

基于观测器的非严格反馈时滞非线性系统的神经网络自适应控制*

刘祥¹, 童东兵¹, 陈巧玉²

- (1. 上海工程技术大学 电子电气工程学院, 上海 201620;
2. 上海工程技术大学 数理与统计学院, 上海 201620)

摘要: 针对一类非严格反馈的时滞非线性系统, 研究了一类基于观测器的自适应神经网络控制问题. 针对系统中存在未知状态变量的问题, 设计了一个状态观测器. 利用反步法和径向基神经网络的逼近特性, 提出了一种自适应神经网络输出反馈控制方法. 所设计的控制器保证了闭环系统中所有信号的全全局一致有界性. 最后, 通过仿真验证了所提控制方法的有效性.

关键词: 神经网络; 观测器; 非严格反馈; 自适应控制

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410325

Observer-Based Adaptive Neural Network Control for Nonstrict-Feedback Nonlinear Systems With Time Delays

LIU Xiang¹, TONG Dongbing¹, CHEN Qiaoyu²

- (1. *School of Electronic and Electrical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P.R.China;*
2. *School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P.R.China*)

Abstract: An observer-based adaptive neural network control problem was investigated for a class of nonstrict-feedback nonlinear systems with time delays. A state observer was constructed to estimate unknown variables in nonlinear systems. With the approximation ability of RBF NNs and the backstepping technique, an adaptive neural network output feedback control approach was proposed. The designed controller ensures the semi-global uniform boundedness of all signals in the closed-loop system. Finally, the simulation example shows the effectiveness of the proposed control approach.

Key words: neural network; observer; nonstrict feedback; adaptive control

* 收稿日期: 2020-10-23; 修订日期: 2020-12-04

基金项目: 国家自然科学基金(61673257); 中国博士后科学基金(2019M661322); 上海市自然科学基金(20ZR1422400)

作者简介: 刘祥(1996—), 男, 硕士生(E-mail: lxhycb1109@163.com);
童东兵(1979—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: tongdb@sues.edu.cn).

引用格式: 刘祥, 童东兵, 陈巧玉. 基于观测器的非严格反馈时滞非线性系统的神经网络自适应控制[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(6): 586-594.

引 言

在最近的数十年中,非线性系统的自适应控制已经受到了广泛的关注.针对系统中的非线性函数,自适应控制要求其必须满足匹配条件^[1]或参数线性化^[2].为了解决上述约束条件, Kanellakopoulos 等^[3]提出了反步(backstepping)法.与滑模控制法、极点配置法等方法相比,反步法应用了目标系统精确的数学模型,不需要对非线性系统的数学模型做线性化处理,提高了模型的精确度.反步法的基本思想就是将复杂的非线性系统分解为多个子系统,引入虚拟控制器的概念,对每个子系统分别设计虚拟控制器.He 等^[4]针对带有不确定和全状态约束的非线性系统,通过反步法,设计了一种新颖的自适应神经网络控制器.Li 等^[5]研究了一类带有输入饱和的非线性系统的自适应控制问题,通过建立模糊观测器和一个估计模型,设计了一种自适应模糊控制器.通过反步法,人们也解决了许多实际工程应用中非线性系统的控制问题,如悬挂系统^[6]、飞行器控制系统^[7].

近年来,人们已经找到了许多方法去逼近非线性函数,如模糊逻辑^[8]、神经网络^[9]、多项式^[10]等.在自适应控制器设计过程中,由于径向基神经网络具有结构简单、学习能力强的特点,径向基神经网络经常用来逼近未知的非线性函数.Niu 等^[11]针对一类随机互联的非线性系统,通过径向基神经网络的逼近能力和动态表面控制技术,设计了一个神经网络自适应控制器,解决了系统中存在未知状态问题.本文通过径向基神经网络的逼近特性,解决了非严格反馈结构所带来的困难.

反馈结构一般分为严格反馈、纯反馈和非严格反馈三种形式.非严格反馈系统的结构比严格反馈(或纯反馈)系统的结构更为普通.在严格反馈的形式下,系统中非线性函数 $f_i(\cdot)$ 包含部分状态变量 $\bar{\mathbf{x}}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$,虚拟控制变量 α_i 也应该包含部分状态变量.然而,与严格反馈不同的是,严格反馈形式下的非线性函数 $f_i(\cdot)$ 包含了全部的状态变量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$,虚拟控制变量 α_i 也应该包含全部状态变量.这就使得实际控制输入设计更加困难.

