http://www.applmathmech.cn

非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶*

刘　娟,　龙宪军

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘要: 该文研究了非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶.首先,利用 Lagrange 函数介绍了非光滑多目标半无限规划混合型对偶的弱有效解和有效解的定义.其次,利用 Dini-伪凸性建立了非光滑多目标半无限规划混合型对偶的弱对偶定理、强对偶定理和逆对偶定理.该文所得结果推广了已有文献中的主要结果.

关　键　词: 多目标半无限规划;　Dini-伪凸;　混合型对偶

中图分类号: O221.2　　**文献标志码:** A　　DOI:10.21656/1000-0887.410342

Mixed Type Duality for Nonsmooth Multiobjective Semi-Infinite Programming Problems

LIU Juan,　LONG Xianjun

(*College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *P.R.China*)

Abstract: The mixed type duality for nonsmooth multiobjective semi-infinite programming problems was studied. Firstly, by the Lagrange function, the definitions of weakly efficient solutions and efficient solutions to the mixed type duality were introduced. Secondly, by means of the Dini-pseudoconvexity, the weak duality theorems, the strong duality theorems and the converse duality theorems were obtained. The results generalize the main results in previous literatures.

Key words: multiobjective semi-infinite programming; Dini-pseudoconvexity; mixed type duality

引　　言

半无限规划问题是指决策变量有限而约束函数个数无限的优化问题.半无限规划于 1924 年被提出,在 20 世纪 80 年代逐渐发展为优化理论的一个独立分支.近年来,半无限规划问题逐渐成为了数学规划中的热点研究课题,这主要是由于它在 Chebyshev 逼近、数学物理、信息技术、工程设计、最优控制、经济均衡、计算机网络系统以及机器人的运行轨道设计等领域有着广泛而直接的应用.到目前为止,国内外的许多学者对线

* **收稿日期:** 2020-11-11;**修订日期:** 2021-05-05

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11471059);重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2018jcyjAX0119;cstc2020jcyj-msxmX0053);重庆市教育委员会科学技术研究重点项目(KJZD-K201900801);重庆市巴渝学者特聘教授专项资助

作者简介: 刘娟(1996—),女,硕士生(E-mail:1016661324@qq.com);
龙宪军(1980—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail:xianjunlong@ctbu.edu.cn).

引用格式: 刘娟, 龙宪军. 非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(6): 595-601.

性和非线性半无限规划问题的理论、算法及应用进行了大量的研究,取得了一系列重要的研究成果(见文献[1-7]).

对偶理论是最优化理论和应用中一个重要的研究方向,它不仅具有重要的理论价值,而且在经济金融、算法设计以及最优控制等领域有着广泛的应用.常见的对偶模型主要有 Wolfe 型对偶和 Mond-Weir 型对偶.Gulati 和 Islam[8] 在广义 F- 凸性下讨论了多目标规划问题的 Wolfe 型对偶和 Mond-Weir 型对偶.Ahmad[9] 利用广义 (F,ρ)- 凸性给出了多目标规划 Mond-Weir 型对偶问题的弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理.最近,Tung[10] 利用 Dini-伪凸性获得了多目标半无限规划 Wolfe 型对偶问题的弱对偶定理和强对偶定理,以及 Mond-Weir 型对偶问题的弱对偶定理和强对偶定理.另一方面,混合型对偶包含 Wolfe 型和 Mond-Weir 型对偶两种特殊情况.Son 和 Kim[11] 利用 Clarke 次微分研究了非凸多目标半无限规划问题的混合型对偶,并给出了一个鞍点定理.

本文受文献[10-11]的启发,研究了如下非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶:

$$\text{(P)}\quad R^m_+ - \min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})),$$
$$\text{s.t.}\quad g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \qquad t \in T,\ \boldsymbol{x} \in R^n,$$

其中 $f_i:R^n \to \mathbf{R}, i \in I := \{1,2,\cdots,m\}, g_t:R^n \to \mathbf{R}, t \in T$, T 为任意指标集(不一定有限), R^n 为 n 维欧式空间, R^m_+ 为 m 维欧式空间中的非负锥.

