

# 主动约束阻尼开口柱壳的 NLMS 反馈减振控制\*

黄志丹, 向楠, 苏程

(兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

**摘要:** 为缩减开口柱壳结构的振动, 给出了一种局部主动约束阻尼 (ALCD) 敷设结构, 并结合 Lagrange 方程和 Sanders 薄壳理论构建了压电耦合开口柱壳的动力学模型, 根据推得的系统状态空间形式, 应用归一化最小均方差自适应滤波算法 (NLMS) 和线性二次规划算法 (LQR) 设计了一种自适应反馈控制器, 通过数值仿真研究了控制参数对开口柱壳中点动态特性和控制电压的影响。结果表明: NLMS 反馈控制方法能在不同控制电压频率、滤波阶数和自适应步长下保证对开口柱壳减振的有效性; 增加自适应步长和滤波阶数能进一步提高减振控制的响应速率, 但会导致控制电压超调量增加, 而取较大的滤波阶数和较高频率控制电压可以减小噪声扰动, 增加控制系统的可靠性。

**关键词:** 开口柱壳; 减振控制; NLMS 算法; 主动约束阻尼

**中图分类号:** TB535; TH113 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410312

## NLMS Feedback Vibration Control of Open Cylindrical Shells With Active Constrained Layer Damping

HUANG Zhidan, XIANG Nan, SU Cheng

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University,  
Lanzhou 730070, P.R.China)

**Abstract:** A novel partial active constrained layer damping (ACLCD) structure was proposed to reduce the vibration of thin-walled open cylindrical shells. Based on the Sanders thin-shell theory and the Lagrange equation, the dynamic model for open cylindrical shells with the partial ACLCD structure was established. According to the system state space form, an adaptive feedback controller was developed based on the normalized least mean square (NLMS) adaptive filter algorithm and the linear quadratic programming algorithm (LQR) to study the effects of control parameters on the open cylindrical shell midpoint dynamic characteristics and the control voltage. The numerical results demonstrate that, the NLMS feedback control method can ensure the effectiveness of the vibration attenuation of the open cylindrical shell under different control voltage frequencies, different filter orders and different adaptive step sizes. Increasing the adaptive step size and the filtering order can effectively improve the damping decrement but raise the control voltage overshoot, while increasing the filtering order and the frequency control voltage can reduce noise and disturbance to obtain better damping effects.

\* 收稿日期: 2020-10-15; 修订日期: 2020-11-24

基金项目: 国家自然科学基金 (11672121)

作者简介: 黄志丹 (1977—), 女, 讲师 (通讯作者。E-mail: huangzd@mail.lzjtu.cn)。

引用格式: 黄志丹, 向楠, 苏程. 主动约束阻尼开口柱壳的 NLMS 反馈减振控制 [J]. 应用数学和力学, 2021, 42 (7): 686-695.

**Key words:** open cylindrical shell; vibration control; NLMS algorithm; active constrained layer damping

## 引 言

约束阻尼 (CLD) 柱壳结构具有良好的减振降噪功能,广泛应用于航天、船舶、汽车等工业生产领域,但由于其壁厚较薄,受变载荷作用易引发壁板颤振。而主动约束阻尼可根据不同工况改变压电层激励电压,增加阻尼层的能量耗散能力,有效缩减柱壳的振动,因此针对柱壳主动减振控制研究具有重要的工程价值。

主动约束阻尼柱壳由于其可通过实时改变压电层变形而增加结构阻尼,已受到广泛关注。很多学者对其准确求解进行了研究,Arefi 等<sup>[1]</sup>采用 Navier 法对压电层合柱壳的动态非线性方程进行了离散求解,研究了不同材料参数和几何参数对圆柱特性振动的影响。Li 等<sup>[2]</sup>基于 Reddy 分层位移理论,利用 Hamilton 原理和变分方法建立了压电层合柱壳的有限元模型,通过对筒支压电层合柱壳的静力学和自由振动分析验证了其有效性。Rostami 等<sup>[3]</sup>采用摄动法分析压电层合柱壳的非线性频率与振动幅值之间的关系,研究了各参数对圆柱壳稳定性的影响。Liu 等<sup>[4]</sup>利用三维弹性理论对基于多尺度边界有限元方法建立的压电层合柱壳模型进行了快速、精确求解。