本文的主要贡献如下:1) 构造了一个观测器来处理系统中未知的状态变量.2) 利用 Lyapunov 稳定理论,径向基神经网络和反步控制技术,设计了一种自适应神经网络控制器,保证了闭环系统中所有信号的半全局一致有界性.3) 采用径向基神经网络权向量的范数作为自适应参数,这大大减少了神经网络径向基函数的运算量.

1 问题描述

1.1 系统模型及假设

考虑如下的非严格反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + f_i(\mathbf{x}(t)) + q_i(\mathbf{x}(t - \tau_i)), & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n(t) = u(t) + f_n(\mathbf{x}(t)) + q_n(\mathbf{x}(t - \tau_n)), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ 是系统的状态变量, $y(t) \in R$ 是系统输出变量, 并且输出变量 $y(t) = x_1(t)$ 是直接可测得的. $u(t)$ 是系统的输入, $f_i(\cdot)$ 和 $q_i(\cdot)$ ($1 \leq i \leq n$) 是未知的光滑函数且满足 $f_i(0) = 0$ 和 $q_i(0) = 0$.

定义 1^[12] 如果对于任意的初始状态 $x_0 = x(t_0) \in \Omega$, 且紧集 $\Omega \subset R^n$. 存在一个常数 $\kappa > 0$ 和一个时间常数 $T = T(\kappa, x_0)$, 当 $t \in [t_0 + T, +\infty)$ 时, 有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \kappa$, 则称系统(1)是半全局一致有界的.

针对非线性系统(1), 给出如下假设和引理.

假设 1^[13] 非线性函数 $f_i(\cdot)$ 和 $q_i(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件, 即 $|f_i(\varrho_1) - f_i(\varrho_2)| \leq h_i \|\varrho_1 - \varrho_2\|$ 和 $|q_i(\varrho_1) - q_i(\varrho_2)| \leq d_i \|\varrho_1 - \varrho_2\|$, 其中 $h_i > 0$ 和 $d_i > 0$, $|\cdot|$ 是函数的绝对值, $\|\cdot\|$ 是向量的 1-范数.

注 1 在假设 1 中, 当 $\varrho_2 = 0$ 时, 可以得到 $|f_i(\varrho_1)| \leq h_i \|\varrho_1\|$ 和 $|q_i(\varrho_1)| \leq d_i \|\varrho_1\|$. 这意味着当 $s \in R_+$ 时, 存在非负函数 $\vartheta_i(s) = h_i s$ 和 $\nu_i(s) = d_i s$, 使得 $f_i(\cdot)$ 和 $q_i(\cdot)$ 是有界的.

引理 1^[14] (Young 不等式) 对于任意的实变量 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 满足 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq (\omega^m/m) \|\mathbf{x}\|^m + (1/(n\omega^n)) \|\mathbf{y}\|$, 其

中 $\omega > 0, m > 1, n > 1$, 且 $(m-1)(n-1) = 1$.

1.2 径向基神经网络

径向基神经网络^[15]可以被描述为

$$f_{nn}(X) = \Theta^T \phi(X), \quad (2)$$

其中, $X \in \Omega_0 \subset R^n$, $\Theta = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T \in R^q$ 为权向量, q 是节点数, $\phi(X) = [\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_q(X)]^T$ 为 Gauss 基函数满足如下形式:

$$\phi_i(X) = \exp\left(-\frac{\|X - \rho_i\|^2}{\beta_i^2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (3)$$

$\rho_i = [\rho_{i1}, \rho_{i2}, \dots, \rho_{in}]^T$ 和 β_i 分别为中心向量和 Gauss 函数宽度.

神经网络函数 f_{nn} 可以在一个紧集上以任意精度逼近任意连续函数 $f(x)$, 且满足如下不等式:

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - \Theta^T \phi(x)| \leq \eta, \quad (4)$$

其中, η 为优化参数误差. $\eta \leq \eta^*$, η^* 为一个常数.

根据神经网络逼近原理, 连续的函数 $f(X)$ 可以逼近为

$$f(X) = \Theta^* \phi(X) + \eta(X), \quad (5)$$

其中, $\Theta^* = \arg \min_{\hat{w} \in R^s} \{ \sup_{z \in \Omega_X} |f(X) - \hat{\Theta}^T \phi(X)| \}$, $\hat{\Theta}$ 是 Θ^* 的估计值.

