中立多变时滞Volterra型随机动力系统的稳定性

王春生

Stability of Neutral Volterra Stochastic Dynamical Systems With Multiple Delays

WANG Chunsheng

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.410323

ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887 http://www.applmathmech.cn

应用数学

中立多变时滞 Volterra 型随机动力系统的稳定性*

王春生

（广州软件学院 管理系，广州 510990）

摘要： 探讨了一类非线性随机积分微分动力系统,并通过 Banach 不动点方法,给出了该系统零解均方渐近稳定的充要条件,形成了中立多变时滞 Volterra 型随机积分微分动力系统零解均方渐近稳定性定理.与前人的研究方法不同,该文根据多变时滞随机动力系统各时滞的特点,灵活构造算子,相比以往文献的方法更加灵活实用.文章的结论一定程度上改进和发展了相关研究论文的结果.另外,文章所得结论补充并推广了不动点方法在研究非线性中立多变时滞 Volterra 型随机积分微分动力系统零解稳定性方面的成果.

关 键 词： Banach 不动点； 非线性； 均方渐近稳定性； 多变时滞； 中立 Volterra 型随机积分微分动力系统

中图分类号： O231.3 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.410323

Stability of Neutral Volterra Stochastic Dynamical Systems With Multiple Delays

WANG Chunsheng

(*Department of Management*, *Software Engineering Institute of Guangzhou*, *Guangzhou* 510990, *P.R.China*)

Abstract: A class of nonlinear stochastic integro-differential dynamical systems were discussed, the necessary and sufficient conditions for the mean-square asymptotic stability of the zero solution to the system were given by means of the Banach fixed point method, and a mean-square asymptotic stability theorem for neutral Volterra stochastic integro-differential dynamical systems with multiple delays was established. Unlike the previous research methods, according to the characteristics of each time delay of the stochastic dynamical system with multiple time delays, the operators were constructed through introduction of the corresponding functions, and then the stability of the system was studied with the Banach fixed point method. The conclusion improves and develops the results of several related research papers to a certain extent. In addition, the results obtained supplement and extend those of the fixed point method in study of the stability of zero solutions to nonlinear neutral variable-delay Volterra stochastic integro-differential dynamical systems.

Key words: Banach fixed point; non-linearity; mean-square asymptotic stability; some variable delays; neutral Volterra stochastic integrodifferential dynamic system

* **收稿日期：** 2020-10-23; **修订日期：** 2021-03-30
基金项目： 广东省自然科学基金 (2016A030313542); 广东省普通高校特色创新项目 (自然科学)(2018KTSCX339; 2021KQNCX130)
作者简介： 王春生(1982—), 男, 副教授, 硕士(E-mail: paperspring@163.com).
引用格式： 王春生. 中立多变时滞 Volterra 型随机动力系统的稳定性[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(11): 1190-1202.

引　　言

对于非线性动力系统的数值求解问题, 李岩汀等[1] 介绍了几种较为成熟的非线性动力系统数值求解方法. 但是对于较为复杂的非线性随机动力系统的研究, 较为常用的方法包括 Lyapunov 直接法和不动点方法. 在使用过程中, 为了克服 Lyapunov 直接法在研究确定型微分系统时遇到的困难, 文献 [2-9] 采用了不动点方法研究确定型动力系统零解的存在性、周期性、有界性和稳定性, 得到了很好的结论.

鉴于不动点方法在研究微分系统零解相关性质方面的优越性, Luo[10] 将不动点方法应用于研究随机动力系统零解的存在性、周期性、有界性和稳定性, 从此开辟了采用不动点方法研究随机动力系统稳定性的先河. 作为此研究的推广, 很多专家学者都采用过不动点方法研究各类随机动力系统. 其中, 王春生等[11-15] 研究了多种随机微分动力系统的稳定性. 但是, 据笔者所知, 目前尚未有学者研究过非线性中立多变时滞 Volterra 型随机积分微分动力系统零解的均方渐近稳定性. 所以, 作为不动点方法在研究随机动力系统零解稳定性方面的推广, 本文将继续采用 Banach 不动点方法研究一类非线性中立多变时滞 Volterra 型随机动力系统的均方渐近稳定性. 本文所得结论一定程度上改进和推广了相关文献的结论.

1　论证分析

1.1　主要结果

1.1.1　引论概述

设$\{\Omega, F, P\}$为完备概率空间, 具有满足通常条件的流$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$. $\{\omega(t),\ t\geqslant 0\}$是定义在此空间上的标准一维 Wiener 过程. 连续函数$g_i(t)\leqslant t, m_i(t)\leqslant t,\ r_i(t)\leqslant t$, 满足: 当$t\to\infty$时, $g_i(t)\to\infty,\ m_i(t)\to\infty,\ r_i(t)\to\infty,\ i=0,1,2,\cdots,n$.

考虑一类较为复杂的非线性中立多变时滞 Volterra 型随机动力系统, 当$t\geqslant 0$时,

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}[x(t)-G(t,x(m_1(t)),\cdots,x(m_n(t)))]=\left[f_1(t,x(g_1(t)),\cdots,x(g_n(t)))+\int_{g_0(t)}^{t}q_1(s,t,x(s))\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+\\&\quad\left[f_2(t,x(r_1(t)),\cdots,x(r_n(t)))+\int_{r_0(t)}^{t}q_2(s,t,x(s))\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}\omega(t),\end{aligned}\tag{1}$$

其中$x(t)\in\mathbf{R}$, 初始条件为$x_0=\phi(t)\in C([m(0),0]\ ,\mathbf{R})$,

$$m(0)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\{\inf(g_i(s),s\geqslant 0),\inf(r_i(s),s\geqslant 0),\inf(g_0(s)),\inf(r_0(s))\}.$$

