

G -Brown 运动驱动的非线性 随机时滞微分方程的稳定化*

李光洁¹, 杨启贵²

(1. 广东外语外贸大学 数学与统计学院, 广州 510006;
2. 华南理工大学 数学学院, 广州 510640)

摘要: 研究了一类 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的稳定化问题. 首先, 在一个不稳定的 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的漂移项中设计了时滞反馈控制, 得其相应的控制系统. 其次, 利用 Lyapunov 函数方法给出其相应的控制系统是渐近稳定的充分条件. 最后, 通过例子说明了所得的结果.

关键词: 非线性随机时滞微分方程; 时滞反馈控制; G -Brown 运动; 渐近稳定性
中图分类号: O211.63 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410332

Stabilization of Nonlinear Stochastic Delay Differential Equations Driven by G -Brownian Motion

LI Guangjie¹, YANG Qigui²

(1. *School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510006, P.R.China;*
2. *School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P.R.China*)

Abstract: The stabilization problem of a class of nonlinear stochastic delay differential equations driven by G -Brownian motion (G -SDDEs) was studied. Firstly, a delay feedback control was designed in the drift term of an unstable nonlinear G -SDDE, and the controlled system was therefore obtained. Then, with the Lyapunov technique, sufficient conditions for the asymptotical stability of the controlled system were given. Finally, two examples were presented to illustrate the obtained results.

Key words: nonlinear stochastic delay differential equation; delay feedback control; G -Brownian motion; asymptotical stability

引 言

随机微分方程常被用来刻画随机动力系统, 且已广泛地应用于科学工业中. 在随机微分方程的研究中,

* 收稿日期: 2020-10-27; 修订日期: 2021-02-03

基金项目: 国家自然科学基金(11901398; 12071151)

作者简介: 李光洁(1990—), 女, 博士(E-mail: scutliguangjie@163.com);

杨启贵(1965—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: qgyang@scut.edu.cn).

引用格式: 李光洁, 杨启贵. G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的稳定化[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(8): 841-851.

稳定性的研究引起了研究者的极大关注^[1-3].实际中,许多随机动力系统不仅仅依赖于当前状态还依赖于过去状态,面对这样的情形一般用随机时滞微分方程来刻画.关于随机时滞微分方程解的稳定性和稳定化的研究已取得一定的成果,参见文献[4-9]及其中的参考文献.

另一方面,很多实际问题如不确定性问题、风险度量问题以及金融中的超对冲超定价问题等都涉及非线性期望.文献[10-11]提出了一类非线性期望(即 G -期望)来处理这类问题.在 G -期望框架理论下,文献[10-11]进一步介绍了 G -Brown 运动以及相关的 Itô 积分.自此,关于 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的研究逐渐得到学者们的关注并成为热点. G -Brown 运动驱动的随机时滞微分方程的稳定性和稳定化方面的研究已取得了一定的成果^[12-15].文献[16]研究了 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的稳定化,考虑了基于离散观测状态的反馈控制,证明了控制系统的均方指数稳定性和渐近稳定性.最近,文献[17]利用非周期性间歇控制实现了 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的稳定化.虽然文献[16-17]研究了 G -Brown 运动驱动的随机微分方程的稳定化问题,但其考虑的方程系数满足的均是 Lipschitz 条件和线性增长条件,并没有考虑方程系数是非线性的情形.到目前为止,关于 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的稳定化的研究成果几乎没有.另一方面,对于一个不稳定的随机时滞微分方程,能否设计一个时滞反馈控制使其变得稳定是一个有趣的问题.目前已研究的反馈控制大部分是基于当前状态设计的,而基于过去状态设计的反馈控制的研究成果却相对较少.本文通过在 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的漂移项中设计基于过去状态的时滞反馈控制从而使不稳定的该类方程变得稳定.

本文的结构如下:第1节介绍了一些符号、假设条件和预备知识;第2节给出了主要结果,在不稳定的 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的漂移项中设计了时滞反馈控制,利用 Lyapunov 函数方法证明了相应的控制系统是渐近稳定的;第3节通过例子说明了所得的结果;第4节给出了本文的结论.

1 预备知识

令 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$.对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 表示 Euclid 范数.若 \mathbf{A} 是一个向量或矩阵,则 \mathbf{A}^T 代表其转置.对 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 或 $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ 表示 \mathbf{x}, \mathbf{y} 的内积.对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$ 和 $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

定义 1(G -正态分布) 在一个次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \hat{E})$ 中, \mathcal{A} 中的一个随机变量 X 满足

$$\hat{E}[X^2] = \bar{\sigma}^2, \quad -\hat{E}[-X^2] = \underline{\sigma}^2,$$

并且对每一个独立于 X 的随机变量 $\bar{X} \in \mathcal{A}(\bar{X} \stackrel{d}{=} X)$ 有

$$aX + b\bar{X} \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2} X, \quad \forall a, b \geq 0,$$

则称 X 是 G -正态分布的,记 $X \sim N(0, [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$.

定义 2(G -Brown 运动) 在次线性空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \hat{E})$ 上的随机过程 $(B(t))_{t \geq 0}$ 被称作是 G -Brown 运动,如果对每一个 $n \in \mathbf{N}$ 及 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \infty$, 有 $B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n) \in \mathcal{A}$ 满足

(i) $B(0) = 0$;

(ii) 对任意的 $t, s \geq 0$, $\omega_{t+s} - \omega_t$ 是 $N(0, [s\underline{\sigma}^2, s\bar{\sigma}^2])$ 分布的且与 $(B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n))$ 相互独立,其中 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$.