为了实现对主动约束柱壳的有效减振,一些不同的控制策略和优化算法也被应用到柱壳的主动减振中。Loghmani 等<sup>[5]</sup>设计了一种改进的高次谐波控制器来减小第一阶模态辐射声功率。Biglar 等<sup>[6]</sup>根据模态的可控性和可观性,利用遗传算法对速度负反馈控制的压电层敷设位置进行了优化。陆静等<sup>[7]</sup>分析了速度反馈控制的反馈系数、反馈点的布置等参数对控制特性的影响。Loghmani 等<sup>[8]</sup>设计了宽频带多输入多输出线性二次 Gauss 控制器,证明了该控制器可有效地抑制柱壳振动。Roohollah 等<sup>[9]</sup>利用新型滑模控制法建立了压电柱壳的鲁棒控制器,并利用遗传算法对控制激励位置进行了优化,从而降低了控制电压。安方等<sup>[10]</sup>联合应用 ABAQUS-MATLAB 优化分析了水下柱壳在 0~600 Hz 范围内压电作动器敷设位置,并验证了其有效性。Dong 等<sup>[11]</sup>分析了一种恒速反馈控制算法控制增益对系统的阻尼和惯性的影响。为了避免控制的误差扰动,提升振动控制的准确性, NLMS 算法也被应用到振动控制中。Radek 等<sup>[12]</sup>研究了 NLMS 在并联型有源电力滤波器控制应用领域的有效性。朱晓锦等<sup>[13]</sup>利用反余切滤波  $x$  变步长最小均方差算法对压电柔性悬臂梁振动进行了主动控制。Lorente 等<sup>[14]</sup>采用带正交修正因子的 NLMS 算法,获得了更大的收敛速度。

目前针对开口柱壳的主动约束阻尼减振研究还比较少,而且一些减振控制方法仍然需要进一步深入研究。本文根据 Sanders 薄壳理论,确立了开口薄壁柱壳的位移和应力场关系,并利用 Lagrange 方程建立了压电耦合开口柱壳的动力学模型。为了有效减小开口柱壳的振动,避免 NLMS 算法收敛速度慢的缺点<sup>[14]</sup>,将 NLMS 算法和 LQR 控制相结合设计了一种自适应主动减振控制器,分析不同控制参数对开口柱壳频域特性和时域特性的影响。

## 1 理论模型

局部约束阻尼开口柱壳结构如图 1 所示,主要由基层、黏弹性层和压电约束层组成,图中  $R, l$  和  $h_c$  分别表示基层的中性面半径、长度和厚度; $l_v, h_v$  和  $\alpha_v$  分别是黏弹性层的长度、厚度为和敷设角,黏弹性层沿轴向和周向均匀相间布置;约束层厚度为  $h_p, \alpha_p$  表示约束层敷设角;设柱坐标系原点在基层的中面上,其中  $x$  为柱壳的轴向, $y$  表示柱壳的周向, $z$  为柱壳的径向,下标  $c$  表示基层, $v$  表示黏弹性层, $p$  表示约束层。

### 1.1 应变-位移关系

假定各层之间理想黏接,无相对滑动,采用 Sanders 壳体理论表示应力和位移之间的关系,此时位移场可以表示为

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_0(x, y, z) + z\boldsymbol{\beta}_x(x, y, t), \quad (1a)$$

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0(x, y, z) + z\boldsymbol{\beta}_y(x, y, t), \quad (1b)$$

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = \mathbf{w}_0(x, y, z), \quad (1c)$$

其中  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  是复合圆柱壳在  $x, y, z$  方向的位移矢量, $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0$  是基层中性面  $z = R$  上点在  $x, y, z$  方向上的位