假设$G\in C(\mathbf{R}_+\times R^n,\mathbf{R})$, $f_1,f_2\in C(\mathbf{R}_+\times R^n,\mathbf{R})$, $q_1,\ q_2\in C(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})$, 满足局部 Lipschitz 条件, 即存在连续可积函数$K_j(t)$, $A_j(t)$, $B_j(t)$, $C(t,s)$, $D(t,s)$, $j=1,2,\cdots,n,\ 0\leqslant s\leqslant t\left(\sum_{j=1}^{n}|K_j(t)|, \sum_{j=1}^{n}|A_j(t)|, \sum_{j=1}^{n}|B_j(t)|, |C(t,s)|\right.$ 和$|D(t,s)|$有界$\Big)$满足对任意的$x,y,x_j,y_j\in\mathbf{R}$, 有

$$\left|G(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)-G(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|K_j(t)||x_j-y_j|,\tag{2}$$

$$|f_1(t,x_1,\cdots,x_n)-f_1(t,y_1,\cdots,y_n)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|A_j(t)||x_j-y_j|,\tag{3}$$

$$|f_2(t,x_1,\cdots,x_n)-f_2(t,y_1,\cdots,y_n)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|B_j(t)||x_j-y_j|,\tag{4}$$

$$|q_1(s,t,x)-q_1(s,t,y)|\leqslant C(t,s)|x-y|,\tag{5}$$

$$|q_2(s,t,x)-q_2(s,t,y)|\leqslant D(t,s)|x-y|.\tag{6}$$

定义 1　系统(1)被称为是均方渐近稳定的, 如果系统(1)的零解 $x(t)$ 均方稳定, 且满足当 $t\to\infty$时, 有

$$E|x(t)|^2\to 0.\tag{7}$$

1.1.2　已有的相关研究结论

对于系统(1)的简单情形, 已经有很多专家学者利用 Lyapunov 直接法和 Banach 不动点方法进行过研究. 这里仅列举几个具有代表性的研究案例和结果.

时滞 Volterra 型积分微分动力系统：

$$y'(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t,s)g(y(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0.\tag{8}$$

变时滞 Volterra 型积分微分动力系统：

$$y'(t)=-a(t)y(t)+\int_{t-\mu(t)}^{t}b(t,s)g(y(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0.\tag{9}$$

中立时滞随机微分动力系统：

$$\mathrm{d}[x(t)-q(t)x(t-\tau(t))]=[a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau(t))]\mathrm{d}t+[c(t)x(t)+e(t)x(t-\delta(t))]\mathrm{d}\omega(t),\qquad t\geqslant 0.\tag{10}$$

多变时滞微分动力系统：

$$x'(t)=-\sum_{j=1}^{N}a_j(t)x(t-\kappa_j(t)),\qquad t\geqslant 0.\tag{11}$$

中立多变时滞随机微分动力系统：

$$\mathrm{d}\left[y(t)-\sum_{j=1}^{n}q_j(t)x(t-\tau_j(t))\right]=\sum_{j=1}^{n}b_j(t)x(t-\tau_j(t))\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}c_j(t)x(t-\delta_j(t))\mathrm{d}\omega(t),\qquad t\geqslant 0.\tag{12}$$

所得相关研究结论如下：

定理 A（Burton[2]） 若存在$K>0$，使得满足 Lipschitz 条件的函数g是$[-K,K]$上的单调递增连续奇函数，$x-g(x)\geqslant 0$，且在$[0,K]$上非减．令连续可积函数$a(t,s):=[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$，$r>0$，定义$A(t,s):=\int_{t-s}^{r}a(\mu+s,s)\mathrm{d}\mu$，如果对$t\geqslant 0$有

(i) $A(t,t):=\int_0^r a(\mu+t,t)\mathrm{d}\mu\geqslant 0$；

(ii) $\beta:=\sup_{t\geqslant 0}\int_0^r\left|\int_{\varpi}^{r}a(\nu+t-\varpi,t-\varpi)\mathrm{d}\nu\right|\mathrm{d}\varpi<\dfrac{1}{2}$，

则系统（8）的零解稳定．进一步地，如果$g'(x)$在$[-L,L]$上连续，满足$g'(0)\neq 0$，且当$t\to\infty$时有

(iii) $\int_0^t A(s,s)\mathrm{d}s\to\infty$，

则系统（8）的零解渐近稳定．

定理 B(Burton[3]) 假设函数$0\leqslant\mu(t)\leqslant\mu_0$（$\mu_0$为一正常数），存在$\lambda\in(0,1)$使得，当$t\geqslant 0$时有

(i) $\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t a(\mu)\mathrm{d}\mu}\int_{s-\mu(s)}^{s}|b(s,r)|\mathrm{d}r\mathrm{d}s\leqslant\lambda$；

(ii) 对任意$\varepsilon>0$，存在$t_1>0$和$T>0$，使得当$t_2\geqslant t_1$和$t\geqslant t_2+T$时有，$\mathrm{e}^{-\int_{t_2}^{t}a(s)\mathrm{d}s}<\varepsilon$，且当 $t\to\infty$时有，$\mathrm{e}^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}\to 0$；

(iii) 存在 $L>0$ 使得，当$|x|,|y|\leqslant L$时有，$|g(x)-g(y)|\leqslant|x-y|$和 $g(0)=0$，

则系统（9）的零解渐近稳定．

定理 C(Luo[10]) 如果$\tau(s)$可微，假设存在一常数$\delta\in(0,1)$和连续可积函数$g(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$使得对$t\geqslant 0$有

(i) $\underline{\lim}_{t\to\infty}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s>-\infty$；

(ii) $|q(t)|+\int_{t-\tau(t)}^{t}|a(s)+g(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t g(\mu)\mathrm{d}\mu}|g(s)|\left(\int_{s-\tau(s)}^{s}|g(r)+a(r)|\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+$
$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t g(\mu)\mathrm{d}\mu}|(a(s-\tau(s))+g(s-\tau(s)))(1-\tau'(s))+b(s)-q(s)g(s)|\mathrm{d}s+$
$\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t g(\mu)\mathrm{d}\mu}(|c(s)|+|e(s)|)^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant\delta$；

则系统（10）的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时，$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\to\infty$．

定理D（Zhang[4]） 假设κ_j可微，$t-\kappa_j(t)$的反函数$g_j(t)$存在，令

$$Q(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\left(g_j(t)\right),\ \theta(t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t Q(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|a_j(s)\right|\left|\kappa_j'(s)\right|\mathrm{d}s,$$

存在$\delta\in(0,1)$使得, 当$t\geqslant 0$时,

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t Q(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\int_{t-\kappa_j(t)}^{t}\left|a_j\left(g_j(s)\right)\right|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t -Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|Q(s)|\int_{s-\kappa_j(s)}^{s}\left|a_j\left(g_j(v)\right)\right|\mathrm{d}v\mathrm{d}s\right]+\theta(t)\leqslant\delta$;

则系统(11)的零解渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t Q(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

定理 E(Wu 等[16])　如果$\tau_j(t)$可微, 假设存在一正数$\alpha\in(0,1)$和连续函数$h_j(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $j=1,2,\cdots,n$, 使得当$t\geqslant 0$时,

(i) $H(s)=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i(s)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t H(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii)
$$\sum_{j=1}^{n}\left(|q_j(t)|+\int_{t-\tau_{j(t)}}^{t}|h_j(s)|\mathrm{d}s\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|b_j(s)-H(s)q_j(s)+h_j(s-\tau_j(s))(1-\tau_j'(s))\right|\mathrm{d}s\right)+$$
$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t H(\mu)\mathrm{d}\mu}|H(s)|\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{s-\tau_j(s)}^{s}\left|h_j(\mu)\right|\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}s+2\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t H(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|c_j(s)\right|\right)^2\mathrm{d}s\right]^{1/2}\leqslant\alpha;$$

则系统(12)的零解均方渐近稳定当且仅当$t\to\infty$时, 有

(iii) $\int_0^t H(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

1.1.3　文章结论

本文在构造算子时, 根据时滞的不同灵活引入不同匹配函数, 然后用 Banach 不动点方法研究系统(1)零解的均方渐近稳定性, 所得结果一定程度上改进和推广了上述 5 篇文献的结果.