关于定义在次线性空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \hat{E})$ 上的 G -正态分布、 G -期望以及相关的 Itô 积分和二次变差过程的详细介绍,可参见文献[10-11].对 $\forall T \in \mathbf{R}^+, [0, T]$ 上的一个分割 $\pi_T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ 满足 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$, $\mu(\pi_T) = \max\{|t_{i+1} - t_i|\}, i = 0, 1, \dots, N-1$.给定 $p \geq 1$, 定义

$$M_G^{p,0}([0, T]) = \left\{ \eta_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j I_{[t_j, t_{j+1})}(t) \mid \xi_j \in L_G^p(\Omega_{t_j}) \right\}.$$

$M_G^p([0, T])$ 表示 $M_G^{p,0}([0, T])$ 在范数 $\|\eta\|_{M_G^{p,0}([0, T])} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \hat{E}[|\eta_t|^p] dt \right)^{1/p}$ 下的完备空间. \mathcal{M}_t 是由 G -Brown

运动 $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ 生成的滤子簇. 令 $B(t)$ 是一个 1 维的 G -Brown 运动, 且 $G(a) = \hat{E}[aB^2(1)]/2 = (\bar{\sigma}^2 a^+ - \underline{\sigma}^2 a^-)/2, a \in \mathbf{R}$, 其中 $\hat{E}[B^2(1)] = \bar{\sigma}^2, -\hat{E}[-B^2(1)] = \underline{\sigma}^2, 0 \leq \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$.

定义 3 对 $\forall \eta_t \in M_c^{1,0}(0, T), \langle B \rangle(t)$ 表示 G -Brown 运动 $B(t)$ 的二次变差过程, 定义

$$\int_0^T \eta_t d\langle B \rangle(t) := \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j (\langle B \rangle(t_{j+1}) - \langle B \rangle(t_j)),$$

其中

$$\langle B \rangle(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} (B(t_{j+1}^N) - B(t_j^N))^2 = B^2(t) - 2 \int_0^t B(s) dB(s).$$

命题 1 对任意的 $0 \leq t \leq T < \infty$, 有

$$(i) \hat{E} \left[\int_0^T \eta_t dB(t) \right] = 0, \hat{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB(t) \right)^2 \right] = \hat{E} \left[\int_0^T \eta_t^2 d\langle B \rangle(t) \right] \leq \bar{\sigma}^2 \int_0^T \hat{E}[\eta_t^2] ds, \forall \eta_t \in M_c^2(0, T);$$

$$(ii) \hat{E} \left[\int_0^T |\eta_t|^p dt \right] \leq \int_0^T \hat{E}[|\eta_t|^p] dt, \forall \eta_t \in M_c^p(0, T), p \geq 1.$$

令 $\tau > 0, BC([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 表示所有定义在 $[- \tau, 0]$ 上的 \mathbf{R}^n 值函数 η 的集合且其范数为 $\|\eta\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\eta(\theta)|$. 定义 $C_{\mathcal{A}_t}^p([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 是所有 \mathcal{A}_t 可测的 $C([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ 值的随机变量的集合, 且满足 $\sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \hat{E}|\varphi(\theta)|^p < \infty$.

考虑如下不稳定的 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程:

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau))dt + g(t, x(t), x(t - \tau))d\langle B \rangle(t) + \\ & h(t, x(t), x(t - \tau))dB(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中, 对 $\forall t \geq 0, B(t)$ 是一个 1 维的 G -Brown 运动, $\langle B \rangle(t)$ 是其二次变差过程, $f, g, h: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 Borel 可测的, 且 $f, g, h \in M_c^p([- \tau, T]) (\forall T > 0)$. 方程(1)的初始值为

$$x_0 = \eta = \{x(t) : -\tau \leq t \leq 0\} \in C_{\mathcal{A}_0}^p. \tag{2}$$

为了使方程(1)变得稳定, 本文在方程(1)的漂移项中设计反馈控制 $u(t, x(t - \delta))$, 这里在反馈控制到达系统的时间和状态观测的时间之间考虑了时滞 $\delta (\delta > 0)$. 现实中, 反馈控制依赖于过去状态 $x(t - \delta)$ 更具有实际意义 (见文献[9, 18]). 文中假设 $\delta \leq \tau$. 从而方程(1)对应的控制系统如下:

$$\begin{aligned} dx(t) &= [f(t, x(t), x(t - \tau)) + u(t, x(t - \delta))]dt + g(t, x(t), x(t - \tau))d\langle B \rangle(t) + \\ & h(t, x(t), x(t - \tau))dB(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

对 $\forall x, \bar{x}, y, \bar{y} \in \mathbf{R}^n$, 假设以下条件成立:

(A1) 假设对任意的 $n > 0$, 存在一个常数 $L_n > 0$ 满足对任意的 $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{aligned} |f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| \vee |g(t, x, y) - g(t, \bar{x}, \bar{y})| \vee |h(t, x, y) - h(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq \\ L_n (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \leq n$.

(A2) 假设存在正数 K 和 $q_i \geq 1 (i = 1, 2, 3)$, 使得 f, g, h 满足

$$\begin{cases} |f(t, x, y)| \leq K(1 + |x|^{q_1} + |y|^{q_1}), \\ |g(t, x, y)| \leq K(1 + |x|^{q_2} + |y|^{q_2}), \\ |h(t, x, y)| \leq K(1 + |x|^{q_3} + |y|^{q_3}). \end{cases} \tag{5}$$

当 $q_i = 1 (i = 1, 2, 3)$ 时, 式(5)是线性增长条件. 给定初始值(2), 在假设(A1)下方程(1)存在唯一的局部解.

令 $C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ 是所有定义在 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$ 上的非负函数 $V(t, x)$ 的集合, 且 $V(t, x)$ 关于自变量 t 和 x 分别是一阶连续可导的和二阶连续可导的. 定义算子 $LV: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} LV(t, x, y) &= V_t(t, x) + V_x(t, x)f(t, x, y) + \\ & G(\langle V_x(t, x), 2g(t, x, y) \rangle + \langle V_{xx}(t, x)h(t, x, y), h(t, x, y) \rangle), \end{aligned}$$

其中

$$V_t(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t}, V_x(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \right), V_{xx}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial^2 V(t, \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}.$$

为了防止方程(1)局部解的爆破,下面给出另一个假设.

