamma$ 是相互等价的.

取 $E = l^2 \times l^2 \times L^2$,$E_\gamma = l_\gamma^2 \times l^2 \times L^2$,$\boldsymbol{\psi}^{(n)} = (x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}) = (x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, z_j^{(n)})_{j\in Z^k}$,$n = 1,2$,定义

$$(\boldsymbol{\psi}^{(1)}, \boldsymbol{\psi}^{(2)})_{E_\gamma} = (x^{(1)}, x^{(2)})_\gamma + (y^{(1)}, y^{(2)}) + (z^{(1)}, z^{(2)}) =$$

$$\sum_{j\in Z^k}\left(\sum_{p=1}^{k}(B_px^{(1)})_j(B_px^{(2)})_j+\gamma x_j^{(1)}x_j^{(2)}+y_j^{(1)}y_j^{(2)}+z_j^{(1)}\overline{z_j^{(2)}}\right),$$
$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{E_\gamma}^2=(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi})_{E_\gamma},$$

其中 $\overline{z_j^{(2)}}$ 为 $z_j^{(2)}$ 的共轭复数.

系统(2)可写为

$$\begin{cases}\ddot{x}+\alpha\dot{x}+Ax+\gamma x-\nu|z|^2=f+\sum\limits_{n=1}^{N}a_n\dot{w}_n^{(1)},\\ \mathrm{i}\dot{z}-Az+\mathrm{i}\beta z+zx=g+\sum\limits_{n=1}^{N}b_nz\circ\dot{w}_n^{(2)},\end{cases}\tag{3}$$

其初值 $x(0)=x_0,\dot{x}(0)=x_0^1,z(0)=z_0$.

对于 Ornstein-Uhlenbeck 方程[10]:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_n^{(1)}+\boldsymbol{\eta}_n^{(1)}\mathrm{d}t=\mathrm{d}w_n^{(1)}(t,\omega),\\ \mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_n^{(2)}+\boldsymbol{\eta}_n^{(2)}\mathrm{d}t=\mathrm{d}w_n^{(2)}(t,\omega),\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$w_n^{(1)}(t,\omega)=w_n^{(1)}(t),\ w_n^{(2)}(t,\omega)=w_n^{(2)}(t),\qquad n=1,2,\cdots,N,\ t\in\mathbf{R},\ \omega\in\Omega.$$

用 $\boldsymbol{\eta}_n^{(1)}(\theta_t\omega)$ 和 $\boldsymbol{\eta}_n^{(2)}(\theta_t\omega)$, $n=1,2,\cdots,N,t\in\mathbf{R}$ 分别表示方程(4)的稳定解.

记 $\rho_1(\omega)=\sum_{n=1}^{N}a_n\boldsymbol{\eta}_n^{(1)}(\omega)$, $\rho_2(\omega)=\sum_{n=1}^{N}b_n\boldsymbol{\eta}_n^{(2)}(\omega)$, 令 $y=\dot{x}+\delta x-\rho_1(\theta_t\omega)$, $\tilde{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_2(\theta_t\omega)}z$, 其中 $\delta=\alpha\gamma/(\alpha^2+4\gamma)>0$, 显然, $|\tilde{z}|=|z|$, 因此,系统(3)可化为

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}+\boldsymbol{\Lambda\psi}=\boldsymbol{G}(\theta_t\omega,\boldsymbol{\psi}),\tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{pmatrix}x\\y\\\tilde{z}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\delta I&-I&0\\A+(\gamma+\delta^2-\delta\alpha)I&(\alpha-\delta)I&0\\0&0&\mathrm{i}A+\beta I\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}(\theta_t\omega,\boldsymbol{\psi})=\begin{pmatrix}\rho_1(\theta_t\omega)\\f+\nu|\tilde{z}|^2+(1+\delta-\alpha)\rho_1(\theta_t\omega)\\\mathrm{i}\tilde{z}x-\mathrm{i}g\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_2(\theta_t\omega)}-\mathrm{i}\tilde{z}\rho_2(\theta_t\omega)\end{pmatrix}.$$

引理 1[8-9]　对于系统(5)有以下结论成立:

① 对任意 $\omega\in\Omega,\boldsymbol{\psi}_0\in E$, 系统(5)存在唯一解 $\boldsymbol{\psi}(t,\omega,\boldsymbol{\psi}_0)$ 关于初值 $\boldsymbol{\psi}_0$ 连续,关于 ω 可测,即系统(5)的解 $\boldsymbol{\psi}:\mathbf{R}_+\times\Omega\times E\to E$ 是一个连续随机动力系统,且 $\boldsymbol{\psi}$ 存在一个随机吸收集 $\omega\to\kappa(\omega)=\{\boldsymbol{\psi}\in E_\gamma:\|\boldsymbol{\psi}\|_{E_\gamma}\leqslant r(\omega)\}$.