定理 1　设函数G, f_1, f_2, q_1, q_2满足条件(2)~(6), $g_i(t)$可微, 且存在常数$\alpha\in(0,1)$以及连续函数$h_i(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,n$, 使得当$t\geqslant 0$时,

(i) $h(s)=\sum\limits_{i=1}^{n}h_i(s)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii)
$$\sum_{i=1}^{n}|K_i(t)|+\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^{n}h_i(g_i(s))g_i'(s)\right|\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i(s)|\right)\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_o(s)}^{s}|C(s,v)|\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t |h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(v)|\mathrm{d}v+|K_i(s)|\right)\right]\mathrm{d}s+$$
$$\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}|B_i(s)|+\left(\int_{r_o(s)}^{s}|D(s,v)|\mathrm{d}v\right)^2\right)\mathrm{d}s\right]^{1/2}\leqslant\alpha<1;$$

则系统(1)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

1.1.4　文章结论的应用: 定理 A~E 研究结论的改进

当将定理 1 的结论和证明过程应用到系统(8)~(12), 并在证明过程中根据系统的实际情况进行适当的变量代换和化简, 则定理 A~E 可改进为定理$\mathrm{A}'\sim\mathrm{E}'$.

定理 A′　假设函数 g 满足 Lipschitz 条件: 存在有界连续可积函数 $M(t)$ 使得对任意的$x,y\in\mathbf{R}$, 有$|g(x(t))-g(y(t))|\leqslant M(t)|x(t)-y(t)|$. 并且存在常数$\alpha\in(0,1)$以及连续函数$h(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, 使得当$t\geqslant 0$时,满足

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{s-r}^{s}|M(v)a(s,v)|\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\leqslant\alpha$;

则系统(8)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 1 定理 A′没有要求“$g(x)$ 单调递增且为奇函数”, 在一定程度上改进了定理 A 的结果.

定理 B′ 假设函数 g 满足 Lipschitz 条件: 存在有界连续可积函数 $N(t)$, 使得任意的 $x,y\in\mathbf{R}$, 有 $|g(x(t))-g(y(t))|\leqslant N(t)|x(t)-y(t)|$. 且存在常数$\alpha\in(0,1)$以及连续函数$h(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, 使得对$t\geqslant 0$, 满足

(i) $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $\int_0^t |a(s)|\,\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{s-\mu(s)}^s |N(v)b(s,v)|\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\leqslant\alpha$;

则系统(9)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 2 由定理B′的结论可知, 本研究的结论未包含时滞有界的要求, 相比定理 B 有一定程度上的改进和推广.

定理 C′ 假设$\tau(t)$可微, 且存在常数$\delta\in(0,1)$以及连续函数$h_i(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}, i=1,2$, 使得当$t\geqslant 0$时,

(i) $h(s)=\sum\limits_{i=1}^2 h_i(s)$, $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $|q(s)|+\int_{t-\tau(t)}^t |h_2(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|b(s)-q(s)h(s)+h_2(s-\tau(s))(1-\tau'(s))|\mathrm{d}s+$

$\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h(s)|\left(\int_{s-\tau(s)}^s |h_2(r)|\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}(|c(s)|+|e(s)|)^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant\delta$;

则系统(10)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 3 显然, 定理 C′在构造算子时比定理 C 更加灵活, 且定理 C 是定理 C′的特殊情形. 即定理 C′在一定程度上改进了定理 C 的结果.

定理 D′ 假设$\tau_j(t)$可微, 存在连续函数$h_i(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,N$,和正常数$\delta\in(0,1)$, 满足: 当$t\geqslant 0$时,

(i) $h(s)=\sum\limits_{i=1}^N h_i(s)$, $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^N\left(\int_{t-\kappa_i(t)}^t |h_i(s)|\mathrm{d}s\right)+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum\limits_{i=1}^N (h_i(s-\kappa_i(s))(1-\kappa_i'(s)))\right|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h(s)|\left(\sum\limits_{i=1}^N\int_{s-\kappa_i(s)}^s |h_i(\mu)|\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}s\leqslant\delta$;

则系统(11)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 4 相比定理 D 的结论, 定理D′没有要求$t-\tau_i(t)$存在反函数, 即没有要求函数$t-\tau_i(t)$严格单调. 所以, 定理D′在一定程度上改进和推广了定理 D 的结果. 详见例 5.

定理 E′ 如果$\tau_j(t)$可微, 假设存在正数$\alpha\in(0,1)$和连续函数$h_i(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,N$, 使得当$t\geqslant 0$,

(i) $h(s)=\sum\limits_{i=1}^n h_i(s)$, $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^n\left(|q_i(t)|+\int_{t-\tau_i(t)}^t |h_i(s)|\mathrm{d}s\right)+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum\limits_{i=1}^n (b_i(s)-h(s)q_i(s)+\right.$

$\left.h_i(s-\tau_i(s))(1-\tau_i'(s)))\right|\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h(s)|\left(\sum\limits_{i=1}^n\int_{s-\tau_i(s)}^s |h_i(\mu)|\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}s+$

$\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum\limits_{j=1}^n |c_j(s)|\right)^2\mathrm{d}s\right]^{1/2}\leqslant\alpha<1$;

则系统(12)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 5 很显然, 定理 E′的条件(ii)要比定理 E 的条件(ii)宽松得多. 所以, 定理 E′很大程度上改进了定理 E 的结果. 详见例 3.

注 6　定理 1 给出的是一个非线性系统的稳定性结论，发展了文献 [4,10,16] 的结论.