(A3) 假设存在一对函数 $\bar{V} \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times R^n)$ 和 $H \in C([- \tau, \infty) \times R^n; \mathbf{R}_+)$, 以及正数 $q \geq 2(q_1 \vee q_2 \vee q_3)$ 和正数 c_0, c_1, c_2, c_3 使得对 $\forall (t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n \times R^n$ 和 $\mathbf{z} \in R^n$ 有

$$c_2 + c_3 < c_1, |\mathbf{x}|^q \leq \bar{V}(t, \mathbf{x}) \leq H(t, \mathbf{x}),$$

$$L\bar{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{V}_x(t, \mathbf{x})u(t, \mathbf{z}) \leq c_0 - c_1H(t, \mathbf{x}) + c_2H(t - \tau, \mathbf{y}) + c_3H(t - \delta, \mathbf{z})$$

成立.

根据文献[19]中的定理 5.2 类似可得如下引理.

引理 1 若假设(A1)~(A3)成立, 则对任意给定初始值(2)的方程(3), 存在唯一的全局解 $\mathbf{x}(t)$ ($t \geq -\tau$) 且满足

$$\sup_{-\tau \leq t \leq \infty} \hat{E}(|\mathbf{x}(t)|^q) < \infty. \quad (6)$$

2 主要结果

本节将利用 Lyapunov 函数方法讨论方程(3)的 H_x 稳定性和渐近稳定性. 对 $\forall t \geq 0$, 定义 $\mathbf{x}_t := \{\mathbf{x}(t+s) \mid -2\tau \leq s \leq 0\}$. 当 $0 \leq t < 2\tau$ 时, 为了很好地定义 \mathbf{x}_t , 令 $\mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\eta}(-\tau)$ ($-2\tau \leq s < -\tau$). 接下来定义 Lyapunov 函数:

$$V(t, \mathbf{x}_t) = U(t, \mathbf{x}(t)) + \theta \int_{-\delta}^t \int_{t+s}^t Q(v) dv ds, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

其中 θ 是一个待确定的正数, 且

$$Q(t) = \delta |f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + u(t, \mathbf{x}(t-\delta))|^2 + \bar{\sigma}^4 \delta |g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 + \bar{\sigma}^2 |h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2.$$

设

$$f(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}), u(s, \mathbf{z}) = u(0, \mathbf{z}), g(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}), h(s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \forall (s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [-2\tau, 0) \times R^n \times R^n.$$

对 $U(t, \mathbf{x}(t))$ 应用 Itô 公式得

$$dU(t, \mathbf{x}(t)) = \\ U_t(t, \mathbf{x}(t))dt + U_x(t, \mathbf{x}(t))[f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) + u(t, \mathbf{x}(t-\delta))]dt + \\ U_x(t, \mathbf{x}(t))g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))d\langle B \rangle(t) + U_x(t, \mathbf{x}(t))h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))dB(t) + \\ \frac{1}{2} U_{xx}(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{x}^2(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))d\langle B \rangle(t) = \\ U_t(t, \mathbf{x}(t))dt + U_x(t, \mathbf{x}(t))[f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + u(t, \mathbf{x}(t-\delta))]dt + \\ G(\langle U_x(t, \mathbf{x}(t)), 2g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle + \\ \langle U_{xx}(t, \mathbf{x}(t))h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)), h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle)dt + \\ \left[U_x(t, \mathbf{x}(t))g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \frac{1}{2} U_{xx}(t, \mathbf{x}(t))h^2(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \right]d\langle B \rangle(t) - \\ G(\langle U_x(t, \mathbf{x}(t)), 2g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle + \\ \langle U_{xx}(t, \mathbf{x}(t))h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)), h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle)dt + \\ U_{xx}(t, \mathbf{x}(t))h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))dB(t) = \\ U_t(t, \mathbf{x}(t))dt + U_x(t, \mathbf{x}(t))[f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + u(t, \mathbf{x}(t-\delta))]dt + \\ G(\langle U_x(t, \mathbf{x}(t)), 2g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle + \\ \langle U_{xx}(t, \mathbf{x}(t))h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)), h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle)dt + dM(t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

其中 $M(t)$ 是一个鞅,且 $M(0) = 0$ (见文献[11]). 因 $M(t)$ 具体的形式没有进一步的用处,这里予以省略.经计算得

$$dU(t, \mathbf{x}(t)) = (U_x(t, \mathbf{x}(t)) [u(t, \mathbf{x}(t - \delta)) - u(t, \mathbf{x}(t))] + LU(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)))dt + dM(t), \tag{9}$$

这里 $LU: \mathbf{R}_+ \times R^n \times R^n \rightarrow \mathbf{R}$ 定义如下:

$$LU(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_t(t, \mathbf{x}) + U_x(t, \mathbf{x}) [f(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + u(t, \mathbf{x})] + G(\langle U_x(t, \mathbf{x}), 2g(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle + \langle U_{xx}(t, \mathbf{x})h(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), h(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle). \tag{10}$$

为了研究方程(3)的 H_∞ 稳定性和渐近稳定性,进一步给出下面假设.

假设 1 对任意的 $(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n$, 假设存在函数 $U(t, \mathbf{x}) \in C^{2,1}(\mathbf{R}_+ \times R^n; \mathbf{R}_+)$, $W(\mathbf{x}) \in C(R^n; \mathbf{R}_+)$ 和正常数 α 和 $\rho_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 满足

$$LU(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho_1 |U_x(t, \mathbf{x})|^2 + \rho_2 |f(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 + \rho_3 |g(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 + \rho_4 |h(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq -\rho_5 |\mathbf{x}|^2 + \rho_6 |\mathbf{y}|^2 - W(\mathbf{x}) + \alpha W(\mathbf{y}), \quad \forall (t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n \times R^n, \tag{11}$$

其中 $\alpha < 1, \rho_6 < \rho_5$.