移矢量,  $\beta_x, \beta_y$  是绕  $y, x$  轴的转角矢量,  $z$  为位移变换矩阵, 其具体形式可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_c \quad u_v \quad u_p]^T, \quad \mathbf{v} = [v_c \quad v_v \quad v_p]^T, \quad \mathbf{w} = [w_c \quad w_v \quad w_p]^T, \\ \mathbf{u}_0 &= [u_{0c} \quad u_{0v} \quad u_{0p}]^T, \quad \mathbf{v}_0 = [v_{0c} \quad v_{0v} \quad v_{0p}]^T, \quad \mathbf{w}_0 = [w_{0c} \quad w_{0v} \quad w_{0p}]^T, \\ \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ h_c/2 & z - h_c/2 & 0 \\ h_c/2 & h_c/2 + h_v & z - h_c/2 - h_v \end{bmatrix}, \quad \beta_x = [\theta_x \quad \phi_x \quad \gamma_x]^T, \quad \beta_y = [\theta_y \quad \phi_y \quad \gamma_y]^T, \end{aligned}$$

其中  $\theta_y, \phi_y, \gamma_y$  和  $\theta_x, \phi_x, \gamma_x$  分别表示基壳、阻尼层、约束层绕  $x$  轴和  $y$  轴的扭转角, 其扭转变形关系如图 2 所示。

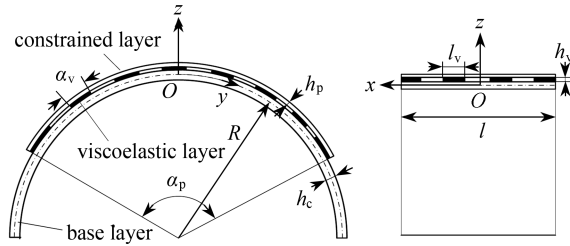


图 1 局部约束阻尼开口柱壳模型

Fig. 1 The model for the open cylindrical shell with local constrained layer damping

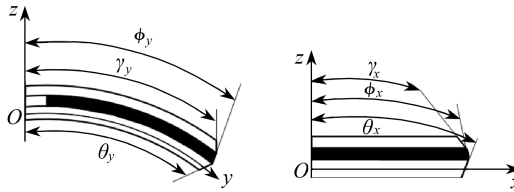


图 2 各层扭转变形

Fig. 2 The torsional deformation of each layer

由于柱壳厚度与半径之比  $h/R \ll 1/20$ , 因此  $z$  方向的应变相对于  $x$  和  $y$  方向可忽略不计, 则柱壳上任意点的应变可由正应变  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$  和剪切应变  $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$  组成. 根据 Galerkin 法和 Sanders 壳体理论, 将式(1)代入应变-位移关系, 可以将各层的位移和应变表示为

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{q}_s, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{n}_i \mathbf{q}_s, \tag{3}$$

式中  $\mathbf{U}$  是位移矢量,  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  为应变,  $\Phi$  是形函数矩阵,  $\mathbf{n}_i$  和  $\mathbf{q}_s$  分别是结构应变变换矩阵和坐标系, 下标  $i = c, v, p$ , 它们具体形式如下:

$$\mathbf{n}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_u}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial \Phi_{\theta_x}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_v}{\partial y} & \frac{\Phi_w}{R} & 0 & z \frac{\partial \Phi_{\theta_y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_u}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_v}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial \Phi_{\theta_x}}{\partial y} & z \frac{\partial \Phi_{\theta_y}}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} & \Phi_{\theta_x} & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi_v}{R} & \frac{\partial \Phi_w}{\partial y} & 0 & \Phi_{\theta_y} \end{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 6},$$

$$n_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_u}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_x}}{\partial x} & 0 & \widehat{c} \frac{\partial \Phi_{\phi_x}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_v}{\partial y} & \frac{\Phi_w}{R} & 0 & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_y}}{\partial y} & 0 & \widehat{c} \frac{\partial \Phi_{\phi_y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_u}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_v}{\partial x} & 0 & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_x}}{\partial y} & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_y}}{\partial x} & \widehat{c} \frac{\partial \Phi_{\phi_x}}{\partial y} & \widehat{c} \frac{\partial \Phi_{\phi_y}}{\partial x} & \mathbf{0}_{5 \times 4} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} & 0 & 0 & \Phi_{\theta_x} & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi_v}{R} & \frac{\partial \Phi_w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\theta_y} \end{bmatrix},$$