注 2 在一般的控制器设计过程中, $\Theta^* \in R^s$ 包含了 s 个未知常数, 这些常数在系统运行过程中都需要估计, 必然会使计算负荷增加. 为解决这个问题, 本文中只估计了理想的参数 w_i^* , 从而得到神经网络理想权向量的范数, 降低了神经网络的运算量.

1.3 观测器设计

状态观测器构造如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{x}_{i+1}(t) - l_i(y - \hat{x}_1), & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = u(t) - l_n(y - \hat{x}_1), \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\hat{x}_i (1 \leq i \leq n)$ 是状态变量 x_i 的估计值, 选取设计的参数 l_i 使得多项式 $p(s) = s^n + l_1 s^{n-1} + \dots + l_{n-1} s + l_n$ 满足 Hurwitz 条件.

定义状态估计误差:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (7)$$

满足

$$\dot{e}(t) = A \hat{x}(t) + K y(t) + F(x(t)) + Q(x(t - \tau)), \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} e(t) &= [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^T, \quad K = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T, \\ F(x(t)) &= [f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t))]^T, \\ Q(x(t - \tau)) &= [q_1(x(t - \tau_1)), q_2(x(t - \tau_2)), \dots, q_n(x(t - \tau_n))]^T, \\ A &= \begin{bmatrix} -k_1 & & & I_{n-1} \\ -k_2 & & & \\ \vdots & & & \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

选取向量 K 使矩阵 A 为正定的 Hurwitz 矩阵, 即对于给定的正定对称矩阵 Π , 存在正定对称矩阵 P 使得如下等式成立:

$$A^T P + P A = -\Pi. \quad (9)$$

2 控制器设计和稳定性分析

定义下列坐标变换:

$$z_i = \hat{x}_i - \alpha_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

其中, $\alpha_0 = 0, \alpha_i$ 表示第 i 个子系统的虚拟控制器.

设计虚拟控制器 α_i 为

$$\alpha_i = - \left(k_i + \frac{1}{2} \right) z_i - \frac{1}{2a_i^2} z_i w_i \phi_i^T(\mathbf{W}_i) \phi_i(\mathbf{W}_i), \quad (11)$$

其中, $k_i > 0$ 和 $a_i > 0, \mathbf{W}_i = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, w_1, w_2, \dots, w_n]^T, w_i$ 满足式(12)并且是未知常数 $w_i^* = \|\theta_i\|$ 的估计值, $\|\theta_i\|$ 为第 i 个神经网络的理想权向量的范数.

设计自适应律 \dot{w}_i 为

$$\dot{w}_i = \frac{r_i}{2a_i^2} z_i^2 \phi_i^T \phi_i - \sigma_i w_i, \quad (12)$$

其中 $r_i > 0, \sigma_i > 0$.

设计实际控制输入信号 u 为

$$u = - \left(k_n + \frac{1}{2} \right) z_n + \frac{1}{2a_n^2} z_n w_n \phi_n^T \phi_n, \quad (13)$$

其中 $k_n > 0, a_n > 0$.

引理 2^[16] 对于坐标变换 $z_i = \hat{x}_i - \alpha_{i-1} (1 \leq i \leq n)$, 可以得到

$$\|\hat{\mathbf{x}}\| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| \vartheta_i(w_i), \quad (14)$$

其中 $\vartheta_i = 2(1 + k_i + 0.5) + \frac{1}{a_i^2} w_i \phi_i^T \phi_i$.

选取 Lyapunov 函数为

$$V_\eta = V_e + V_z + V_w, \quad (15)$$

其中, $V_e = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}, V_z = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} z_i^2, V_w = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2r_i} \tilde{w}_i^2, \tilde{w}_i = w_i^* - w_i$ 是估计误差.