假设 2 假设存在一个常数 $\beta > 0$ 使得

$$|u(t, \mathbf{x}) - u(t, \mathbf{y})| \leq \beta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \forall (t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n \times R^n \tag{12}$$

成立,且假设 $u(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 由此假设可得

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq \beta |\mathbf{x}|, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n. \tag{13}$$

定理 1 假定条件(A1)、(A2)和假设 1、2 成立.若 δ 满足

$$\delta \leq \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{2\rho_1\rho_2}{3}} \wedge \frac{2}{\beta\bar{\sigma}^2} \sqrt{\frac{\rho_1\rho_3}{3}} \wedge \frac{4\rho_1\rho_4}{3\beta^2\bar{\sigma}^2} \wedge \frac{1}{\beta^2} \sqrt{\frac{2\rho_1(\rho_5 - \rho_6)}{3}}, \tag{14}$$

则对任意给定的初始值(2),方程(3)的解有如下性质:

$$\int_0^\infty \hat{E}[|\mathbf{x}(t)|^2 + W(\mathbf{x}(t))]dt < \infty. \tag{15}$$

若存在正常数 c 和 $\tilde{p} > 2$ 使得 $c|\mathbf{x}|^{\tilde{p}} \leq W(\mathbf{x}), \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n$, 则方程(3)是 H_∞ 稳定的.即

$$\int_0^\infty \hat{E}|\mathbf{x}(s)|^p ds < \infty, \quad p \in [2, \tilde{p}]. \tag{16}$$

证明 给定任意的初始值(2).设 $m_0 > 0$ 是一个充分大的整数且满足 $\|\mathbf{x}_0\| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\eta(s)| < m_0$. 对于每一个整数 $m > m_0$, 定义停时 $\tau_k = \inf\{t \geq 0 \mid |\mathbf{x}(t)| \geq m\}$. 通常约定 $\inf \emptyset = \infty$, 这里 \emptyset 表示空集. τ_k 关于 k 是单调递增的且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$ q.s. 对式(7)中定义的 $V(t, \mathbf{x}_t)$ 应用 Itô 公式得

$$dV(t, \mathbf{x}_t) = LV(t, \mathbf{x}_t) + dM(t), \quad t \geq 0, \tag{17}$$

其中

$$LV(t, \mathbf{x}_t) = LU(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + U_x(t, \mathbf{x}(t)) [u(t, \mathbf{x}(t - \delta)) - u(t, \mathbf{x}(t))] + \theta\delta^2 |f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) + u(t, \mathbf{x}(t - \delta))|^2 + \theta\bar{\sigma}^4\delta^2 |g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau))|^2 + \theta\delta\bar{\sigma}^2 |h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau))|^2 - \theta \int_{t-\delta}^t Q(r)dr. \tag{18}$$

利用假设 1 得

$$U_x(t, \mathbf{x}(t)) [u(t, \mathbf{x}(t - \delta)) - u(t, \mathbf{x}(t))] \leq \rho_1 |U_x(t, \mathbf{x}(t))|^2 + \frac{1}{4\rho_1} |u(t, \mathbf{x}(t - \delta)) - u(t, \mathbf{x}(t))|^2 \leq \rho_1 |U_x(t, \mathbf{x}(t))|^2 + \frac{\beta^2}{4\rho_1} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \delta)|^2. \tag{19}$$

进一步计算得

$$\begin{aligned}
LV(t, \mathbf{x}_t) \leq & LU(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \rho_1 |U_x(t, \mathbf{x}(t))|^2 + \frac{\beta^2}{4\rho_1} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-\delta)|^2 \\
& + 2\theta\delta^2 |f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 + 2\theta\delta^2 |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t-\delta))|^2 + \\
& \theta\delta^2 \bar{\sigma}^4 |g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 + \theta\delta \bar{\sigma}^2 |h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 - \theta \int_{t-\delta}^t Q(r) dr. \quad (20)
\end{aligned}$$

取 $\theta = 3\beta^2/(4\rho_1)$. 由式(14)得 $2\theta\delta^2 \leq \rho_2$, $\theta\delta^2 \bar{\sigma}^4 \leq \rho_3$ 和 $\theta\delta \bar{\sigma}^2 \leq \rho_4$, 结合式(13)有

$$\begin{aligned}
LV(t, \mathbf{x}_t) \leq & LU(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \rho_1 |U_x(t, \mathbf{x}(t))|^2 + \frac{\beta^2}{4\rho_1} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-\delta)|^2 \\
& + \rho_2 |f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 + \rho_3 |g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 + \\
& \rho_4 |h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))|^2 + 2\theta\delta^2 \beta^2 |\mathbf{x}(t-\delta)|^2 - \theta \int_{t-\delta}^t Q(r) dr \leq \\
& -\rho_5 |\mathbf{x}(t)|^2 + \rho_6 |\mathbf{x}(t-\tau)|^2 - W(\mathbf{x}(t)) + \alpha W(\mathbf{x}(t-\tau)) + \\
& \frac{\beta^2}{4\rho_1} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t-\delta)|^2 + 2\theta\delta^2 \beta^2 |\mathbf{x}(t-\delta)|^2 - \theta \int_{t-\delta}^t Q(r) dr. \quad (21)
\end{aligned}$$

对式(21)两边同时取期望得

$$\hat{E}V(t \wedge \tau_k, \mathbf{x}_{t \wedge \tau_k}) \leq V(0, \mathbf{x}_0) + v_1 + v_2 + v_3 - v_4, \quad (22)$$