1.1.5　定理 1 的证明

证明　用 S 表示 F-适应过程 $\psi(t,\omega):[m(0),\infty]\times\Omega\to\mathbf{R}$ 组成的 Banach 空间，且对固定的 $\omega\in\Omega$，$\psi(t,\omega)$ 对 t 几乎处处连续. 更进一步，假设当 $s\in[m(0),0]$ 时，$\psi(s,\omega)=\phi(s)$；当 $t\to\infty$ 时，$\|\psi(t)\|:=\left\{E\left(|\psi(t,\omega)|^2\right)\right\}^{1/2}\to 0$.

定义算子 $\Psi:S\to S$ 如下：

(i) 当 $t\in[m(0),0]$ 时，$(\Psi x)(t)=\phi(t)$；

(ii) 当 $t\geqslant 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
(\Psi\varphi)(t)=&\left(\phi(0)-G(0,\phi(g_1(0)),\cdots,\phi(g_n(0)))-\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(0)}^{0}h_i(s)\phi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\int_0^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}+\\
&\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t}h_i(s)\varphi(s)\mathrm{d}s+G(t,\varphi(m_1(t)),\cdots,\varphi(m_n(t)))+\\
&\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}h_i(g_i(s))g_i'(s)\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s-\int_0^t h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}G(s,\varphi(m_1(s)),\cdots,\varphi(m_n(s)))\mathrm{d}s+\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_1(s,\varphi(g_1(s)),\cdots,\varphi(g_n(s)))\mathrm{d}s-\int_0^t h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(s)}^{s}h_i(v)\varphi(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s+\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(s)}^{s}q_1(v,s,\varphi(v))\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))\mathrm{d}\omega(s)+\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{r_0(s)}^{s}q_2(v,s,\varphi(v))\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}\omega(s)=\sum_{i=1}^{10}I_i(t).
\end{aligned}\tag{13}
$$

令

$$
\begin{aligned}
I_1(t)=&\left(\phi(0)-G(0,\phi(g_1(0)),\cdots,\phi(g_n(0)))-\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(0)}^{0}h_i(s)\phi(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\int_0^t h(\mu)\mathrm{d}\mu},\\
I_2(t)=&\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t}h_i(s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\\
I_3(t)=&G(t,\varphi(m_1(t)),\cdots,\varphi(m_n(t))),\\
I_4(t)=&\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}h_i(g_i(s))g_i'(s)\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s,\\
I_5(t)=&-\int_0^t h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}G(s,\varphi(m_1(s)),\cdots,\varphi(m_n(s)))\mathrm{d}s,\\
I_6(t)=&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_1(s,\varphi(g_1(s)),\cdots,\varphi(g_n(s)))\mathrm{d}s,\\
I_7(t)=&-\int_0^t h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(s)}^{s}h_i(v)\varphi(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s,\\
I_8(t)=&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(s)}^{s}q_1(v,s,\varphi(v))\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s,\\
I_9(t)=&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))\mathrm{d}\omega(s),\\
I_{10}(t)=&\int_0^t \mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{r_0(s)}^{s}q_2(v,s,\varphi(v))\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}\omega(s).
\end{aligned}
$$

1)　Ψ 在 $[0,\infty)$ 上是均方连续的

令 $\phi\in S$，$t_1\geqslant 0$，$|\sigma|$ 充分小，则

$$
E|(\Psi\varphi)(t_1+\sigma)-(\Psi\varphi)(t_1)|^2\leqslant 10\sum_{j=1}^{10}E\left|I_j(t_1+\sigma)-I_j(t_1)\right|^2.
$$

由条件(ii)易证, 当$\sigma\to 0$时, $E\left|I_j(t_1+\sigma)-I_j(t_1)\right|^2\to 0$, $i=1,2,3,4,5,6,7,8$. 此外, 由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式, 当$\sigma\to 0$时, 有

$$E|I_9(t_1+\sigma)-I_9(t_1)|^2=E\left|\int_0^{t_1+\sigma}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1+\sigma}h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))\mathrm{d}\omega(s)-\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))\mathrm{d}\omega(s)\right|^2\leqslant$$
$$2E\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_1}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t_1+\sigma}h(\mu)\mathrm{d}\mu}-1\right)^2|f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))|^2\mathrm{d}s+$$
$$2E\int_{t_1}^{t_1+\sigma}\mathrm{e}^{-2\int_s^{t_1+\sigma}h(\mu)\mathrm{d}\mu}|f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))|^2\mathrm{d}s\to 0.$$

同理, 当$\sigma\to 0$时, $E|I_{10}(t_1+\sigma)-I_{10}(t_1)|^2\to 0$.

综上所述, 当$\sigma\to 0$时, $E|(\Psi\phi)(t_1+\sigma)-(\Psi\phi)(t_1)|^2\to 0$.

2） $\Psi(S)\subset S$

因为$E|(\Psi\varphi)(t)|^2\leqslant 10\sum_{j=1}^{10}E\left|I_j(t)\right|^2$. 显然, 当$t\to\infty$时, $E|I_1(t)|^2\to 0$. 由条件（ii）同时易证, $E|I_3(t)|^2\to 0$. 由于当$t\to\infty$时, $g_i(t)\to\infty$且$\|\varphi(t)\|\to 0$. 所以对任意$\varepsilon>0$,存在$T_1>0$使得$s\geqslant T_1$, 包含$E|\varphi(s)|^2<\varepsilon$和$E|\varphi(g(s))|^2<\varepsilon$. 从而当$t\to\infty$时, $E|I_2(t)|^2\to 0$. 同时, 由条件(ii)有

$$E|I_4(t)|^2\leqslant 2E\left|\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^n h_i(g_i(s))g_i'(s)\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2+$$
$$2E\left|\int_{T_1}^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^n h_i(g_i(s))g_i'(s)\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2\leqslant$$
$$2E\left|\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^n h_i(g_i(s))g_i'(s)\varphi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2+2\alpha\varepsilon.$$

由条件(ii)和(iii)知, 存在$T_2\geqslant T_1$使得, 当$t\geqslant T_2$时, 有

$$2E\left|\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\sum_{i=1}^m h_i(g_i(s))g_i'(s)\phi(g_i(s))\mathrm{d}s\right|^2<\varepsilon.$$

从而$E|I_4(T)|^2<\varepsilon+2\alpha\varepsilon<3\varepsilon$. 因此当$t\to\infty$时, $E|I_4(T)|^2\to 0$.