② 随机动力系统 $\boldsymbol{\psi}$ 是渐近零的,即 $\forall\varepsilon>0,\omega\in\Omega,\boldsymbol{\psi}_0\in\kappa(\omega)$, 存在常数 $T(\varepsilon,\omega,\kappa(\omega))>0,J(\varepsilon,\omega)>0$, 使得系统(5)的解 $\boldsymbol{\psi}$ 满足

$$\sum_{\|j\|\geqslant J(\varepsilon,\omega)}\|\boldsymbol{\psi}_j(t,\theta_{-t}\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\theta_{-t}\omega))\|_{E_\gamma}^2\leqslant\varepsilon,\qquad\forall t\geqslant T(\varepsilon,\omega,\kappa(\omega)),\tag{6}$$

其中

$$\|j\|=\max\{|j_i|\},\qquad i=1,2,\cdots,k,\ j=(j_1,j_2,\cdots,j_k).$$

③ 随机动力系统 $\boldsymbol{\psi}$ 在 E 中存在一个随机吸引子 $\omega\to\wp(\omega)$, 其中

$$\wp(\omega)=\bigcap_{\tau\geqslant T_\kappa}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}\boldsymbol{\psi}(t,\theta_{-t}\omega,\kappa(\theta_{-t}\omega))},\qquad\omega\in\Omega.$$

2　主要结果

下面来估计随机吸引子 $\wp(\omega)$ 的 Kolmogorov 熵.

定义 1[7]　设 $D(\omega)\subset X$ 是一个随机集,对 $\forall\varepsilon>0$, 每个 $\omega\in\Omega$, 令 $n_{\varepsilon,\omega}(D(\omega),X)=n_{\varepsilon,\omega}(D(\omega))$ 表

示在 X 中以 ε 为半径覆盖 $D(\omega)$ 的开球的最小个数,则称 $K_\varepsilon(D(\omega)) = K_\varepsilon(D(\omega), X) = \ln n_{\varepsilon,\omega}(D(\omega))$ 为 $D(\omega)$ 在 X 中的 Kolmogorov 熵.

引理 2[11] 若 $m \in \mathbf{N}$ 且 $\Delta = \{u = (u_j)_{|j| \leqslant m}: u_j \in \mathbf{R}, |u_j| \leqslant r\} \subset R^{2m+1}$ 是一个正多面体,则 Δ 在 R^{2m+1} 下能被以 $\varepsilon/2$ 为半径的 $n_\varepsilon(\Delta) = ([2r(1/\varepsilon)\sqrt{2m+1}] + 1)^{2m+1}$ 个球覆盖, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

定理 1 $\forall \varepsilon > 0$, 系统(5)的随机吸引子 $\wp(\omega)$ 在 E_γ 中 Kolmogorov 熵为

$$K_\varepsilon(\wp(\omega)) \leqslant (2J(\varepsilon,\omega) + 1)\left(\ln\left(\left[\frac{3(4k+\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1}}{\varepsilon\sqrt{\gamma}}\right] + 1\right)\right) + (2J(\varepsilon,\omega) + 1)\left(2\ln\left(\left[\frac{3(4k+\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1}}{\varepsilon}\right] + 1\right)\right), \tag{7}$$

其中 $J(\varepsilon,\omega)$ 是使得

$$\sup_{(\boldsymbol{\psi}_j)_{j\in Z^k} = \boldsymbol{\psi} \in \kappa(\omega)} \left(\sum_{\|j\| \geqslant J(\varepsilon,\omega)} \|\boldsymbol{\psi}_j(\omega)\|_{E_\gamma}^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{3(4k+\gamma) - \sqrt{3(4k+\gamma)}}{3(4k+\gamma)}\varepsilon \tag{8}$$

成立的最小正整数.