其中

$$v_1 = \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} [-\rho_5 |\mathbf{x}(r)|^2 + \rho_6 |\mathbf{x}(r-\tau)|^2 + 2\theta\delta^2 \beta^2 |\mathbf{x}(r-\delta)|^2] dr,$$

$$v_2 = \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} [-W(\mathbf{x}(r)) + \alpha W(\mathbf{x}(r-\tau))] dr,$$

$$v_3 = \frac{\beta^2}{4\rho_1} \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(r) - \mathbf{x}(r-\delta)|^2 dr,$$

$$v_4 = \theta \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr.$$

注意

$$\begin{cases}
\int_0^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(s-\tau)|^2 ds \leq \int_{-\tau}^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(r)|^2 dr, \\
\int_0^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(s-\delta)|^2 ds \leq \int_{-\delta}^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(r)|^2 dr \leq \int_{-\tau}^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(r)|^2 dr, \\
\int_0^{t \wedge \tau_k} W(\mathbf{x}(s-\tau)) ds \leq \int_{-\tau}^{t \wedge \tau_k} W(\mathbf{x}(r)) dr, \\
v_1 \leq (\rho_6 + 2\theta\delta^2 \beta^2) \int_{-\tau}^0 |\mathbf{x}(r)|^2 dr - (\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2 \beta^2) \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(r)|^2 dr, \\
v_2 \leq \alpha \int_{-\tau}^0 W(\mathbf{x}(r)) dr - (1-\alpha) \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} W(\mathbf{x}(r)) dr.
\end{cases} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22)得

$$\begin{aligned}
\hat{E}V(t, \mathbf{x}_{t \wedge \tau_k}) \leq & \tilde{C} - (\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2 \beta^2) \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} |\mathbf{x}(r)|^2 dr - \\
& (1-\alpha) \hat{E} \int_0^{t \wedge \tau_k} W(\mathbf{x}(r)) dr + v_3 - v_4, \quad (24)
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{C} = V(0, \mathbf{x}_0) + (\rho_6 + 2\theta\delta^2 \beta^2) \int_{-\tau}^0 |\mathbf{x}(r)|^2 dr + \alpha \int_{-\tau}^0 W(\mathbf{x}(r)) dr.$$

在式(24)中令 $k \rightarrow \infty$ 得

$$\hat{E}V(t, \mathbf{x}_t) \leq \tilde{C} - (\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2\beta^2)\hat{E}\int_0^t |\mathbf{x}(r)|^2 dr - (1 - \alpha)\hat{E}\int_0^t W(\mathbf{x}(r)) dr + \bar{v}_3 - \bar{v}_4, \quad (25)$$

其中

$$\bar{v}_3 = \frac{\beta^2}{4\rho_1}\hat{E}\int_0^t |\mathbf{x}(r) - \mathbf{x}(r - \delta)|^2 dr, \quad \bar{v}_4 = \theta\hat{E}\int_0^t \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr.$$

当 $t \in [0, \delta]$ 时,有

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 &\leq \frac{\beta^2}{4\rho_1}\int_0^t \hat{E} |\mathbf{x}(r) - \mathbf{x}(r - \delta)|^2 dr \leq \\ &2\frac{\beta^2}{4\rho_1}\int_0^\delta (\hat{E} |\mathbf{x}(r)|^2 + \hat{E} |\mathbf{x}(r - \delta)|^2) dr \leq \\ &\frac{\beta^2}{\rho_1}\delta(\sup_{-\delta \leq r \leq \delta} \hat{E} |\mathbf{x}(r)|^2). \end{aligned}$$

当 $t > \delta$ 时,有

$$\bar{v}_3 \leq \frac{\beta^2\delta}{\rho_1}(\sup_{-\delta \leq r \leq \delta} \hat{E} |\mathbf{x}(r)|^2) + \frac{\beta^2}{4\rho_1}\hat{E}\int_\delta^t |\mathbf{x}(r) - \mathbf{x}(r - \delta)|^2 dr.$$

由方程(3)和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \hat{E}\int_\delta^t |\mathbf{x}(r) - \mathbf{x}(r - \delta)|^2 dr &\leq \\ 3\hat{E}\int_\delta^t \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr &\leq 3\hat{E}\int_0^t \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr. \end{aligned}$$

进而有

$$\bar{v}_3 \leq \frac{\beta^2\delta}{\rho_1}(\sup_{-\delta \leq r \leq \delta} \hat{E} |\mathbf{x}(r)|^2) + \frac{3\beta^2}{4\rho_1}\hat{E}\int_0^t \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr. \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)得

$$\begin{aligned} \hat{E}V(t, \mathbf{x}_t) &\leq \tilde{C} + \frac{\delta\beta^2}{\rho_1}(\sup_{-\delta \leq r \leq \delta} \hat{E} |\mathbf{x}(r)|^2) - (\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2\beta^2)\hat{E}\int_0^t |\mathbf{x}(r)|^2 dr - \\ &(1 - \alpha)\hat{E}\int_0^t W(\mathbf{x}(r)) dr + \frac{3\beta^2}{4\rho_1}\hat{E}\int_0^t \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr - \\ &\theta\hat{E}\int_0^t \int_{r-\delta}^r Q(v) dv dr. \end{aligned} \quad (27)$$

因 $\delta < (1/\beta^2)\sqrt{2\rho_1(\rho_5 - \rho_6)}/3$, 所以 $\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2\beta^2 > 0$. 从而由式(27)得

$$\begin{aligned} \min\{\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2\beta^2, 1 - \alpha\} \int_0^t \hat{E}[|\mathbf{x}(r)|^2 + W(\mathbf{x}(r))] dr &\leq \\ (\rho_5 - \rho_6 - 2\theta\delta^2\beta^2)\hat{E}\int_0^t |\mathbf{x}(r)|^2 dr + (1 - \alpha)\hat{E}\int_0^t W(\mathbf{x}(r)) dr &\leq \\ \tilde{C} + \frac{\delta\beta^2}{\rho_1}(\sup_{-\delta \leq r \leq \delta} \hat{E} |\mathbf{x}(r)|^2), \end{aligned} \quad (28)$$