$$n_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_u}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_x}}{\partial x} & 0 & h_v \frac{\partial \Phi_{\phi_x}}{\partial x} & 0 & \left(z - \frac{h_c}{2} - h_v\right) \frac{\partial \Phi_{\gamma_x}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_v}{\partial y} & \frac{\Phi_w}{R} & 0 & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_y}}{\partial y} & 0 & h_v \frac{\partial \Phi_{\phi_y}}{\partial y} & 0 & \left(z - \frac{h_c}{2} - h_v\right) \frac{\partial \Phi_{\gamma_y}}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_u}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_v}{\partial x} & 0 & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_x}}{\partial y} & \frac{h_c}{2} \frac{\partial \Phi_{\theta_y}}{\partial x} & h_v \frac{\partial \Phi_{\phi_x}}{\partial y} & h_v \frac{\partial \Phi_{\phi_y}}{\partial x} & \left(z - \frac{h_c}{2} - h_v\right) \frac{\partial \Phi_{\gamma_x}}{\partial y} & \left(z - \frac{h_c}{2} - h_v\right) \frac{\partial \Phi_{\gamma_y}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\gamma_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Phi_v}{R} & \frac{\partial \Phi_w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\gamma_y} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = [u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \varphi_p \quad \varphi_o]^T,$$

$$q_s = [q_u \quad q_v \quad q_w \quad q_{\theta_x} \quad q_{\theta_y} \quad q_{\phi_x} \quad q_{\phi_y} \quad q_{\gamma_x} \quad q_{\gamma_y} \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\varepsilon_i = [\varepsilon_{xx}^i \quad \varepsilon_{yy}^i \quad \varepsilon_{xy}^i \quad \varepsilon_{xz}^i \quad \varepsilon_{yz}^i]^T,$$

$$\Phi = \text{diag}[\Phi_u \quad \Phi_v \quad \Phi_w \quad \Phi_{\theta_x} \quad \Phi_{\theta_y} \quad \Phi_{\phi_x} \quad \Phi_{\phi_y} \quad \Phi_{\gamma_x} \quad \Phi_{\gamma_y} \quad \Phi_p \quad \Phi_o],$$

其中  $\mathbf{0}$  为零矩阵,  $\widehat{c} = z - h_c/2$ .

### 1.2 本构关系

根据应力-应变关系,则各层的应力可分别表示为

$$\sigma_i = [\sigma_{i,x} \quad \sigma_{i,y} \quad \sigma_{i,xy} \quad \sigma_{i,xz} \quad \sigma_{i,yz}]^T = Q_i \varepsilon_i, \tag{4}$$

其中  $Q_i$  是刚度矩阵,可以表示为

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^i & Q_{22}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}^i \end{bmatrix}. \tag{5}$$

本文忽略各层纤维角的影响,  $i$  层的材料常数  $Q_{ij}$  的具体形式可根据文献[15]确定.

由于压电层存在压电耦合效应,其本构方程可以表示为

$$\sigma_p = Q_p \varepsilon_p - eE, \quad D = e^T \varepsilon_p + \xi E, \tag{6}$$

其中  $E$  是电场矢量,  $D$  为电位移矢量,  $e$  为压电常数矩阵,  $\xi$  表示介电常数矩阵.

电势可表示成余弦和线性变化的组合<sup>[16]</sup>, 根据 Maxwell 方程, 电势  $\tilde{\varphi}$  可写成

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = -\cos(\beta z_p) \varphi_p(x, y, t) + 2 \frac{z_p}{h_p} \varphi_0(t), \quad (7)$$

其中  $\beta = \pi/h_p$ ,  $z_p = z - h_c/2 - h_v$ ,  $\varphi_0(t)$  为外加激励电压,  $\varphi_p(x, y, t)$  为电势, 则压电层的电场  $\mathbf{E}$  和电势  $\tilde{\varphi}$  的关系可以表示为

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \mathbf{Y} = [x \quad y/R \quad z]^T. \quad (8)$$