对 V_η 关于时间 t 求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta &= \mathbf{e}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\tau) + z_1(\dot{\hat{x}}_2 + l_1 e_1) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \dot{w}_i + \\ &\sum_{i=2}^n z_i \left(\dot{\hat{x}}_{i+1} + l_i e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} (\hat{x}_{j+1} + l_j e_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial w_j} \left(\frac{r_j}{2a_j^2} z_j^2 \phi_j^T \phi_j - \sigma_j w_j \right) \right) \leq \\ &- \lambda_1 \|\mathbf{e}\|^2 + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}(\mathbf{x}_\tau) + z_1(z_2 + \alpha_1 + l_1 e_1) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \dot{w}_i + \\ &\sum_{i=2}^n z_i \left(z_{i+1} + \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} \hat{x}_{j+1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial w_j} \left(\frac{r_j}{2a_j^2} z_j^2 \phi_j^T \phi_j - \sigma_j w_j \right) \right) + \\ &\sum_{i=2}^n z_i \left(l_i e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} l_j e_j \right), \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\lambda_1 = \lambda_{\min}(\mathbf{P}), \lambda_{\min}(\mathbf{P})$ 为 \mathbf{P} 的最小特征值, $\alpha_n = u$. 为表达简便, 定义 $\mathbf{x}_\tau = \mathbf{x}(t - \tau), \hat{\mathbf{x}}_\tau = \hat{\mathbf{x}}(t - \tau)$.

根据假设 1、引理 1 和引理 2, 可得

$$\begin{aligned} 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}})) + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \\ &\|\mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \|\mathbf{e}\|^2 + \delta_0 \|\mathbf{e}\|^2 + \delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\|^2 \|\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}})\|^2 \leq \\ &\|\mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \|\mathbf{e}\|^2 + \delta_0 \|\mathbf{e}\|^2 + n\delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \\ &\|\mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \|\mathbf{e}\|^2 + \delta_0 \|\mathbf{e}\|^2 + n\delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 z_i^2 \vartheta_i^2(w_i), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\delta_0 > 0$.

与式(17)相似,整理可得

$$2e^T P Q(x_\tau) = 2e^T P(Q(x_\tau) - Q(\hat{x}_\tau)) + 2e^T P Q(\hat{x}_\tau) \leq \|e\|^2 + \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 \|e(\tau)\|^2 + \delta_0 \|e\|^2 + n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i^2(\tau_i) v_i^2(w_i(\tau_i)). \quad (18)$$

根据引理1,有

$$z_1 l_1 e_1 \leq \frac{1}{2\mu_1} l_1^2 z_1^2 + \frac{1}{2} \mu_1 e_1^2, \quad (19)$$

$$z_i \left(l_i e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} l_j e_i \right) \leq \frac{1}{2} \mu_i e_i^2 + \frac{1}{2\mu_i} z_i^2 \left(l_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} l_j \right)^2, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (20)$$

其中 $\mu_i > 0$.

将式(17)~(20)代入式(16),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\eta \leq & - \left(\lambda_1 - 2 - \|P\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 - 2\delta_0 \right) \|e\|^2 + \\ & n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 z_i^2 \vartheta_i^2(w_i) + \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 \|e(\tau)\|^2 + \\ & n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i^2(\tau_i)^2 v_i(w_i(\tau_i)) + z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \frac{1}{2\mu_1} l_1^2 z_1 \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu_i e_i^2 + \\ & \sum_{i=2}^n z_i \left(z_{i+1} + \frac{1}{2\mu_i} z_i \left(l_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} l_j \right)^2 + \alpha_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} \hat{x}_{j+1} - \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial w_j} \left(\frac{r_j}{2a_j^2} z_j^2 \phi_j^T \phi_j - \sigma_j w_j \right) \right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \dot{w}_i. \end{aligned} \quad (21)$$

为了消除时滞项对系统稳定性的影响,选择如下 Lyapunov 函数:

$$V = V_\eta + V_p + V_q, \quad (22)$$

其中

$$V_p = \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t \|P\| d_i^2 e_i^2(s) ds,$$

$$V_q = n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 \int_{t-\tau_i}^t z_i^2(s) v_i(w_i(s)) ds.$$