本文主要研究带切向次微分的非光滑半无限规划问题的混合型对偶.利用 Dini-伪凸函数,获得了混合型对偶问题的弱对偶、强对偶和逆对偶定理.本文所得结果是对文献[10]中主要结果的推广和拓展.

1 预备知识

本文将使用以下符号和定义:

$\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in -\operatorname{int} R^m_+$, $\boldsymbol{u} \not< \boldsymbol{v}$ 表示对 $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ 的否定; $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in -R^m_+ \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{u} \not\leq \boldsymbol{v}$ 表示对 $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$ 的否定.

设 $S \subseteq R^n$, 记由 S 生成的包含原点的锥和凸锥分别为 $\operatorname{cone} S$ 和 $\operatorname{pos} S$; 记问题(P)的可行集为 Ω, 即 $\Omega := \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, t \in T\}$; 记 $R^{|T|} := \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_t)_{t\in T} \mid \lambda_t = 0$, 除有限个 $\lambda_t \neq 0\}$, 记 $R^{|T|}$ 的非负锥为 $R^{|T|}_+$, 即 $R^{|T|}_+ := \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_t)_{t\in T} \in R^{|T|} \mid \lambda_t \geqslant 0, t \in T\}$.

设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, 记在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的所有积极约束的指数集为 $T(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即 $T(\bar{\boldsymbol{x}}) := \{t \in T \mid g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0\}$; 记在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的积极约束乘子的集合为 $\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即 $\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}}) := \{\boldsymbol{\lambda} \in R^{|T|}_+ \mid \lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0, \forall t \in T\}$. 设 $S \subseteq R^n$, 记 S 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的弱可行方向锥为 $F(S,\bar{\boldsymbol{x}})$, 即 $F(S,\bar{\boldsymbol{x}}) := \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid \exists \tau_k \to 0, \forall k \in N, \bar{\boldsymbol{x}} + \tau_k \boldsymbol{x} \in S\}$. 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{d} \in R^n$, 记 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}$ 的方向导数为 $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})$, 即 $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) := \lim_{t\to 0}(f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{d}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}))/t$.

定义 1[12] 称函数 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ 处是切凸的,如果对任意的 $\boldsymbol{d} \in R^n$, $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})$ 存在且有限,并且函数 $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})$ 关于 $\boldsymbol{d}$ 是凸函数.

定义 2[12] 设函数 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ 处是切凸的,称 $\partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}}) \subseteq R^n$ 为 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的切向次微分,其中

$$\partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{x}^* \in R^n \mid \langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{d}\rangle \leqslant f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}), \forall \boldsymbol{d} \in R^n\}.$$

易得 $f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) = \max_{\boldsymbol{x}^* \in \partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}})} \langle \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{d}\rangle$.

注 1[12] 如果函数 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 和函数 $g:R^n \to \mathbf{R}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ 处都是切凸的,则

$$\partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \partial^T g(\bar{\boldsymbol{x}}) = \partial^T (f+g)(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

定义 3[10] 设 $S \subseteq R^n$ 为非空凸集, $f:R^n \to \mathbf{R}, \bar{\boldsymbol{x}} \in S$, 假设 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是切凸的.

(i) 称 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-凸的,如果对任意的 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$, 有 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\rangle, \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}})$;

(ii) 称 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 Dini-凸的,如果对任意的 $\boldsymbol{x} \in S\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$, 有 $f(\boldsymbol{x}) > f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\rangle, \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}})$;

(iii) 称 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-伪凸的,如果对任意的 $\boldsymbol{x} \in S$, $f(\boldsymbol{x}) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$, 有 $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\rangle < 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}})$;

(iv) 称 f 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 Dini-伪凸的,如果对任意的 $\boldsymbol{x} \in S\setminus\{\bar{\boldsymbol{x}}\}$, $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$, 有 $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\rangle < 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^T f(\bar{\boldsymbol{x}})$.

下面的例子说明函数满足 Dini-伪凸性,但不一定是局部 Lipschitz 的.

例 1　设$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$S=[0,1]$且

$$f(x):=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0.\end{cases}$$

取$\bar{x}=1$,则$f'(\bar{x};d)=0$且关于$d\in\mathbf{R}$是凸函数,故f在$\bar{x}$处是 Dini-伪凸的.很容易看到,f在$\bar{x}$处是连续的以及局部 Lipschitz 连续的.