类似地, 应用条件(2)~(6)可以证明当$t\to\infty$时, $E\left|I_j(t)\right|^2\to 0, j=5,6,7,8$. 并且由条件 (4), 当$t\to\infty$时,

$$E|I_9(t)|^2=E\left|\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))\mathrm{d}\omega(s)\right|^2\leqslant$$
$$E\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|f_2(s,\varphi(r_1(s)),\cdots,\varphi(r_n(s)))|^2\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}E\left(\sum_{i=1}^n|B_i(s)||\varphi(r_i(s))|\right)^2\mathrm{d}s.$$

由前面的证明知, 当$t\to\infty$时, $E|I_9(t)|^2\to 0$. 同理, 当$t\to\infty$时, $E|I_{10}(t)|^2\to 0$. 所以有$\Psi(S)\subset S$.

3） Ψ是压缩的

由条件(ii)易知, 存在常数$L>0$使得

$$\left(1+\frac{1}{L}\right)\left\{\sum_{i=1}^n|K_i(t)|+\sum_{i=1}^n\int_{g_i(t)}^s|h_i(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^n|A_i(s)|\right)\mathrm{d}s+\right.$$
$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^n h_i(g_i(s))g_i'(s)\right|\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(s)}^s|C(s,v)|\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s+$$
$$\left.\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum_{i=1}^n\left(\int_{g_i(s)}^s|h_i(v)|\mathrm{d}v+|K_i(s)|\right)\right]\mathrm{d}s\right\}+$$
$$(1+L)\left[\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^n|B_i(s)|+\int_{r_0(s)}^s|D(s,v)|\mathrm{d}v\right)^2\mathrm{d}s\right]\leqslant\alpha. \tag{14}$$

所以，对任意$\varphi,\psi\in S$，由条件(2)~(6)知

$$\begin{aligned}&E\sup_{s\in[0,t]}|(\Psi\varphi)(s)-(\Psi\psi)(s)|^2\leqslant E\sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\psi(s)|^2\times\\&\sup_{s\in[0,t]}\left\{\left(1+\frac{1}{L}\right)\left\{\sum_{i=1}^{n}|K_i(s)|+\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(\nu)|\mathrm{d}\nu+\int_0^s\mathrm{e}^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i(\nu)|\right)\mathrm{d}\nu+\right.\right.\\&\int_0^s\mathrm{e}^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^{n}h_i(g_i(\nu))g_i'(\nu)\right|\mathrm{d}\nu+\int_0^s\mathrm{e}^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(\nu)}^{\nu}|C(\nu,\theta)|\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\nu+\\&\left.\int_0^s|h(\nu)|\mathrm{e}^{-\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(\nu)}^{\nu}|h_i(\theta)|\mathrm{d}\theta+|K_i(\nu)|\right)\right]\mathrm{d}\nu\right\}^2+\\&\left.(1+L)\left\{\int_0^s\mathrm{e}^{-2\int_\nu^s h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}|B_i(s)|+\int_{r_0(s)}^{s}|D(\nu,\theta)|\mathrm{d}\theta\right)^2\mathrm{d}s\right\}\right\}.\end{aligned}\tag{15}$$

由式(14)可得，Ψ是压缩映射．所以，Ψ在空间S中有唯一不动点$x(t)$，即为系统 (1) 的零解．另外，由上述证明过程可知，当$t\to\infty$时，$E|x(t)|^2\to 0$．

4） 系统 (1) 的零解是均方稳定的

对任意正数ε选择小于ε的正数δ，满足

$$(1+L)\delta\left[1+\sum_{i=1}^{n}|K_i(0)|+\int_{g_i(0)}^{0}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right]^2\mathrm{e}^{-2\int_s^{t^*}h(\mu)\mathrm{d}\mu}+\alpha\varepsilon<\varepsilon,$$

其中 L 如式 (14) 中定义．设$x(t)$是系统 (1) 的解，且$\|\phi\|^2<\delta$，则$x(t)=(\Psi x)(t)$，其中算子Ψ在式 (13) 中定义．可以证明，对$t\geqslant 0$，有$E|x(t)|^2<\varepsilon$．

事实上，注意到对$t\in[m(0),0]$有$E|x(t)|^2<\varepsilon$，假设存在t^*使得$E|x(t^*)|^2=\varepsilon$而且当$m(0)\leqslant s<t^*$时，$E|x(s)|^2<\varepsilon$．则由式(13)及式(14)计算可得

$$\begin{aligned}&E|x(t^*)|^2\leqslant(1+L)\|\phi\|\left[1+\sum_{j=1}^{n}\left(|K_i(0)|+\int_{g_i(0)}^{0}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right)\right]^2\mathrm{e}^{-2\int_0^{t^*}h(\mu)\mathrm{d}\mu}+\\&\left(1+\frac{1}{L}\right)\varepsilon\left\{\sum_{i=1}^{m}|K_i(t)|+\sum_{i=1}^{n}\int_{g_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i(s)|\right)\mathrm{d}s+\right.\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^{n}h_i(g_i(s))g_i'(s)\right|\mathrm{d}s\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{g_0(s)}^{s}|C(s,\nu)|\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s+\\&\left.\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(\nu)|\mathrm{d}\nu+|K_i(s)|\right)\right]\mathrm{d}s\right\}^2+\\&(1+L)\varepsilon\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{n}|B_i(s)|+\int_{g_0(s)}^{s}|D(s,\nu)|\mathrm{d}\nu\right)^2\mathrm{d}s\leqslant\\&(1+L)\delta\left[1+\sum_{j=1}^{n}\left(|K_i(0)|+\int_{g_i(0)}^{0}|h_i(s)|\mathrm{d}s\right)\right]^2\mathrm{e}^{-2\int_0^{t^*}h(\mu)\mathrm{d}\mu}+\alpha\varepsilon<\varepsilon.\end{aligned}\tag{16}$$

这与$E|x(t^*)|^2=\varepsilon$矛盾．所以，当条件 (iii) 成立时，系统 (1) 的零解均方渐近稳定．

5） 条件 (iii) 是系统(1)零解均方渐近稳定的必要条件

假设条件 (iii) 不成立，则由条件 (i) 可知，存在$\rho\in\mathbf{R}$和序列$\{t_m\}$，$t_m\to\infty(m\to\infty)$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{t_m}h(s)\mathrm{d}s=\rho.$$

则一定存在常数$B>0$，满足$-B\leqslant\int_0^{t_m}h(s)\mathrm{d}s\leqslant B, m\geqslant 1$．

下面构造函数$H(s)$，对$s\geqslant 0$时，

$$H(s)=\sum_{i=1}^{m}|A_i(s)|+\left|\sum_{i=1}^{m}h_i(g_i(s))g_i'(s)\right|+\int_{g_0(s)}^{s}|C(s,v)|\mathrm{d}v+|h(s)|\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(v)|\mathrm{d}v+|K_i(s)|\right)\right].$$

根据条件 (ii), $\int_0^{t_m}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha$, 即 $\int_0^{t_m}\mathrm{e}^{\int_0^{t_s}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\int_0^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}<\mathrm{e}^B$. 可知, $\left\{\int_0^{t_m}\mathrm{e}^{\int_0^{s}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s\right\}$ 有界且单调, 所以有收敛的子序列. 假设存在$\theta>0$, 满足

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{t_m}\mathrm{e}^{\int_0^{s}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s:=\theta.$$

选择足够大的$\gamma\in\mathbf{Z}_+$, 使得对任意$n\geqslant\gamma$,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{t_\gamma}^{t_m}\mathrm{e}^{\int_0^{s}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\beta_0}{4A},$$

其中, $A=\sup_{t\geqslant0}\mathrm{e}^{-\int_0^{t}h(\mu)\mathrm{d}\mu}$, $\beta_0>0$, 且有$4\beta_0A\mathrm{e}^B+\alpha<1$.