同理可将电场表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}_e \mathbf{q}_e, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{n}_e$  和  $\mathbf{q}_e$  分别是电场变换矩阵和电场坐标系, 它们可表示为

$$\mathbf{n}_e = \begin{bmatrix} \cos(\beta z_p) \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} & 0 \\ \frac{\cos(\beta z_p)}{R} \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} & 0 \\ -\beta \sin(\beta z_p) \Phi_p & -\frac{2\Phi_0}{h_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_e = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad q_p \quad q_0]^T.$$

### 1.3 边界条件

根据文献[5], 可以将柱壳的弯曲应力  $\mathbf{M}$  和膜应力  $\mathbf{N}$  向量表示为

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{J}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{B}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (10)$$

本文对于基层柱壳的周向两端采用简支边界条件, 根据简支边界条件, 当  $y = 90^\circ$  和  $y = -90^\circ$  时,  $u = w = N_y^c = M_y^c = 0$ ; 当  $x = 0$  和  $x = l$  时,  $v = w = N_x^c = M_x^c = 0$ ; 压电约束层和阻尼层的自由边界为  $M_x^i = M_y^i = N_x^i = N_y^i = 0$ , 其中  $i = p, v$ .

### 1.4 动力学方程

由于主动约束阻尼柱壳各层厚度较小, 扭转变形对其动态特性影响不大, 因此本文忽略各层绕  $x$  和  $y$  轴的转动, 此时耦合结构的动能  $T$  可表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_c} \rho_c (\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}}) dV_c + \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p (\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}}) dV_p + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_v} \int_{V_{vi}} \rho_v (\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}}) dV_v, \quad (11)$$

其中变换阵  $\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}[\mathbf{1}_{1 \times 3} \quad \mathbf{0}_{1 \times 8}]$ .

根据式(3)、(4)和(6)可以将系统的总势能  $U$  表示为

$$U = \frac{1}{2} \left[ \int_{V_c} \mathbf{q}^T \mathbf{n}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{n}_c \mathbf{q} dV_c + \sum_{i=1}^{N_v} \int_{V_{vi}} H^*(x_i, y_i) \mathbf{q}^T \mathbf{n}_{vi}^T \mathbf{Q}_v \mathbf{n}_{vi} \mathbf{q} dV_{vi} + \int_{V_p} \mathbf{q}^T (\mathbf{n}_p^T \mathbf{Q}_p \mathbf{n}_p - \mathbf{n}_p^T \mathbf{e} \mathbf{n}_e - \mathbf{n}_e^T \mathbf{e}^T \mathbf{n}_p - \mathbf{n}_e^T \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{n}_e) \mathbf{q} dV_p \right], \quad (12)$$

其中  $H^*(x_i, y_i)$  为第  $i$  个黏弹性贴片的位置辨识函数:

$$H^*(x_i, y_i) = [H(x - x_{i2}) - H(x - x_{i1})] \cdot [H(y - y_{i2}) - H(y - y_{i1})], \quad (13)$$

其中  $H$  为 Heaviside 函数,  $x_{i2}, x_{i1}$  和  $y_{i2}, y_{i1}$  分别为第  $i$  个黏弹性层贴片在  $x$  和  $y$  轴的上下限.

将方程(11)和(12)代入 Lagrange 方程, 整理后可得系统的动力学方程为

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{K}_n \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_d + \mathbf{B}_n \mathbf{f}_c, \quad (14)$$

式中  $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_s, \mathbf{K}_n = \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_{pe} \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_{ep}, \mathbf{B}_n = \mathbf{K}_{pe} \mathbf{K}_e^{-1}, \mathbf{M}_s = \mathbf{M}_{sc} + \mathbf{M}_{sv} + \mathbf{M}_{sp}$ , 其中  $\mathbf{M}_{sc}, \mathbf{M}_{sv}$  和  $\mathbf{M}_{sp}$  分别为各层质量子矩阵;  $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{sc} + \mathbf{K}_{sv} + \mathbf{K}_{sp}$ , 其中  $\mathbf{K}_{sc}, \mathbf{K}_{sv}$  和  $\mathbf{K}_{sp}$  代表各层刚度子矩阵,  $\mathbf{K}_{pe}, \mathbf{K}_e$  和  $\mathbf{K}_{ep}$  代表系统的刚度子矩阵,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_e, \mathbf{f}_d$  和  $\mathbf{f}_c$  分别为外加载荷与电场载荷. 各矩阵和矢量的具体形式为