证明 由引理 1 中的式(6)得,对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon,\omega,\kappa(\omega)) > 0, J(\varepsilon,\omega) \in \mathbf{N}$ 使得系统(5)的解 $\boldsymbol{\psi}(t,\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\omega)) = (x_j(t,\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\omega)), y_j(t,\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\omega)), \tilde{z}_j(t,\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\omega)))_{j\in Z^k}^{\mathrm{T}}$ 满足对 $\forall \omega \in \Omega, \forall t > T(\varepsilon,\omega,\kappa(\omega))$.由于 $\wp(\theta_{-t}\omega) \subset \kappa(\theta_{-t}\omega)$, 有

$$\sup_{\boldsymbol{\psi}_0(\theta_{-t}\omega) \in \wp(\theta_{-t}\omega)} \sum_{\|j\| \geqslant J(\varepsilon,\omega)} \|\boldsymbol{\psi}_j(t,\theta_{-t}\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\theta_{-t}\omega))\|_{E_\gamma}^2 \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

由式(9)及随机吸引子 $\wp(\omega)$ 不变性知,记

$$J(\varepsilon,\omega) = J\left(\frac{3(4k+\gamma) - \sqrt{3(4k+\gamma)}}{3(4k+\gamma)}\varepsilon, \omega\right) \in \mathbf{N},$$

使得对 $\boldsymbol{\psi}(\omega) = \boldsymbol{\psi}(t,\theta_{-t}\omega,\boldsymbol{\psi}_0(\theta_{-t}\omega)) \in \wp(\omega)$, 式(8)也成立.把 $\boldsymbol{\psi}(\omega)$ 分解成两部分:

$$\boldsymbol{\psi}(\omega) = \boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega) + \boldsymbol{\psi}^{(2)}(\omega) = (\boldsymbol{\psi}_j^{(1)}(\omega))_{j\in Z^k} + (\boldsymbol{\psi}_j^{(2)}(\omega))_{j\in Z^k},$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(1)} = (u_j, v_j, \tau_j) = \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_j(\omega), & \|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega), \\ \mathbf{0}, & \|j\| > J(\varepsilon,\omega), \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\psi}_j^{(2)} = (c_j, e_j, \mu_j) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega), \\ \boldsymbol{\psi}_j(\omega), & \|j\| > J(\varepsilon,\omega), \end{cases}$$

则

$$\|\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega)\|_{E_\gamma}^2 = \sum_{\|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega)} \|\boldsymbol{\psi}_j(\omega)\|_{E_\gamma}^2 = \sum_{\|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega)} \left(\sum_{i=1}^{k} (u_{ji+1} - u_{ji})^2 + \gamma u_j^2 + v_j^2 + \tau_j^2\right) \leqslant \|\boldsymbol{\psi}(\omega)\|_{E_\gamma}^2 \leqslant r^2(\omega),$$

$$\|\boldsymbol{\psi}^{(2)}(\omega)\|_{E_\gamma} = \left(\sum_{\|j\| \geqslant J(\varepsilon,\omega)} \|\boldsymbol{\psi}_j(\omega)\|_{E_\gamma}^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{3(4k+\gamma) - \sqrt{3(4k+\gamma)}}{3(4k+\gamma)}\varepsilon.$$

故 $\sum_{\|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega)} (\gamma u_j^2 + v_j^2 + \tau_j^2) \leqslant r^2(\omega)$, 且对 $\|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega)$, 有

$$|u_j(\omega)| \leqslant \frac{r(\omega)}{\sqrt{\gamma}}, \quad |v_j(\omega)| \leqslant r(\omega), \quad |\tau_j(\omega)| \leqslant r(\omega).$$

对于正多面体

$$\Delta_1 = \{u = (u_j)_{\|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega)}: u_j \in \mathbf{R}, |u_j| \leqslant r(\omega)/\sqrt{\gamma}\} \subset R^{2J(\varepsilon,\omega)+1},$$

由引理 2 可得,在 $R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 的通常范数下, Δ_1 能被半径为 $\varepsilon/(3(4k+\gamma))$ 的 $n_{\varepsilon,\omega}^{(1)}(\Delta_1) = ([(3(4k+\gamma)r(\omega) \times \sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1})/\varepsilon\sqrt{\gamma}] + 1)^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 个球所覆盖.同理可得,正多面体 $\Delta_2 = \{v = (v_j)_{\|j\| \leqslant J(\varepsilon,\omega)}: v_j \in \mathbf{R}, |v_j| \leqslant r(\omega)\} \subset R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 在 $R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 的通常范数下,能被半径为 $\varepsilon/(3(4k+\gamma))$ 的 $n_{\varepsilon,\omega}^{(2)}(\Delta_2) = ([(3(4k +$