系统 (1) 的零解为$x(t)=x\left(t,t_\gamma,\varphi\right)$, 且满足$\left|\varphi(t_\gamma)\right|^2=\beta_0$, $|\varphi(s)|^2<\beta_0$, $s\leqslant t_\gamma$. 因为$x(t)$是均方渐近稳定的, 所以可以设$E|x(t)|^2<1$, $t\geqslant t_\gamma$, 选择合适的ϕ满足

$$Q\left(t_\gamma\right):=\phi\left(t_\gamma\right)-G\left(t_\gamma,\phi\left(g_1\left(t_\gamma\right)\right),\cdots,\phi\left(g_m\left(t_\gamma\right)\right)\right)-\sum_{i=1}^{m}\int_{g_i(t_\gamma)}^{t_\gamma}h_i(s)\phi(s)\mathrm{d}s\geqslant\beta_0.$$

由式(13)和$x(t)=(\Psi x)(t)$, $t\geqslant t_\gamma$可知

$$\begin{aligned}&E\left|x(t_m)-\sum_{i=1}^{m}\int_{g_i(t_m)}^{t_m}h_i(s)x(s)\mathrm{d}s-G(t_m,x(g_1(t_m)),\cdots,x(g_m(t_m)))\right|^2\geqslant\\&\quad Q(t_\gamma)\mathrm{e}^{-\int_{t_\gamma}^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left\{Q(t_\gamma)\mathrm{e}^{-\int_{t_\gamma}^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}-2\int_{t_\gamma}^{t_m}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant\\&\quad\beta_0\mathrm{e}^{-\int_{t_\gamma}^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left\{\beta_0\mathrm{e}^{-\int_{t_\gamma}^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}-2\int_{t_\gamma}^{t_m}\mathrm{e}^{-\int_s^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}H(s)\mathrm{d}s\right\}\geqslant\frac{1}{2}\beta_0\mathrm{e}^{-2\int_{t_\gamma}^{t_m}h(\mu)\mathrm{d}\mu}\geqslant\frac{1}{2}\beta_0\mathrm{e}^{-2B}>0.\end{aligned}\tag{17}$$

另外, 当$t\to\infty$时,

$$E|x(t)|^2=E\left|x\left(t,t_\gamma,\varphi\right)\right|^2\to0.$$

又由$t_m\to\infty$时$g(t_m)\to\infty(m\to\infty)$以及条件 (ii), 从而可得当$m\to\infty$时,

$$E\left|x(t_m)-\sum_{i=1}^{m}\int_{g_i(t_m)}^{t_m}h_i(s)x(s)\mathrm{d}s-G(t_m,x(g_1(t_m)),\cdots,x(g_m(t_m)))\right|^2\to0.$$

这就与式(17)产生了矛盾. 所以, 条件 (iii) 是系统(1)零解均方渐近稳定的必要条件. 证毕.

注 7 由上面的证明过程可知, 本文是根据多变时滞随机动力系统各时滞的特点, 分别引入对应的函数来构造算子, 然后利用 Banach 不动点方法研究得到定理 1 的结论. 由于构造算子的灵活性, 文章的结论具有一定的优越性. 如果在某系统稳定性的研究中, 能找到合适的 $h_i(s)$ 函数满足定理 1 的所有条件, 则该系统的零解就均方渐近稳定. 所以在应用定理 1 的结论判断一个系统零解的稳定性时, $h_i(s)$ 函数的选取至关重要. 事实上, $h_i(s)$ 函数的选取较为宽松且不唯一, 实际应用中应根据时滞的特点灵活选取.

2 实 例

例 1 考虑微分动力系统:

$$\mathrm{d}x(t)=a(t)x(t)\mathrm{d}t+b(t)\tanh(x(t-\tau))\mathrm{d}t,\tag{18}$$

其中$t\geqslant0$, $\tau>0$, $a(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$, $b(t)\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$. 由于对任意$x\in\mathbf{R}$, 都有$|\tanh x|\leqslant|x|$, 则有如下结论.

如果存在连续函数$h_i(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $i=1,2$和正常数$\beta\in(0,1)$, 满足当$t\geqslant0$时,

(i) $h(s)=\sum_{i=1}^{2}h_i(s)$, $\varliminf_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $$\sup_{t\geqslant0}\left\{\int_{t-\tau}^{t}|h_2(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h_1(s)+h_2(s-\tau)|\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}[|a(s)+b(s)|]\mathrm{d}s+\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\int_{t-\tau}^{t}|h_2(v)|\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\right\}\leqslant\beta;$$

则系统(18)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时, $\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 8　定理 1 也可以用来研究一个非线性系统零解的均方渐近稳定性, 显然文献 [4,10,16] 都不能得到其稳定性结论.

例 2　考虑如下微分动力系统:

$$\mathrm{d}x(t)=-\frac{1}{5+3t}x(t-0.4t)\mathrm{d}t-\frac{1}{7.5+3t}x(t-0.6t)\mathrm{d}t,\qquad t\geqslant 0. \tag{19}$$

下证系统(19)满足定理 1 的所有条件, 所以系统(19)的零解是均方渐近稳定的.