例 2　设$f:R^2\to\mathbf{R}$,$S=\{(x_1,x_2)\in R^2\mid x_1^2\geqslant x_2\}$且

$$f(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}\dfrac{x_1^3}{x_2}-x_1, & \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0},\\ 0, & x_1=0\quad\text{or}\quad x_2=0.\end{cases}$$

取$\bar{\boldsymbol{x}}=(0,0)$,则$f'(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})=0$且关于$\boldsymbol{d}\in R^2$是凸函数,故$f$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处是 Dini-伪凸的.但是$f$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处既不是连续的也不是局部 Lipschitz 连续的.

定义 4[13]　设$\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$,记$U(\bar{\boldsymbol{x}})$为$\bar{\boldsymbol{x}}$的邻域族.

(i) 称$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的局部有效解,如果存在$U\in U(\bar{\boldsymbol{x}})$,使得对任意的$\boldsymbol{x}\in\Omega\cap U$,有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\notin -R_+^m\setminus\{\mathbf{0}\}$;

(ii) 称$\bar{\boldsymbol{x}}$是问题(P)的局部弱有效解,如果存在$U\in U(\bar{\boldsymbol{x}})$,使得对任意的$\boldsymbol{x}\in\Omega\cap U$,有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\notin -\operatorname{int}R_+^m$.

记问题(P)的局部有效解和局部弱有效解分别为 LE(P)和 LWE(P).显然 LE(P)$\subset$LWE(P).特别地,当$U=R^n$时,问题(P)的局部有效解和局部弱有效解就变成问题(P)的有效解和弱有效解,记问题(P)的有效解和弱有效解分别为 E(P)和 WE(P).

引理 1[14]　设$\bar{\boldsymbol{x}}\in$ LWE(P).如果$f_i,i\in I$和$g_t,t\in T$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处是切凸的,则$(\cup_{i=1}^m\partial^T f_i(\bar{\boldsymbol{x}}))^s\cap F(\Omega,\bar{\boldsymbol{x}})=\varnothing$.

为了建立强对偶定理,我们需要如下约束规格条件:

$$(\text{FCQ})\qquad\left(\bigcup_{t\in T(\bar{x})}\partial^T g_t(\boldsymbol{x})\right)^-\subseteq\operatorname{cl}F(\Omega,\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

引理 2[10]　设$\bar{\boldsymbol{x}}\in$ LWE(P).假设条件(FCQ)在$\bar{\boldsymbol{x}}$处成立,$f_i,i\in I$和g_t, $t\in T$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处是切凸的,并且集合

$$H:=\operatorname{co}\left(\bigcup_{i=1}^m\partial^T f_i(\bar{\boldsymbol{x}})\right)+\operatorname{pos}\left(\bigcup_{t\in T(\bar{\boldsymbol{x}})}\partial^T g_t(\bar{\boldsymbol{x}})\right)$$

是闭的,则存在$\boldsymbol{\alpha}\in R_+^m$满足$\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$,且$\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$使得

$$\mathbf{0}\in\sum_{i=1}^m\alpha_i\partial^T f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T}\lambda_t\partial^T g_t(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

2　混合型对偶

本节给出多目标半无限规划问题(P)的混合型对偶,并建立混合型弱对偶、强对偶和逆对偶定理.为了得到主要结果,假设$f_i,i\in I$和$g_t,t\in T$在$\bar{\boldsymbol{x}}$处都是切凸的.对于$\boldsymbol{u}\in R^n$,$\boldsymbol{v}\in R_+^{|T|}$,$\boldsymbol{\alpha}\in R_+^m$且$\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$,定义 Lagrange 函数为

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v}):=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})+\left(\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})\right)\boldsymbol{e},$$

其中$\boldsymbol{e}:=(1,\cdots,1)\in R^m$.考虑如下混合型对偶问题:

$$(\text{D})\quad R_+^m-\max\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})+\left(\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})\right)\boldsymbol{e},$$

$$\text{s.t.}\quad\mathbf{0}\in\sum_{i=1}^m\alpha_i\partial^T f_i(\boldsymbol{u})+\sum_{j\in T}v_j\partial^T g_j(\boldsymbol{u})+\sum_{k\in T}\mu_k\partial^T g_k(\boldsymbol{u}),$$

$$\sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u})\geqslant 0,$$
$$\boldsymbol{u}\in R^n,\ \boldsymbol{\alpha}\in R_+^m,\ \boldsymbol{v}\in R_+^{|T|},\ \boldsymbol{\mu}\in R_+^{|T|}.$$