$$\mathbf{M}_{sc} = \int_{V_c} \rho_c \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Phi} dV_c, \quad \mathbf{M}_{sp} = \int_{V_p} \rho_p \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Phi} dV_p, \quad \mathbf{M}_{sv} = \sum_{i=1}^{N_v} \int_{V_{vi}} H^*(x_i, y_i) \rho_v \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Phi} dV_v,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{sc} &= \int_{V_c} \mathbf{n}_c^T \mathbf{Q}_c \mathbf{n}_c dV_c, \mathbf{K}_{ep} = \int_{V_p} \mathbf{n}_e^T \mathbf{e}^T \mathbf{n}_p dV_p, \mathbf{K}_{sp} = \int_{V_p} \mathbf{n}_p^T \mathbf{Q}_p \mathbf{n}_p dV_p, \\ \mathbf{K}_{sv} &= \sum_{i=1}^{N_v} \int_{V_{vi}} H^*(x_i, y_i) \mathbf{n}_v^T \mathbf{Q}_v \mathbf{n}_v dV_{vi}, \mathbf{K}_{pe} = \int_{V_p} \mathbf{n}_p^T \mathbf{e} \mathbf{n}_e dV_p, \mathbf{K}_e = \int_{V_p} \mathbf{n}_e^T \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{n}_e dV_p, \\ \mathbf{f}_d &= [f_x \ f_y \ f_z \ t_{c_x} \ t_{c_y} \ t_{v_x} \ t_{v_y} \ t_{p_x} \ t_{p_y} \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{f}_c &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_c \ 0]^T, \end{aligned}$$

其中  $f_j (j = x, y, z)$  为  $j$  向作用力,  $t_{ik}$  表示第  $i$  层绕  $k$  轴的转矩,  $k = x, y, v_c$  是激励电压。

定义  $\mathbf{x}(t)$  为状态向量,  $\mathbf{y}(t)$  为输出向量, 将系统方程(14)写成如下状态空间形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_c + \mathbf{B}_d\mathbf{f}_d, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{B}_d$  和  $\mathbf{C}$  分别代表系统矩阵、电场力矩阵、机械力矩阵和系统输出矩阵, 它们分别为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_s \end{bmatrix}, \mathbf{y}(t) = \mathbf{q}_s, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{K}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_n^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{B}_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T. \quad (16)$$

## 2 激励电压对振动特性的影响

对于如图 1 所示结构, 基层半径  $R = 0.2$  m, 轴向长度  $l = 0.6$  m, 基层厚度  $h_c = 2$  mm; 敷设的压电层轴向长度与基层一致, 周向相对基层对称布置, 其厚度  $h_p = 1$  mm, 敷设角  $\alpha_p = 80^\circ$ ; 黏弹性层均匀相间分布于基层与压电层之间, 定义占空比  $\chi = A_v N_v / (\alpha_p l) = 0.56$ , 表征黏弹性层在约束阻尼结构中的有效面积, 其中  $A_v = \alpha_p l_v$ , 总分段数  $N_v = m_v n_v$ , 其中轴向分段数  $m_v = 11$ , 周向分段数  $n_v = 15$ , 黏弹性层厚度  $h_v = 1$  mm. 各层材料属性分别由表 1 给出。