证明　如果在定理 1 中, 令$h_1(t)=h_2(t)=1/(3+3t)$, 显然有$h(t)=2/(3+3t)$, 且当$t\geqslant 0$时,

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{g_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s=\int_{0.4t}^{t}\frac{1}{3+3s}\mathrm{d}s+\int_{0.6t}^{t}\frac{1}{3+3s}\mathrm{d}s=$$
$$\frac{1}{3}\left(\ln\frac{3+3t}{3+6t/5}+\ln\frac{3+3t}{3+9t/5}\right)\leqslant\frac{2}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 3=0.475\,705,$$
$$\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{2}\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(v)|\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{2}{3+3\mu}\mathrm{d}\mu}\times\frac{2}{3+3s}\times 0.475\,705\mathrm{d}s\leqslant 0.475\,705,$$
$$\sum_{i=1}^{2}\left|(h_i(s-\tau_i(s)))(1-\tau_i'(s))+b_i(s)\right|=\left|\frac{1}{3+9s/5}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{5+3s}+\frac{1}{3+6s/5}\times\frac{2}{5}-\frac{1}{7.5+3s}\right|=0.$$

令$\alpha=0.475\,705+0.475\,705=0.951\,411<1$, 则由定理 1 的条件可知, 系统(19)的零解是均方渐近稳定的.

注 9　由下面分析可知, 系统(19)不满足定理 D 的条件, 即由定理 D 不能得到系统(19)零解的均方渐近稳定性. 所以, 定理 1 一定程度上改进了文献 [4] 的结论.

因为, $b_1(t)=\dfrac{1}{5+3t}$, $b_2(t)=\dfrac{1}{7.5+3t}$, $t-2t/5$和$t-3t/5$的反函数分别为 $5t/3$和 $5t/2$, 则 $b_1(g_1(t))=\dfrac{1}{5+5t}$, $b_2(g_2(t))=\dfrac{1}{7.5+7.5t}$, 且$|Q(t)|=\dfrac{1}{3+3t}$. 当$t\to\infty$时,

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}|b_i(g_i(s))|\mathrm{d}s=\int_{0.4t}^{t}\frac{1}{5+5s}\mathrm{d}s+\int_{0.6t}^{t}\frac{1}{7.5+7.5s}\mathrm{d}s\to$$
$$\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{5}\ln 2-\frac{2}{15}\ln 3=0.251\,368,$$
$$\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|Q(s)|\int_{s-\tau_i(s)}^{s}|b_i(g_i(\mu))|\mathrm{d}\mu\mathrm{d}s\to$$
$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{1}{3+3\mu}\mathrm{d}\mu}\frac{1}{3+3s}\times 0.251\,368\mathrm{d}s\to 0.251\,368,$$
$$\sum_{i=1}^{2}|b_i(s)|\left|\tau_i'(s)\right|=0.4\times\frac{1}{5+3s}+0.6\times\frac{1}{7.5+3s}=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5+3s}+\frac{3}{7.5+3s}\right)\to$$
$$\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3+3s}+\frac{3}{3+3s}\right)=\frac{1}{3+3s}.$$

所以, $\sum_{i=1}^{2}\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t Q(\mu)\mathrm{d}\mu}|b_i(s)|\left|\tau_i'(s)\right|\mathrm{d}s\to\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{1}{3+3\mu}\mathrm{d}\mu}\frac{1}{3+3s}\mathrm{d}s=1.$

由上面的证明得出, 在定理 D 中, $\alpha=0.251\,368+0.251\,368+1=1.502\,736$, 不满足定理 D 的条件 (ii).

例 3　考虑如下中立型随机积分微分动力系统:

$$\mathrm{d}\left(x(t)-\frac{x(t-0.5t)}{1\,000}\right)=\left(-\frac{1}{16+16t}x(t-0.5t)-\frac{3\sin t+4}{48+48t}x(t-0.25t)\right)\mathrm{d}t+$$
$$\left(\frac{x(t)}{12\sqrt{3+4t}}-\frac{x(t-\sin t)}{6\sqrt{3+4t}}\right)\mathrm{d}\omega(t),\qquad t\geqslant 0. \tag{20}$$

由改进后的定理 E′知, 系统(20)的零解均方渐近稳定.

证明 易知,

$$b_1(s)=-\frac{1}{16+16s},\ b_2(s)=-\frac{3\sin s+4}{48+48s},\ q(s)=\frac{x(s-0.5s)}{1\,000},\ \tau_1(s)=0.5s\ ,\ \tau_2(s)=0.25s.$$

在定理 E′中,取 $h_1(t)=1/(8+16t),h_2(t)=7/(48+64t)$,则有 $h(t)=\dfrac{1}{8+16t}+\dfrac{7}{48+64t}$,且 $\dfrac{11}{48+64t}\leqslant h(t)\leqslant\dfrac{13}{48+64t}$,当$t\to\infty$时,

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{g_i(t)}^{t}|h_i(s)|\mathrm{d}s=\int_{\frac{t}{2}}^{t}\frac{1}{8+16s}\mathrm{d}s+\int_{\frac{3t}{4}}^{t}\frac{7}{48+64s}\mathrm{d}s\to 0.074\,79,$$

$$\int_0^t|h(s)|\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{2}\int_{g_i(s)}^{s}|h_i(\nu)|\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{11}{48+64\mu}\mathrm{d}\mu}\frac{13}{48+64s}\times 0.074\,79\mathrm{d}s\leqslant 0.088\,39.$$

由题知, $B_1(s)=1/(12\sqrt{3+4s})$, $B_2(s)=1/(6\sqrt{3+4s})$,

$$\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left(\sum_{i=1}^{2}|B_i(s)|\right)^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^t\mathrm{e}^{-2\int_s^t\frac{11}{24+32\mu}\mathrm{d}\mu}\frac{1}{2(24+32s)}\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant 0.213\,20,$$

$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}\left|\sum_{i=1}^{n}(b_i(s)-h(s)q_i(s)+h_i(s-\tau_i(s))(1-\tau_i'(s)))\right|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t\frac{11}{48+64\mu}\mathrm{d}\mu}\left(\frac{0.013}{48+64\mu}+\frac{17}{144+192\mathrm{s}}\right)\mathrm{d}s\leqslant\frac{0.013}{11}+\frac{17}{33}=0.516\,34.$$

令$\alpha=0.001+0.074\,79+0.088\,39+0.213\,20+0.516\,34=0.893\,72<1$,则由定理 E′的条件可知,系统(20)的零解均方渐近稳定.证毕.

注 10 因为,$\alpha=0.001+0.074\,79+0.088\,39+2\times0.213\,20+0.516\,34=1.106\,92>1$,不满足定理 E 的条件 (ii),所以由定理 E 不能得到动力系统(20)零解的均方渐近稳定性.即本文的结果改进并推广了文献 [16] 的结论.

例 4 考虑如下积分微分动力系统:

$$\mathrm{d}x(t)=\left\{-x(t)+\int_{t-\tanh t}^{t}[x(s)+1]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t,\qquad t\geqslant 0. \tag{21}$$

由改进后的定理 A′、B′知,系统(21)的零解均方渐近稳定.