记 Ω' 为问题(D)的可行集,即

$$\Omega':=\Big\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in R^n\times R_+^m\times R_+^{|T|}\times R_+^{|T|}\ \Big|\ \sum_{i=1}^m\alpha_i=1,$$
$$\boldsymbol{0}\in\sum_{i=1}^m\alpha_i\partial^T f_i(\boldsymbol{u})+\sum_{j\in T}v_j\partial^T g_j(\boldsymbol{u})+\sum_{k\in T}\mu_k\partial^T g_k(\boldsymbol{u}),\sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u})\geqslant 0\Big\}.$$

定义 5 设 $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\Omega'$.

(i) 称 $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$ 是问题(D)的弱有效解,如果对任意的 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega'$, 有 $\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})\notin-\operatorname{int}R_+^m$;

(ii) 称 $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})$ 是问题(D)的有效解,如果对任意的 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega'$, 有 $\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})\notin-R_+^m\setminus\{\boldsymbol{0}\}$.

记问题(D)的有效解和弱有效解分别为 E(D)和 WE(D).显然,E(D)⊂WE(D).

定理 1(弱对偶定理) 设 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 和 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega'$.

(i) 如果 $\sum_{i=1}^m\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_j g_j+\sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-伪凸的,则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\nprec\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$;

(ii) 如果 $\sum_{i=1}^m\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_j g_j+\sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是严格 Dini-伪凸的,则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\npreceq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$.

证明 设 $\boldsymbol{x}\in\Omega$, 则对任意的 $t\in T$, 有

$$g_t(\boldsymbol{x})\leqslant 0.\tag{1}$$

设 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega'$, 则存在 $\boldsymbol{x}_i^*\in\partial^T f_i(\boldsymbol{u}),i\in I,\boldsymbol{y}_j^*\in\partial^T g_j(\boldsymbol{u}),j\in T$ 和 $\boldsymbol{y}_k^*\in\partial^T g_k(\boldsymbol{u}),k\in T$ 使得

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i\boldsymbol{x}_i^*+\sum_{j\in T}v_j\boldsymbol{y}_j^*+\sum_{k\in T}\mu_k\boldsymbol{y}_k^*=\boldsymbol{0},\tag{2}$$

$$\sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u})\geqslant 0.\tag{3}$$

(i) 用反证法.假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$, 则由 $\boldsymbol{\alpha}\in R_+^m$ 可得 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})\rangle<0$, 即

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{u}))-\sum_{i=1}^m\alpha_i\Big(\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})\Big)<0.$$

由于 $\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$, 则

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{u}))-\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})<0.$$

将上式结合式(1)和(3)可得

$$\sum_{i=1}^m\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})+\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{x})+\sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{x})<\sum_{i=1}^m\alpha_i f_i(\boldsymbol{u})+\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})+\sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u}).$$

由于 $\sum_{i=1}^m\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_j g_j+\sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-伪凸的,故

$$\Big\langle\sum_{i=1}^m\alpha_i\boldsymbol{x}_i^*+\sum_{j\in T}v_j\boldsymbol{y}_j^*+\sum_{k\in T}\mu_k\boldsymbol{y}_k^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\Big\rangle<0.$$

这与式(2)矛盾,故结论成立.