对 V 求导,可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left(\lambda_1 - 2 - \|P\|^2 \sum_{i=1}^n (h_i^2 + d_i^2) - 2\delta_0 \right) \|e\|^2 + n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 z_i^2 \vartheta_i^2(w_i) + \\ & n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i^2(\tau_i)^2 v_i(w_i(\tau_i)) + z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \frac{1}{2\mu_1} l_1^2 z_1 \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu_i e_i^2 + \\ & \sum_{i=2}^n z_i \left(z_{i+1} + \frac{1}{2\mu_i} z_i \left(l_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} l_j \right)^2 + \alpha_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} \hat{x}_{j+1} - \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial w_j} \left(\frac{r_j}{2a_j^2} z_j^2 \phi_j^T \phi_j - \sigma_j w_j \right) \right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \dot{w}_i + \\ & n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i^2 v_i^2(w_i) - n\delta_0^{-1} \|P\|^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i^2(\tau_i) v_i^2(w_i(\tau_i)) \leq \\ & - \left(\lambda_1 - 2 - \|P\|^2 \sum_{i=1}^n (h_i^2 + d_i^2) - 2\delta_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mu_i^2 \right) \|e\|^2 + \\ & \sum_{i=1}^n z_i (\alpha_i + \bar{f}_i) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \dot{w}_i, \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{f}_i &= z_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} \hat{x}_{j+1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial w_j} \left(\frac{r_j}{2a_j^2} z_j^2 \phi_j^T \phi_j - \sigma_j w_j \right) + \frac{1}{2\mu_i} z_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{x}_j} l_j - l_i \right)^2 + \\ & n\delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\| \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i v_i^2(w_i) + n\delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\| \sum_{i=1}^n d_i^2 z_i(\tau_i) v_i^2(w_i(\tau_i)), \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \bar{f}_n &= z_{n-1} - \dot{\alpha}_{n-1} - l_n e_1 + n\delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\| \sum_{i=1}^n d_n^2 z_n v_i^2(w_n) - n\delta_0^{-1} \|\mathbf{P}\| \sum_{i=1}^n h_i^2 z_n(\tau_n) v_n^2(w_n(\tau_n)). \end{aligned}$$

利用径向基神经网络逼近未知非线性函数 \bar{f}_i , 即

$$\bar{f}_i = \Theta_i^T \phi_i(W_i) + \eta_i(W_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (24)$$

其中, η_i 是逼近误差且满足 $|\eta_i| \leq \eta_i^*$.

根据引理 1, 可得

$$z_i \bar{f}_i \leq \frac{1}{2a_i^2} z_i^2 w_i^* \phi_i^T \phi_i + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 + \frac{1}{2} (\eta_i^*)^2. \quad (25)$$

将式(25)代入式(23), 整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\lambda_1 - 2 - \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n (h_i^2 + d_i^2) - 2\delta_0) \|\mathbf{e}\|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \left(\alpha_i + \frac{1}{2a_i^2} z_i w_i \phi_i^T \phi_i \right) + \\ & z_n \left(u + \frac{1}{2a_n^2} z_n w_n \phi_n^T \phi_n \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\eta_i^*)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \dot{w}_i. \end{aligned} \quad (26)$$

随后, 将式(11)和(13)代入式(26), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\lambda_1 - 2 - \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n (h_i^2 + d_i^2) - 2\delta_0) \|\mathbf{e}\|^2 + \sum_{i=1}^n k_i z_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\eta_i^*)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \tilde{w}_i \left(\frac{r_i}{2a_i^2} z_i^2 w_i \phi_i^T \phi_i + \dot{w}_i \right). \end{aligned} \quad (27)$$

将式(12)代入式(27), 最终可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -(\lambda_1 - 2 - \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n (h_i^2 + d_i^2) - 2\delta_0) \|\mathbf{e}\|^2 + \\ & \sum_{i=1}^n k_i z_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\eta_i^*)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{r_i} \tilde{w}_i w_i. \end{aligned} \quad (28)$$

根据引理 1, 可得

$$\tilde{w}_i w_i = \tilde{w}_i (w_i^* - \tilde{w}_i) \leq -\frac{1}{2} \tilde{w}_i^2 + \frac{1}{2} (w_i^*)^2. \quad (29)$$

令 $\varpi = \lambda_1 - 2 - \|\mathbf{P}\|^2 \sum_{i=1}^n (h_i^2 + d_i^2) - 2\delta_0$, 式(28)可被写为

$$\dot{V} \leq -\varpi \|\mathbf{e}\|^2 + \sum_{i=1}^n k_i z_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2r_i} \tilde{w}_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\eta_i^*)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2r_i} w_i^*. \quad (30)$$