证明 显然,$|[x(t)+1]-[y(t)+1]|=|x(t)-y(t)|$,所以,在定理 E′中,取$h(t)=4$, $N(t)=1$,

$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t 4\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t 4\mathrm{d}\mu}\left(\int_{s-\tanh s}^{s}\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t 4\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t 4\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})\leqslant\frac{1}{2}.$$

令$\alpha=0.5<1$,则由定理 A′、B′的条件可知,系统(21)的零解均方渐近稳定.证毕.

注 11 因为$g(x)=x(t)+1$不是奇函数,不满足定理 A 的条件,所以由定理 A 不能得到动力系统(21)零解的均方渐近稳定性.即定理 A′的结果改进并推广了文献 [2] 的结论.另外,因为$\mu(t)=\tanh t\in(-1,1)$,所以找不到正常数μ_0,使得$\mu(t)=\tanh t\leqslant\mu_0$.定理 B 不能得到动力系统(21)零解的均方渐近稳定性,定理 B′即文章的结果改进并推广了文献 [3] 的结论.

例 5 考虑如下积分微分动力系统:

$$\mathrm{d}x(t)=-a(t)x(t-2\sin t)\mathrm{d}t,\qquad t\geqslant 0. \tag{22}$$

由改进后的定理 D′,可得下面的结论.

假设存在连续函数$h(t):[0,\infty)\to\mathbf{R}$和正常数$\delta\in(0,1)$,满足当$t\geqslant0$时,

(i) $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s>-\infty$;

(ii) $\int_{t-2\sin t}^{t}|h(s)|\mathrm{d}s+\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h(s-2\sin s)(1-2\cos s)|\mathrm{d}s+$
$\int_0^t\mathrm{e}^{-\int_s^t h(\mu)\mathrm{d}\mu}|h(s)|\left(\int_{s-2\sin s}^{s}|h(\mu)|\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}s\leqslant\delta<1$;

则系统(22)的零解均方渐近稳定的充分必要条件是

(iii) 当$t\to\infty$时，$\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\to\infty$.

注 12　因为$t-\kappa(t)=t-2\sin t$不存在反函数，即不满足定理 D 的条件. 所以，定理 D′在一定程度上改进和推广了定理 D 的结果.

3　结　　论

本文采用 Banach 不动点方法讨论了一类复杂非线性中立型多变时滞 Volterra 型随机动力系统零解的均方渐近稳定性，得到了系统零解均方渐近稳定性定理. 文章的创新点有以下几点：

1) 本文研究的是较为复杂的非线性动力系统，补充并推广了不动点方法在研究复杂非线性动力系统方面的理论.

2) 据笔者所知，几乎所有的研究者在利用不动点方法研究常微分系统或随机微分动力系统的解的存在性、周期性或稳定性时，都是通过引入一个函数 $h(s)$ 构造算子来实现的. 本文所采用的方法和他们不同，本文根据多时滞随机动力系统时滞的特点，配对引进了函数来构造算子，方式创新灵活，推广和改进了很多前人研究的结果.

3) 文章创新方法所得结论，改进并推广了很多篇论文的结果，如文献 [2-4,10,16].

致谢　本文作者衷心感谢广州软件学院 2020 年科研团队项目（ST202003）以及 2020 年广州软件学院科学研究、教育教学研究项目（ky202022）对本文的资助.

参考文献（References）：

[1] 李岩汀, 许锡宾, 周世良, 等. 基于径向基函数逼近的非线性动力系统数值求解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(3): 311-318. (LI Yanting, XU Xibin, ZHOU Shiliang, et al. A numerical approximation method for nonlinear dynamic systems based on radial basis functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(3): 311-318.(in Chinese))

[2] BURTON T A. Fixed points and differential equations with asymptotically constant or periodic solution[J]. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2004, **11**: 1-31.

[3] BURTON T A. Fixed points and stability of a nonconvolution equation[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, **132**: 3679-3687.

[4] ZHANG B. Fixed points and stability in differential equations with variable delays[J]. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 2005, **63**(5/7): e233-e242.

[5] BURTON T A. Fixed points, stability, and exact linearization[J]. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 2005, **61**: 857-870.

[6] BURTON T A, FURUMOCHI T. Krasnoselskii's fixed point theorem and stability[J]. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 2002, **49**(4): 445-454.

[7] BURTON T A, ZHANG B. Fixed points and stability of an integral equation: nonuniqueness[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2004, **17**(7): 839-846.

[8] FURUMOCHI T. Stabilities in FDEs by Schauder's theorem[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2005, **63**(5/7): e217-e224.

[9] RAFFOUL Y N. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, **40**(7/8): 691-700.

[10] LUO J W. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **334**(1): 431-440.

[11] 王春生, 李永明. 中立型多变时滞随机微分方程的稳定性[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, **50**(5): 82-87. (WANG Chunsheng, LI Yongming. Stability of neutral stochastic differential equations with some variable delays[J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2015, **50**(5): 82-87.(in Chinese))

[12] 王春生, 李永明. 三类不动点与一类随机动力系统的稳定性[J]. 控制理论与应用, 2017, **34**(5): 677-682. (WANG Chunsheng, LI Yongming. Three kinds of fixed points and stability of stochastic dynamical systems[J]. *Control*

Theory and Applications, 2017, **34**(5): 677-682.(in Chinese))

[13] 王春生, 李永明. Krasnoselskii不动点与中立型多变时滞随机动力系统的指数p稳定性[J]. 应用力学学报, 2019, **36**(4): 901-905, 1000.(WANG Chunsheng, LI Yongming. Krasnoselskii fixed point and exponential p-stability of neutral stochastic dynamic systems with time-varying delays[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2019, **36**(4): 901-905, 1000.(in Chinese))

[14] 王春生. 中立型随机积分微分方程的稳定性[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2011, **24**(1): 81-84.(WANG Chunsheng. The stability of neutral stochastic integrodifferential equations[J]. *Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition)*, 2011, **24**(1): 81-84.(in Chinese))

[15] 王春生. 随机微分方程稳定性的两种不动点方法的比较[J]. 四川理工学院学报(自然科学版), 2012, **25**(4): 87-90.(WANG Chunsheng. Stability of stochastic differential equations: the two fixed points of comparison[J]. *Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition)*, 2012, **25**(4): 87-90.(in Chinese))

[16] WU Meng, HUANG Nanjing, ZHAO Changwen. Fixed points and stability in neutural stochastic differential equations with variable delays[J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, **2008**: 407352.