(ii) 用反证法.假设

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})+\Big(\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})\Big)\boldsymbol{e}.\tag{4}$$

下证 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{u}$.若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$,则有 $-\Big(\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u})\Big)\boldsymbol{e}\in-R_+^m\setminus\{\boldsymbol{0}\}$.由 $\boldsymbol{v}\in R_+^{|T|}$ 可知存在 $j\in T$ 使得 $g_j(\boldsymbol{u})>0$, 又由式(1) 可得 $g_j(\boldsymbol{u})=g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0$,这就导致了矛盾.所以,$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{u}$.由于 $\boldsymbol{\alpha}\in R_+^m$, 由式(4)可得 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})\rangle\leqslant 0$.又因为 $\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{u}))-\sum_{j\in T}v_jg_j(\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{u}))-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\sum_{j\in T}v_jg_j(\boldsymbol{u})\right)\leqslant 0.$$

将上式结合式(1)和(3)可得

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})+\sum_{j\in T}v_jg_j(\boldsymbol{x})+\sum_{k\in T}\mu_kg_k(\boldsymbol{x})\leqslant\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{u})+\sum_{j\in T}v_jg_j(\boldsymbol{u})+\sum_{k\in T}\mu_kg_k(\boldsymbol{u}).$$

根据 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_jg_j+\sum_{k\in T}\mu_kg_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处的严格 Dini-伪凸性，结合 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{u}$ 和式(2)得到

$$0=\left\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^*+\sum_{j\in T}v_j\boldsymbol{y}_j^*+\sum_{k\in T}\mu_k\boldsymbol{y}_k^*,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\right\rangle<0.$$

从而导致矛盾，故结论成立．证毕．□

若 $f_i, i\in I$ 和 $g_t, t\in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-凸的，则 $f_i, i\in I$ 和 $g_t, t\in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-伪凸的．因此，我们有如下推论．

推论 1　设 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 和 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega'$．

(i) 如果 $f_i, i\in I$ 和 $g_t, t\in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-凸的，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\nprec\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$；

(ii) 如果 $f_i, i\in I$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是严格 Dini-凸的，$g_t, t\in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-凸的，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\not\preceq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$．

定理 2(强对偶定理)　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{LWE(P)}$，假设条件(FCQ)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处成立，H 为闭集．则存在 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}\in R_+^m$ 满足 $\sum_{i=1}^{m}\bar{\alpha}_i=1$，且 $\bar{\boldsymbol{v}}+\bar{\boldsymbol{\mu}}\in\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$，使得 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\Omega'$ 以及 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}})$．此外，

(i) 如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_jg_j+\sum_{k\in T}\mu_kg_k$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-伪凸的，则 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\mathrm{WE(D)}$；

(ii) 如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_jg_j+\sum_{k\in T}\mu_kg_k$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 Dini-伪凸的，则 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\mathrm{E(D)}$．

证明　根据引理 2，存在 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}\in R_+^m$ 满足 $\sum_{i=1}^{m}\bar{\alpha}_i=1$，且 $\bar{\boldsymbol{v}}+\bar{\boldsymbol{\mu}}\in\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$\boldsymbol{0}\in\sum_{i=1}^{m}\bar{\alpha}_i\partial^T f_i(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{j\in T}\bar{v}_j\partial^T g_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{k\in T}\bar{\mu}_k\partial^T g_k(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

由 $\bar{\boldsymbol{v}}+\bar{\boldsymbol{\mu}}\in\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\Omega$，可得 $0=\sum_{j\in T}\bar{v}_jg_j(\bar{\boldsymbol{x}})=\sum_{k\in T}\bar{\mu}_kg_k(\bar{\boldsymbol{x}})$．因此

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})+\left(\sum_{j\in T}\bar{v}_jg_j(\bar{\boldsymbol{x}})\right)\boldsymbol{e}=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}}),$$

即 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\Omega'$ 且 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}})$．

(i) 如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_jg_j+\sum_{k\in T}\mu_kg_k$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-伪凸的，根据定理 1(i)可得

$$\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\nprec\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v}),\qquad\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega',$$

由弱有效解的定义可得 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\mathrm{WE(D)}$；

(ii) 如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i+\sum_{j\in T}v_jg_j+\sum_{k\in T}\mu_kg_k$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 Dini-伪凸的，由定理 1(ii)可得

$$\boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}})=\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\not\preceq\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v}),\qquad\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\Omega',$$

由有效解的定义知 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\mathrm{E(D)}$．

证毕．□

如果 $f_i, i\in I$ 和 $g_t, t\in T$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-凸的，可得到如下推论．

推论 2　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{LWE(P)}$，假设条件(FCQ)在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处成立，H 为闭集．

(i) 如果 $f_i, i\in I$ 和 $g_t, t\in T$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-凸的，则 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\mathrm{WE(D)}$；