这蕴含了式(15)成立. 因 $c|\mathbf{x}|^{\tilde{p}} \leq W(\mathbf{x})$, 应用不等式 $|v|^b \leq |v|^a + |v|^c (\forall 0 < a \leq b \leq c)$, 对任意的 $p \in [2, \tilde{p}]$ 可推出

$$\begin{aligned} \min\{1, c\} \int_0^\infty \hat{E} |\mathbf{x}(t)|^p dt &\leq \min\{1, c\} \int_0^\infty \hat{E}[|\mathbf{x}(t)|^2 + |\mathbf{x}(t)|^{\tilde{p}}] dt \leq \\ \int_0^\infty \hat{E}[|\mathbf{x}(t)|^2 + c|\mathbf{x}(t)|^{\tilde{p}}] dt &\leq \int_0^\infty \hat{E}[|\mathbf{x}(t)|^2 + W(\mathbf{x}(t))] dt < \infty, \end{aligned}$$

由此可得式(16)成立. 证毕.

定理 2 假设定理 1 的条件都成立. 若 $p \geq 2$ 且 $q \geq (p + q_1 - 1) \vee (p + q_2 - 1) \vee (p + 2q_3 - 2)$, 则

对任意给定的初始值(2),方程(3)的解满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{E} | \mathbf{x}(t) |^p = 0. \quad (29)$$

即方程(7)是渐近稳定的.

证明 对 $| \mathbf{x}(t) |^p$ 应用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} d | \mathbf{x}(t) |^p = & p | \mathbf{x}(t) |^{p-2} \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t-\delta))] dt + \\ & p | \mathbf{x}(t) |^{p-2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) d \langle B \rangle (t) + \\ & p | \mathbf{x}(t) |^{p-2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) dB(t) + \\ & \frac{p}{2} | \mathbf{x}(t) |^{p-2} | \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) |^2 d \langle B \rangle (t) + \\ & \frac{p(p-2)}{2} | \mathbf{x}(t) |^{p-4} | \mathbf{x}(t) \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) |^2 d \langle B \rangle (t) = \\ & p | \mathbf{x}(t) |^{p-2} \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t-\delta))] dt + p | \mathbf{x}(t) |^{p-2} + \\ & G(\langle \mathbf{x}(t), 2\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle) dt + \\ & p(p-1) | \mathbf{x}(t) |^{p-4} G(\langle \mathbf{x}^2 \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)), \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle) dt + dM(t), \quad (30) \end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 也是鞅,且 $M(0) = 0$.因 $M(t)$ 没有进一步的用处,这里也省略其具体形式.对任意的 $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$,对式(30)两边同时取期望得

$$\begin{aligned} \hat{E} | \mathbf{x}(t_2) |^p - \hat{E} | \mathbf{x}(t_1) |^p \leq & p \hat{E} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) |^{p-2} \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t-\delta))] dt + \\ & p \hat{E} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) |^{p-2} G(\langle \mathbf{x}(t), 2\mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle) dt + \\ & p(p-1) \hat{E} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) |^{p-4} G(\langle \mathbf{x}^2 \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)), \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau)) \rangle) dt. \quad (31) \end{aligned}$$

进一步计算得

$$\begin{aligned} \hat{E} | \mathbf{x}(t_2) |^p - \hat{E} | \mathbf{x}(t_1) |^p \leq & p \hat{E} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) |^{p-1} [K(1 + | \mathbf{x}(t) |^{q_1} + | \mathbf{x}(t-\tau) |^{q_1}) + \beta | \mathbf{x}(t-\delta) |] dt + \\ & p \bar{\sigma}^2 \hat{E} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) |^{p-1} [K(1 + | \mathbf{x}(t) |^{q_2} + | \mathbf{x}(t-\tau) |^{q_2})] dt + \\ & \frac{3p(p-1)}{2} \bar{\sigma}^2 \hat{E} \int_{t_1}^{t_2} | \mathbf{x}(t) |^{p-2} [K^2(1 + | \mathbf{x}(t) |^{2q_3} + | \mathbf{x}(t-\tau) |^{2q_3})] dt. \end{aligned}$$

利用引理1得

$$\hat{E} | \mathbf{x}(t_2) |^p - \hat{E} | \mathbf{x}(t_1) |^p \leq \bar{C}(t_2 - t_1), \quad (32)$$

其中 \bar{C} 是与 t_1 和 t_2 无关的常数.即当 $t \in \mathbf{R}_+$, $\hat{E} | \mathbf{x}(t) |^p$ 关于 t 是一致连续的.结合定理1中的式(16)得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{E} | \mathbf{x}(t) |^p = 0.$$

证毕.

3 例子

例1 考虑如下形式的非线性 G -Brown 运动驱动的随机时滞微分方程:

$$dx(t) = (-2x^3(t) + x(t-2))dt + \frac{1}{2} x^3(t) d \langle B \rangle (t) + \frac{1}{2} x^2(t-2) dB(t), \quad t \geq 0, \quad (33)$$

初始值为 $x(t) = 1 + \cos t, t \in [-2, 0]$.其中, $B(t)$ 是一个1维的 G -Brown 运动且 $B(t) \sim N(0, [1/2, 1])$.

利用 Euler 方法模拟方程(33)的样本路径如图 1 所示.由图 1 可知方程(33)是不稳定的.