然后, 式(30)可写为

$$\dot{V} \leq -CV + M, \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\varpi}{\lambda_{\max}(P)}, -2k_i, \frac{\sigma_i}{r_i} \right\}, \\ M &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(a_i^2 + (\eta_i^*)^2 + \frac{\sigma_i}{r_i} (w_i^*)^2 \right). \end{aligned}$$

对式(31)两边乘 $e^{\alpha t}$, 并对其在区间 $[0, t]$ 进行积分, 最终可得到

$$V(t) \leq \left(V(0) - \frac{M}{C} \right) e^{-Ct} + \frac{M}{C}. \tag{32}$$

根据式(32)和 V_n 的定义,能够得到 e_i, z_i 和 \tilde{w}_i 是一致有界的,进而得到闭环系统中所有的信号都是一致有界的.

3 仿 真

在本节中,用一个机电模型来说明所获得理论结果的有效性.

考虑如图 1 所示的机电系统^[16],其动力学模型描述如下:

$$\begin{cases} M\ddot{q} + B\dot{q} + N\sin(q) = I, \\ L\dot{I} = V_0 - RI - K_B\dot{q}, \end{cases} \tag{33}$$

其中

$$M = \frac{J}{K_\pi} + \frac{mL_0^2}{3K_\pi} + \frac{M_0L_0^2}{K_\pi} + \frac{2M_0R_0^2}{5K_\pi}, \quad N = \frac{mL_0G}{2K_\pi} + \frac{M_0L_0G}{K_\pi}, \quad B = \frac{B_0}{K_\pi},$$

J 为转子的转动惯量, m 为连杆的质量, m_0 为负载的质量, L_0 为连杆的长度, R_0 为负载的转动, G 为重力系数, B 为接头处的摩擦因数, q 为电机的角位置, I 为电机的电枢电流, K_π 为电枢电流的转换系数, L 表示电枢电感, R 表示电枢电阻, K_B 为反电动势系数, 并且 V_0 为输入电压.

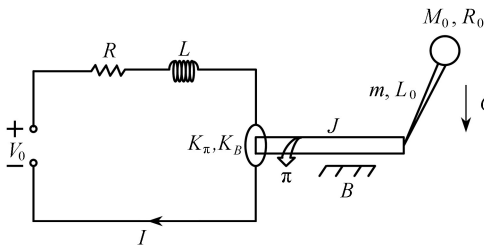


图 1 机电系统的模型

Fig. 1 The model for the electromechanical system

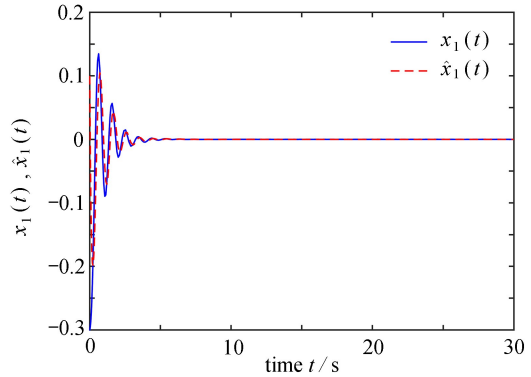


图 2 $x_1(t)$ 和 $\hat{x}_1(t)$ 的曲线

Fig. 2 Curves of $x_1(t)$ and $\hat{x}_1(t)$

令 $x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = I, u = V_0$, 并且考虑时滞的影响, 式(33)可以被描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \sin(x_1) + q_1(t - \tau), \\ \dot{x}_2 = -\frac{N}{M} \sin(x_1) - \frac{B}{M} x_2 + \frac{1}{M} x_3 + \frac{B}{M} \cos(x_2) \sin(x_3) + q_2(t - \tau), \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L} u - \frac{K}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 + q_3(t - \tau), \\ y = x_1, \end{cases} \tag{34}$$

其中, y 为系统的输出, u 为系统的输入, $q_1(t - \tau) = 0.5x_2(t - \tau_1), q_2(t - \tau) = 0.5(B/M)x_2(t - \tau_2)x_3^2(t - \tau_2)$, 并且 $q_3(t - \tau) = 0.5(R/L)x_3(t + \tau_3)$.