(ii) 如果 $f_i, i\in I$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 Dini-凸的，$g_t, t\in T$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 Dini-凸的，则 $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{\alpha}},\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{\mu}})\in\mathrm{E(D)}$．

注 2　若 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0}$，则混合型对偶问题(D)即为文献[10]中的 Wolfe 型对偶问题，故定理 1 退化为文献[10]中的命题 5.2，推论 1 退化为文献[10]中的命题 5.1，推论 2 退化为文献[10]中的命题 5.3；若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，则混合型对偶问题(D)即为文献[10]中的 Mond-Weir 型对偶问题，推论 1 退化为文献[10]中的命题 5.4，推论 2 退化为文献[10]中的命题 5.6．因此，定理 1、推论 1 和推论 2 推广了文献[10]中的主要结果．

注 3　值得注意的是，文献[10]中并没有研究逆对偶定理，本文的定理 3 讨论了多目标半无限规划混合型对偶的逆对偶

问题.

定理 3(逆对偶定理) 设 $\boldsymbol{u} \in \Omega$,$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}) \in \Omega'$,$\boldsymbol{v} \in \Lambda(\boldsymbol{u})$.

(i) 如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i + \sum_{j\in T}v_j g_j + \sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处 Dini-伪凸,则 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{WE}(\mathrm{P})$;

(ii) 如果 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i + \sum_{j\in T}v_j g_j + \sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处严格 Dini-伪凸,则 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{E}(\mathrm{P})$.

证明 由于 $\boldsymbol{u} \in \Omega$,$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}) \in \Omega'$,$\boldsymbol{v} \in \Lambda(\boldsymbol{u})$,则 $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda(\boldsymbol{u})$ 且

$$\sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u}) = \sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u}) = 0. \tag{5}$$

又因为 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}) \in \Omega'$, 故存在 $\boldsymbol{x}_i^* \in \partial^T f_i(\boldsymbol{u})$,$i \in I$,$\boldsymbol{y}_j^* \in \partial^T g_j(\boldsymbol{u})$, $j \in T$ 和 $\boldsymbol{y}_k^* \in \partial^T g_k(\boldsymbol{u})$,$k \in T$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^* + \sum_{j\in T}v_j\boldsymbol{y}_j^* + \sum_{k\in T}\mu_k\boldsymbol{y}_k^* = \boldsymbol{0}. \tag{6}$$

(i) 用反证法.假设 $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{WE}(\mathrm{P})$, 对任意的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \in -\operatorname{int}R_+^m$.由于 $\boldsymbol{\alpha} \in R_+^m$, 则 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\rangle < 0$.又因为 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{u})) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega$$

等价于

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{x}) < \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{u}).$$

再将上式结合式(5)可得

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{x}) < \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{u}) + \sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u}) + \sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u}).$$

由于 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i + \sum_{j\in T}v_j g_j + \sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-伪凸的,故

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^* + \sum_{j\in T}v_j\boldsymbol{y}_j^* + \sum_{k\in T}\mu_k\boldsymbol{y}_k^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} \right\rangle < 0,$$

这与式(6)矛盾.

(ii) 用反证法.假设 $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{E}(\mathrm{P})$,则对任意的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$,有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \in -R_+^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$,即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \leq \boldsymbol{0}$.显然 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{u}$, 否则 $\boldsymbol{0} \in -R_+^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 矛盾.由于 $\boldsymbol{\alpha} \in R_+^m$, 则 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\rangle \leqslant 0$.又因为 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{u})) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

结合式(5)可得

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{x}) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\boldsymbol{u}) + \sum_{j\in T}v_j g_j(\boldsymbol{u}) + \sum_{k\in T}\mu_k g_k(\boldsymbol{u}).$$

根据 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i + \sum_{j\in T}v_j g_j + \sum_{k\in T}\mu_k g_k$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处的严格 Dini-伪凸性,结合 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{u}$ 和式(6)得到

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^* + \sum_{j\in T}v_j\boldsymbol{y}_j^* + \sum_{k\in T}\mu_k\boldsymbol{y}_k^*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} \right\rangle < 0,$$

从而导致矛盾.证毕. □

如果 f_i,$i \in I$ 和 g_t,$t \in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-凸的,可得如下推论.