接下来令控制函数 $u(t, x) = -2x$, 则 $\beta = 2$. 方程(33)相应的控制系统如下:

$$dx(t) = (-2x^3(t) + x(t-2) - 2x(t-\delta))dt + \frac{1}{2}x^3(t)d\langle B \rangle(t) + \frac{1}{2}x^2(t-2)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{34}$$

由方程的表达式易知方程的系数满足假设(A1)且 $q_1 = q_2 = 3, q_3 = 2$. 取 $\bar{V}(t, x) = x^6$. 经计算

$$L\bar{V}(t, x, y) + \bar{V}_x(t, x)u(t, z) = 6x^5(-2x^3 + y) + G(\langle 6x^5, 2 \cdot x^3/2 \rangle + \langle 30x^4 \cdot y^2/2, y^2/2 \rangle) - 6x^5 \cdot 2z.$$

利用 Young 不等式可推出

$$L\bar{V}(t, x, y) + \bar{V}_x(t, x)u(t, z) \leq -\frac{81}{8}x^8 + 3x^8 + 15x^6 + \frac{15}{8}y^8 + y^6 + 2z^6 \leq c_0 - 5(x^8 + x^6) + \frac{15}{8}(y^8 + y^6) + 2(z^8 + z^6),$$

其中 $c_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} \{- (17/8)x^8 + 20x^6\}$. 因此, $c_1 = 5, c_2 = 15/8, c_3 = 2, H(t, x) = x^6 + x^8$. 显然, $c_2 + c_3 < c_1$. 从而方程满足假设(A1)~(A3). 接下来取 $U(t, x) = x^2 + x^4, \rho_1 = 1/4, \rho_2 = 1/8, \rho_3 = 1/4$ 和 $\rho_4 = 1$. 经计算可得

$$LU(t, x) + \rho_1 |U_x(t, x)|^2 + \rho_2 |f(t, x, y)|^2 + \rho_3 |g(t, x, y)|^2 + \rho_4 |h(t, x, y)|^2 \leq -2x^2 + 1.25y^2 - \frac{73}{16}(x^4 + x^6) + \frac{3}{2}(y^4 + y^6).$$

由此可得 $\rho_5 = 2, \rho_6 = 1.25, W(x) = (73/16)(x^4 + x^6)$ 和 $\alpha = 24/73$. 取 $p = 4, q = 6$. 因 $q_1 = q_2 = 3, q_3 = 2$, 显然方程(34)也满足定理 2 的条件, 从而由定理 2 得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{E} |x(t)|^4 = 0$. 取反馈控制时滞 $\delta = 0.05$, 用 Euler 方法模拟方程(34)的样本路径如图 2 所示. 由图 2 可知方程(34)是稳定的.

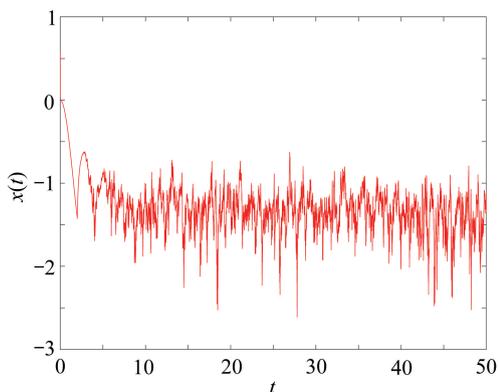


图 1 方程(33)的样本路径

Fig. 1 The sample path of the solution for eq. (33)

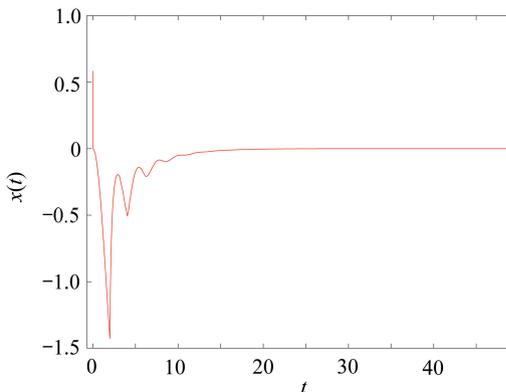


图 2 方程(34)的样本路径

Fig. 2 The sample path of the solution for eq. (34)

例 2 一个随机时滞的 logistic 模型:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) [r - ax(t) + bx(t-\tau)],$$

其中, $x(t)$ 表示 t 时刻该物种的数量, r 表示自然出生率, a 表示种内之间的自抑制率, b 表示繁殖率, τ 表示时滞. 利用文献[20]的思想, 当自然出生率 r 受到随机扰动后模型变为随机时滞 logistic 模型, 本文考虑 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞 logistic 模型, 形式如下:

$$dx(t) = x(t) [r - ax(t) + bx(t-\tau)]dt + \sigma x(t)d\langle B \rangle(t) + \sigma x(t)dB(t), \quad t \geq 0, \tag{35}$$

设 $B(t)$ 仍是一个 1 维的 G -Brown 运动且 $B(t) \sim N(0, [1/2, 1])$. 因 $x(t)$ 表示 t 时刻该物种的数量, 故当 $t \geq 0$ 时 $x(t) > 0$. 令控制函数 $u(t, x) = -2x$, 则 β 仍是 2. 方程(35)相应的控制系统如下:

$$dx(t) = (rx(t) - ax^2(t) + bx(t)x(t-\tau) - 2x(t-\delta))dt +$$

$$\sigma x(t) d\langle B \rangle(t) + \sigma x(t) dB(t), \quad t \geq 0. \quad (36)$$

由此方程(36)的系数满足假设(A1)且 $q_1 = 2, q_2 = q_3 = 1$. 取 $\bar{V}(t, x) = x^4, r = 0.6, a = 0.4, b = 0.2, \sigma = 0.8$. 计算得

$$\begin{aligned} L\bar{V}(t, x, y) + \bar{V}_x(t, x)u(t, z) &\leq 21.44x^4 - 0.96x^5 + 15x^6 + 0.16y^5 + 0.25z^4 \leq \\ &c_0 - 0.8(x^8 + x^6) + 0.16(y^5 + y^4) + 0.25(z^5 + z^4), \end{aligned}$$