选择参数 $J = 1.625 \times 10^{-3}, m = 0.506, R_0 = 0.023, M_0 = 0.434, L_0 = 0.305, B_0 = 1.625 \times 10^{-2}, L = 2.5 \times 10^{-2}, R = 5.0, K_\pi = K_B = 0.90, l_1 = -10, l_2 = -12, l_3 = -12, a_1 = a_2 = a_3 = 3, r_1 = r_2 = r_3 = 1.5, k_1 = k_2 = k_3 = 2, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.5$ 和 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 2$. 初始条件选择为 $x_1(0) = -0.3, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 0, \hat{x}_1(0) = 0.1, \hat{x}_2(0) = \hat{x}_3(0) = 0$, 且 $w_1(0) = w_2(0) = 0, w_3(0) = 0.1$.

对于第一个径向基神经网络, Gauss 函数的宽度选为 2, Gauss 函数的中心分布在 $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$. 对于第二个径向基神经网络, Gauss 函数的宽度同样选为 2, Gauss 函数的中心分布在 $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$. 对于第三个径向基神经网络, Gauss 函数的宽度同样选为 2, Gauss 函

数的中心分布在 $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$.

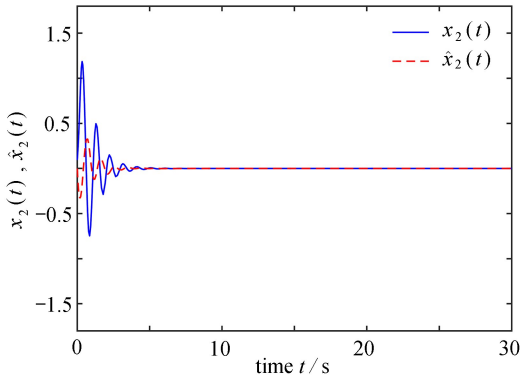


图 3 $x_2(t)$ 和 $\hat{x}_2(t)$ 的曲线

Fig. 3 Curves of $x_2(t)$ and $\hat{x}_2(t)$

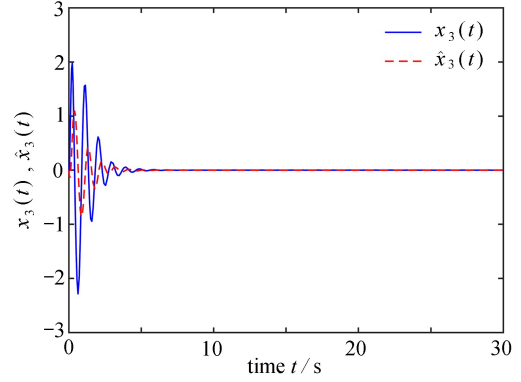


图 4 $x_3(t)$ 和 $\hat{x}_3(t)$ 的曲线

Fig. 4 Curves of $x_3(t)$ and $\hat{x}_3(t)$

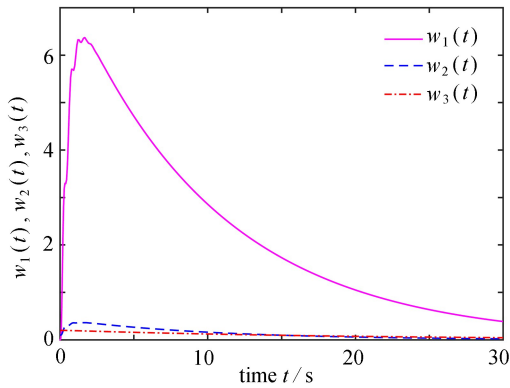


图 5 自适应律 $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$ 的曲线

Fig. 5 Curves of adaptive laws $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$

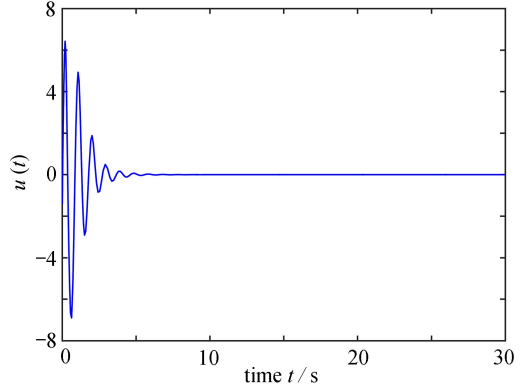


图 6 控制输入 $u(t)$ 的曲线

Fig. 6 The curve of control input $u(t)$

表 1 控制器的定量比较

Talbe 1 The quantitative comparison of controllers

performance index	eq. (13)	ref. [17]
e_1	0.4	5
e_2	1.3	4
e_3	2.3	2
convergence time t^*/s	6	12