推论 3 令 $\boldsymbol{u} \in \Omega$,$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}) \in \Omega'$,$\boldsymbol{v} \in \Lambda(\boldsymbol{u})$.

(i) 如果 f_i,$i \in I$ 和 g_t,$t \in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-凸的,则 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{WE}(\mathrm{P})$;

(ii) 如果 f_i,$i \in I$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是严格 Dini-凸的, g_t,$t \in T$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处是 Dini-凸的,则 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{E}(\mathrm{P})$.

3 结　　论

本文主要研究了非光滑多目标半无限规划问题(P)的混合型对偶模型(D),利用 Dini-伪凸函数证明了

该问题的弱对偶定理、强对偶定理以及逆对偶定理.本文所得结果不仅推广了文献[10]中的一些主要结果，而且还获得了关于逆对偶的新结果.近年来，鲁棒优化受到许多学者的关注，如文献[15-16].如何利用广义凸性研究鲁棒多目标半无限规划问题的最优性条件和混合型对偶，这将是我们下一步要进行的研究.

致谢　本文作者衷心感谢重庆工商大学科研团队项目(ZDPTTD201908)以及重庆工商大学研究生“创新型科研项目”(yjscxx2020-094-31)对本文的资助.

参考文献(References)：

[1] GOBERNA M A, LÓPEZ M A. *Linear Semi-Infinite Optimization*[M]. Chichester: Wiley, 1998.

[2] LONG X J, PENG Z Y, WANG X F. Stable Farkas lemmas and duality for nonconvex composite semi-infinite programming problems[J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2019, **15**(2): 295-315.

[3] LONG X J, LIU J, HUANG N J. Characterizing the solution set for nonconvex semi-infinite programs involving tangential subdifferentials[J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2021, **42**(3): 279-297.

[4] KIM D S, SON T Q. Characterizations of solutions sets of a class of nonconvex semi-infinite programming problems[J]. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2011, **12**(3): 429-440.

[5] PENG Z Y, WANG X F, YANG X M. Connectedness of approximate efficient solutions for generalized semi-infinite vector optimization problems[J]. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2019, **27**(1): 103-118.

[6] PENG Z Y, PENG J W, LONG X J, et al. On the stability of solutions for semi-infinite vector optimization problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2018, **70**(1): 55-69.

[7] 杨玉红, 李飞. 非光滑半无限多目标优化问题的最优性充分条件[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 526-538.(YANG Yuhong, LI Fei. Sufficient optimality conditions for nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 526-538.(in Chinese))

[8] GULATI T R, ISLAM M A. Sufficiency and duality in multiobjective programming involving generalized *F*-convex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1994, **183**(1): 181-195.

[9] AHMAD I. Sufficiency and duality in multiobjective programming with generalized (F,ρ)-convexity[J]. *Journal of Applied Analysis*, 2005, **11**(1): 19-33.

[10] TUNG L T. Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for convex semi-infinite programming with multiple interval-valued objective functions[J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2020, **62**(1): 67-91.

[11] SON T Q, KIM D S. ε-mixed type duality for nonconvex multiobjective programs with an infinite number of constraints[J]. *Journal of Global Optimization*, 2013, **57**(2): 447-465.

[12] MARTINEZ-LEGAZ J E. Optimality conditions for pseudo-convex minimization over convex sets defined by tangentially convex constraints[J]. *Optimization Letter*, 2015, **9**(5): 1017-1023.

[13] LUC D T. *Theory of Vector Optimization*[M]. Berlin: Springer, 1989: 37-61.

[14] TUNG L T. Strong Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferential[J]. *RAIRO-Operations Research*, 2018, **52**(4/5): 1019-1041.

[15] 赵丹, 孙祥凯. 非凸多目标优化模型的一类鲁棒逼近最优性条件[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 694-700.(ZHAO Dan, SUN Xiangkai. Some robust approximate optimality conditions for nonconvex multi-objective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 694-700.(in Chinese))

[16] FAKHAR M, MOHAMMAD M R, ZAFARANI J. On nonsmooth robust multiobjective optimization under generalized convexity with applications to portfolio optimization[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, **265**(1): 39-48.