$\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1})/\varepsilon]+1)^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 个球所覆盖;而正多面体 $\Delta_3=\{\tau=(\tau_j)_{\|j\|\le J(\varepsilon,\omega)}:\tau_j\in\mathbf{C},|\tau_j|\le r(\omega)\}\subset C^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 在 $C^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 的通常范数下,也能被半径为 $\varepsilon/(3(4k+\gamma))$ 的 $n^{(3)}_{\varepsilon,\omega}(\Delta_3)=([(3(4k+\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1})/\varepsilon]+1)^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 个球所覆盖.因此,正多面体

$$\Delta=\Delta_1\times\Delta_2\times\Delta_3=\left\{\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega)=(u_l(\omega),v_m(\omega),\tau_n(\omega))^{\mathrm{T}}_{\|l\|,\|m\|,\|n\|\le J(\varepsilon,\omega)}\in R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times C^{2J(\varepsilon,\omega)+1}:|u_l|\le\frac{r(\omega)}{\sqrt{\gamma}},|v_m|\le r(\omega),|\tau_n|\le r(\omega)\right\},$$

在 $R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times C^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$ 的通常范数下能被半径为 $\sqrt{3}\varepsilon/(3(4k+\gamma))$ 的

$$n_{\varepsilon,\omega}(\Delta)=n^{(1)}_{\varepsilon,\omega}(\Delta_1)\times n^{(2)}_{\varepsilon,\omega}(\Delta_2)\times n^{(3)}_{\varepsilon,\omega}(\Delta_3)=\left(\left[\frac{3(4k+\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1}}{\varepsilon\sqrt{\gamma}}\right]+1\right)^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times\left(\left[\frac{3(4k+\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1}}{\varepsilon}\right]+1\right)^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times\left(\left[\frac{3(4k+\gamma)r(\omega)\sqrt{2J(\varepsilon,\omega)+1}}{\varepsilon}\right]+1\right)^{2J(\varepsilon,\omega)+1}$$

个球所覆盖.

取这些半径为 $\sqrt{3}\varepsilon/(3(4k+\gamma))$ 的球的球心为

$$\boldsymbol{\psi}^*_S(\omega)=(u^*_{Sl},v^*_{Sm},\tau^*_{Sn})^{\mathrm{T}}_{\|l\|,\|m\|,\|n\|\le J(\varepsilon,\omega)}\subset R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times R^{2J(\varepsilon,\omega)+1}\times C^{2J(\varepsilon,\omega)+1},$$

其中　$S=1,2,\cdots,n_{\varepsilon,\omega}(\Delta)$.

令

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)=\hat{\boldsymbol{\psi}}_{S,l,m,n}(\omega)=\begin{cases}\boldsymbol{\psi}^*_S(\omega), & \max\{\|l\|,\|m\|,\|n\|\}\le J(\varepsilon,\omega),\\ \mathbf{0}, & \max\{\|l\|,\|m\|,\|n\|\}>J(\varepsilon,\omega),\end{cases}$$

其中 $S=1,2,\cdots,n_{\varepsilon,\omega}(\Delta)$.对任意 $\boldsymbol{\psi}(\omega)=(\boldsymbol{\psi}_j(\omega))_{j\in Z^k}$, 存在 $S(1\le S\le n_{\varepsilon,\omega}(\Delta))$, 使得

$$\|\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega)-\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)\|_{E_\gamma}\le\sqrt{4k+\gamma}\ \|\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega)-\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)\|_E=\sqrt{4k+\gamma}\ \frac{\sqrt{3}\varepsilon}{3(4k+\gamma)}.$$