其中 $c_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}_+} \{-0.16x^5 + 22.24x^4\}$. 因此, $c_1 = 0.8, c_2 = 0.16, c_3 = 0.25$ 和 $H(t, x) = x^5 + x^4$. 显然, $c_2 + c_3 < c_1$. 这里 $x > 0$, 故 $H(t, x)$ 非负. 从而方程满足假设(A1)~(A3). 取 $U(t, x) = x^2 + x^3$. 这里 $x > 0$, 故 $U(t, x)$ 非负. 令 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0.01$. 进一步计算得

$$\begin{aligned} LU(t, x) + \rho_1 |U_x(t, x)|^2 + \rho_2 |f(t, x, y)|^2 + \rho_3 |g(t, x, y)|^2 + \rho_4 |h(t, x, y)|^2 \leq \\ -0.4x^2 - 0.48(x^4 + x^3) + 0.3(y^4 + y^3). \end{aligned}$$

由此可得 $\rho_5 = 0.4, \rho_6 = 0, W(x) = 0.48(x^4 + x^6)$ 和 $\alpha = 5/8$. 取 $p = 2, q = 4$. 因 $q_1 = 2, q_2 = q_3 = 1$, 显然方程(36)也满足定理2的条件, 从而由定理2得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{E} |x(t)|^2 = 0$. 取反馈控制时滞 $\delta = 0.01$, 图3是方程(36)的样本路径, 由图可知方程(36)是稳定的.

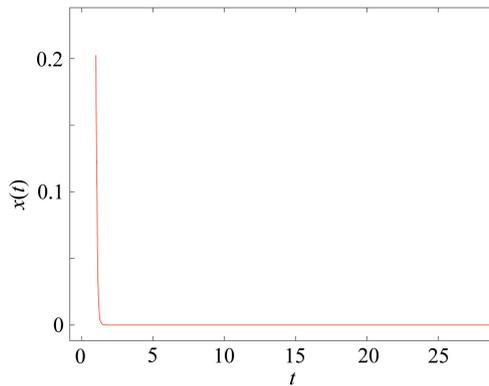


图3 方程(36)的样本路径

Fig. 3 The sample path of the solution for eq. (36)

4 结 论

本文探讨了一类不稳定的 G -Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的稳定化问题. 当 G -Brown 运动驱动的随机时滞微分方程的系数满足非线性增长条件时, 到目前为止几乎没有看到这方面的稳定化研究成果. 当该类不稳定的方程系数满足多项式增长条件时, 本文通过在漂移项设计时滞反馈控制, 运用 Lyapunov 技巧得到了该类方程对应的控制系统是渐近稳定的充分条件, 从而研究了该类方程的稳定化问题, 丰富了 G -Brown 运动驱动的随机时滞微分方程稳定化方面的成果.

参考文献 (References):

- [1] MAO X. *Stochastic Differential Equations and Application*[M]. Chichester: Horwood Publication, 1997.
- [2] HUANG Z, YANG Q, CAO J. Stochastic stability and bifurcation analysis on Hopfield neural networks with noise[J]. *Expert Systems With Applications*, 2011, **38**(8): 10437-10445.
- [3] ZENG C, CHEN Y, YANG Q. Almost sure and moment stability properties of fractional order Black-Scholes model[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2013, **16**(2): 317-331.
- [4] LIU L. New criteria on exponential stability for stochastic delay differential systems based on vector Lyapunov function[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, **47**(11): 2985-2993.
- [5] GUO Q, MAO X, YUE R. Almost sure exponential stability of stochastic differential delay equations[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2016, **54**(4): 1919-1933.

- [6] CHEN W, XU S, ZHANG B, et al. Stability and stabilisation of neutral stochastic delay Markovian jump systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, **10**(15): 1798-1807.
- [7] XU L, DAI Z, HU H. Almost sure and moment asymptotic boundedness of stochastic delay differential systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, **361**(15): 157-168.
- [8] 马丽, 马瑞楠. 一类随机泛函微分方程带随机步长的 EM 逼近的渐近稳定[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(1): 97-107. (MA Li, MA Ruinan. Almost sure asymptotic stability of the Euler-Maruyama method with random variable stepsizes for stochastic functional differential equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 97-107. (in Chinese))
- [9] SHEN M, FEI C, FEI W, et al. Stabilisation by delay feedback control for highly nonlinear neutral stochastic differential equations[J]. *Systems & Control Letters*, 2020, **137**: 104645.
- [10] PENG S. G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type[M]//*Stochastic Analysis and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007: 541-567.
- [11] PENG S. *Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus Under Uncertainty*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2019.
- [12] LI G, YANG Q. Convergence and asymptotical stability of numerical solutions for neutral stochastic delay differential equations driven by G -Brownian motion[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2018, **37**(4): 4301-4320.
- [13] DENG S, FEI C, FEI W, et al. Stability equivalence between the stochastic differential delay equations driven by G -Brownian motion and the Euler-Maruyama method[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2019, **96**: 138-146.
- [14] YIN W, CAO J, REN Y. Quasi-sure exponential stability and stabilisation of stochastic delay differential equations under G -expectation framework[J]. *International Journal of Control*, 2020, **474**(1): 276-289.
- [15] ZHU Q, HUANG T. Stability analysis for a class of stochastic delay nonlinear systems driven by G -Brownian motion[J]. *Systems & Control Letters*, 2020, **140**: 104699.
- [16] REN Y, YIN W, SAKTHIVEL R. Stabilization of stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with feedback control based on discrete-time state observation[J]. *Automatica*, 2018, **95**: 146-151.
- [17] YANG H, REN Y, LU W. Stabilisation of stochastic differential equations driven by G -Brownian motion via aperiodically intermittent control[J]. *International Journal of Control*, 2020, **93**(3): 565-574.
- [18] LI X, MAO X. Stabilisation of highly nonlinear hybrid stochastic differential delay equations by delay feedback control[J]. *Automatica*, 2020, **112**: 108657.
- [19] FEI C, FEI W, YAN L. Existence and stability of solutions to highly nonlinear stochastic differential delay equations driven by G -Brownian motion[J]. *Applied Mathematics; a Journal of Chinese Universities*, 2019, **34**(2): 184-204.
- [20] LU C, DING X. Permanence and extinction of a stochastic delay logistic model with jumps[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**(2): 1-8.