仿真结果见图 2~6.图 2~4 是状态变量 $x_i(t)$ ($i=1,2,3$) 及其观测值 $\hat{x}_i(t)$ ($i=1,2,3$) 的轨迹.图 5 是自适应参数 $w_i(t)$ ($i=1,2,3$) 的轨迹.图 6 是控制器 $u(t)$ 的轨迹.从仿真结果可以看出,闭环系统中所有的信号能收敛到零的一个邻域内.针对式 (33),在实际参数选择一致的情况下,表 1 对式 (13) 所提出的控制器和文献 [17] 所提出的控制器在观测器观测误差和收敛时间方面作了定量比较.从而说明了本文设计的控制器的有效性.

4 结 论

本文针对一类非严格反馈的时滞非线性系统,利用 Lyapunov 稳定理论和 Young 不等式,提出了一种自适应神经网络控制方法.同时,设计了一个观测器来观测系统中未知的状态变量.利用神经网络的逼近特性解决了反步控制过程中出现的非线性函数的问题.设计的控制器不仅消除了时滞带来的影响,而且保证了闭环系统所有信号的半全局一致有界性.

参考文献 (References):

[1] SASTRY S S, ISIDORI A. Adaptive control of linearizable systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Con-*

- trol*, 1989, **34**(11): 1123-1131.
- [2] POLYCARPOU M M, MEARS M J. Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parametrized on-line approximators[J]. *International Journal of Control*, 1998, **70**(3): 363-384.
- [3] KANELLAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(3): 1241-1253.
- [4] HE W, CHEN Y, YIN Z. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **46**(3): 620-629.
- [5] LI Y, TONG S, LI T. Composite adaptive fuzzy output feedback control design for uncertain nonlinear strict-feedback systems with input saturation[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, **45**(10): 2299-2308.
- [6] SUN W, GAO H, KAYNAK O. Adaptive backstepping control for active suspension systems with hard constraints[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2013, **18**(3): 1072-1079.
- [7] ZHOU Z, TONG D, CHEN Q, et al. Adaptive NN control for nonlinear systems with uncertainty based on dynamic surface control[J]. *Neurocomputing*, 2021, **421**: 161-172.
- [8] WANG A, LIU L, QIU J, et al. Event-triggered robust adaptive fuzzy control for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, **27**(8): 1648-1658.
- [9] WU C, LIU J, XIONG Y, et al. Observer-based adaptive fault-tolerant tracking control of nonlinear nonstrict-feedback systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(7): 3022-3033.
- [10] CHEN C L P, WEN G X, LIU Y J, et al. Observer-based adaptive backstepping consensus tracking control for high-order nonlinear semi-strict-feedback multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **46**(7): 1591-1601.
- [11] NIU B, LI H, ZHANG Z, et al. Adaptive neural-network-based dynamic surface control for stochastic interconnected nonlinear nonstrict-feedback systems with dead zone[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, **49**(7): 1386-1398.
- [12] ZHAO X, WANG X, ZONG G, et al. Fuzzy-approximation-based adaptive output-feedback control for uncertain nonsmooth nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, **26**(6): 3847-3859.
- [13] 佟英浩, 童东兵, 陈巧玉, 等. 事件触发驱动的非线性系统有限时间状态估计器设计[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(6): 669-678. (TONG Yinghao, TONG Dongbing, CHEN Qiaoyu, et al. Design of a finite-time state estimator for nonlinear systems under event-triggered control [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 669-678. (in Chinese))
- [14] TONG S C, LI Y M, LIU Y J. Observer-based adaptive neural networks control for large-scale interconnected systems with nonconstant control gains[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, **32**(4): 1575-1585.
- [15] 李刚, 孟增. 基于RBF神经网络模型的结构可靠度优化方法[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(11): 1271-1279. (LI Gang, MENG Zeng. Reliability-based design optimization with the RBF neural network model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1271-1279. (in Chinese))
- [16] CHEN B, ZHANG H, LIN C. Observer-based adaptive neural network control for nonlinear systems in nonstrict-feedback form[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, **27**(1): 89-98.
- [17] CHEN W, JIAO L, LI J, et al. Adaptive NN backstepping output-feedback control for stochastic nonlinear strict-feedback systems with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part B): Cybernetics*, 2010, **40**(3): 939-950.