因此,对任意 $\boldsymbol{\psi}(\omega)\in\wp(\omega)\subset\kappa(\omega)$, 存在 $S(1\le S\le n_{\varepsilon,\omega}(\Delta))$, 使得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\psi}(\omega)-\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)\|_{E_\gamma}&=\|\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega)+\boldsymbol{\psi}^{(2)}(\omega)-\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)\|_{E_\gamma}\le\\ &\|\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\omega)-\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)\|_{E_\gamma}+\|\boldsymbol{\psi}^{(2)}(\omega)\|_{E_\gamma}\le\\ &\sqrt{4k+\gamma}\ \frac{\sqrt{3}\varepsilon}{3(4k+\gamma)}+\frac{3(4k+\gamma)-\sqrt{3(4k+\gamma)}}{3(4k+\gamma)}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以随机吸引子 $\wp(\omega)\subset E_\gamma$ 在范数 $\|\cdot\|_{E_\gamma}$ 下能被以 $\hat{\boldsymbol{\psi}}_S(\omega)(S=1,2,\cdots,n_{\varepsilon,\omega}(\omega))$ 为球心, ε 为半径的 $n_{\varepsilon,\omega}(\Delta)$ 个球所覆盖,由定义 1 可知式(7)成立,因而定理 1 获证.

3 结　　论

本文主要根据耗散的随机格点系统解的渐近行为理论,对具有白噪声扰动的随机 KGS 格点动力系统的随机吸引子的 Kolmogorov 熵进行研究,文中运用元素分解法与有限维空间中多面体球覆盖的拓扑性质,得到了该系统随机吸引子的 Kolmogorov 熵的一个上界估计.由于随机吸引子是无穷维的,因此对其几何结构的描述非常困难,若想进一步了解吸引子的运动性质,最好的方法就是讨论其 Kolmogorov 熵,它在混沌性质的度量中发挥着重要的作用.受文献[12]的启发,我们的后续工作将着手研究动态边界上随机 KGS 格点系统的随机吸引子的存在性及 Kolmogorov 熵或维数估计.

致谢　本文作者衷心感谢池州学院自然科学重点项目(CZ2020ZRZ07)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] ZHOU Xiaopeng, YIN Fuqi, ZHOU Shengfan. Uniform exponential attractors for second order non-autonomous lattice dynamical system[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*(*English Series*), 2017, **33**: 587-606.

[2] SU Haijuan, ZHOU Shengfan, WU Luyao. Random exponential attractor for second-order nonautonomous stochastic lattice systems with multiplicative white noise[J]. *Stochastics and Dynamics*, 2019, **19**(6): 1-28.

[3] DING Xiaoquan, JIANG Jifa. Random attractors for stochastic retarded lattice dynamical systems[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, **2012**(2/3): 1-9.

[4] 尹福其, 周盛凡, 殷苌茗, 等. KGS 格点系统的全局吸引子[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(5): 619-630.(YIN Fuqi, ZHOU Shengfan, YIN Changming, et al. Global attractor for Klein-Gordon-Schrödinger lattice system [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(5): 619-630.(in Chinese))

[5] ZHAO Caidi, ZHOU Shengfan. Compact kernel sections for nonautonomous Klein-Gordon-Schrödinger equations on infinite lattices [J]. *Mathematical Analysis and Application*, 2007, **332**(1): 32-56.

[6] HUANG Jingwu, ZHOU Shengfan. On fractal dimension of global attractor for some dissipative lattice system [J]. *Journal of Shanghai Normal University*(*Natural Sciences*), 2009, **38**(1): 9-14.

[7] ZHAO Caidi, ZHOU Shengfan. Sufficient conditions for the existence of global random attractors for stochastic lattice dynamical systems and applications [J]. *Mathematical Analysis and Application*, 2009, **354**(1): 78-95.

[8] YAN Weiping, JI Shuguan, LI Yong. Random attractors for stochastic discrete Klein-Gordon-Schrödinger equations[J]. *Physics Letters A*, 2009, **373**(14): 1268-1275.

[9] 路学强, 沈中伟, 周盛凡. 一类随机格点系统的随机吸引子[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2010, **39**(4): 331-338.(LU Xueqiang, SHEN Zhongwei, ZHOU Shengfan. Random attractors of a stochastic lattice systems [J]. *Journal of Shanghai Normal University*(*Natural Sciences*), 2010, **39**(4): 331-338.(in Chinese))

[10] CHUESHOV I. *Monotone Random Systems Theory and Applications*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[11] LORENTZ G, GOLISTSCHEK M, MAKOVOZ Y. *Constructive Approximation*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[12] 杨墨, 富娜. 动态边界上随机波动方程的吸引子[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(9): 1068-1080.(YANG Mo, FU Na. Attractors of stochastic wave equations with nonlinear damping and dynamic boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(9): 1068-1080.(in Chinese))