表 1 各层材料属性

Table 1 The material properties of each layer

material	parameter	value	parameter	value
base layer	$E_c / \text{GPa}$	68	$\rho_c / (\text{kg}/\text{m}^3)$	2 800
	$v_c$	0.32		
viscoelastic layer	$E_v / \text{GPa}$	0.08	$\rho_v / (\text{kg}/\text{m}^3)$	1 270
	$v_v$	0.45	$\eta_v$	0.4
piezoelectric layer	$c_{11} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$1.32 \times 10^{11}$	$c_{66} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$3 \times 10^{10}$
	$c_{12} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$7.1 \times 10^{10}$	$c_{23} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$7.3 \times 10^{10}$
	$c_{13} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$7.3 \times 10^{10}$	$c_{55} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$2.6 \times 10^{10}$
	$c_{44} / (\text{N}/\text{m}^2)$	$2.6 \times 10^{10}$	$\rho_p / (\text{kg}/\text{m}^3)$	7 500
	$e_{31} / (\text{C}/\text{m}^2)$	-4.1	$\xi_{11}$	804.6
	$e_{33} / (\text{C}/\text{m}^2)$	14.4	$\xi_{22}$	804.6
	$e_{15} / (\text{C}/\text{m}^2)$	10.5	$\xi_{33}$	659.7

在柱壳中点  $k_0 = (l/2, 0, h_c/2)$  处沿  $z$  方向施加幅值为 10 N 的谐波力  $f_d$ , 则  $k_0$  点的频域特性如图 3 所示。由图 3(a) 可以看出, 由于合理施加激励电压可有效增加特定模态应变能, 使系统幅值有效缩减, 如当激励电压  $v_c = 80$  V 时, 第二阶模态的中点径向幅值最小; 同时可以看出, 由于压电层与基层的耦合作用, 会导致柱壳的模式频率增大。但从图 3(b) 可以看出, 由于压电层受激励电压后沿周向伸缩变形导致基壳周向变形较大, 因此相对于被动约束阻尼具有更大的幅值。图 3(c) 表明, 合理的施加  $v_c$  也可以使耦合柱壳中点的轴向振幅有效缩减, 图中当  $v_c = 40$  V 时轴向振幅较小, 较大的  $v_c$  会导致轴向振幅大幅增加。通过分析可以看出, 由于约束层的压电和逆压电效应, 施加不同激励电压不能同时缩减柱壳各个方向的振动, 但由于周向和轴向幅值远小于柱壳的径向幅值, 因此取  $v_c = 80$  V 时能够更加有效地缩减柱壳径向振动, 而且第二阶模态在  $x, y$  和  $z$  三个方向均具有较大幅值, 因此后续主要针对柱壳第二阶模态的径向振动进行减振控制。

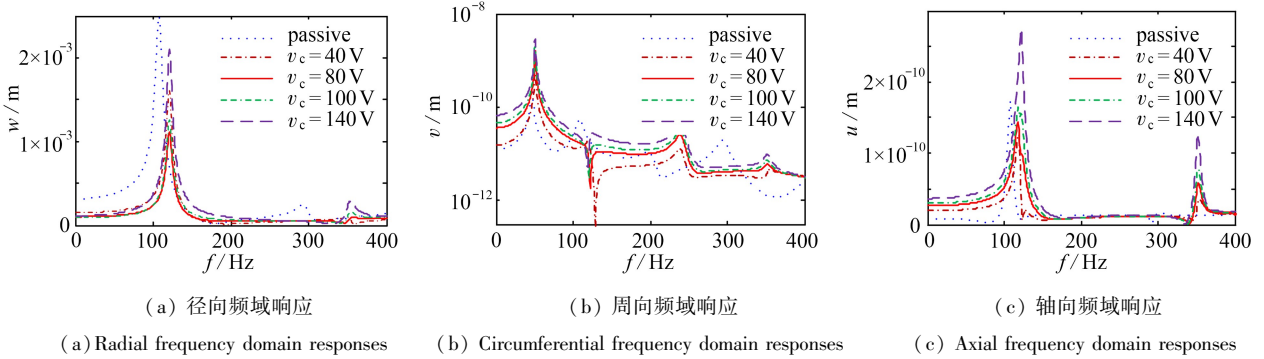


图3 不同激励电压下柱壳中点的频域特性

Fig. 3 Frequency domain characteristics of the cylinder shell midpoint under different excitation voltages

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

### 3 NLMS 自适应反馈滤波算法

为了利用压电耦合作用有效缩减开口柱壳振动,本文将 LQR 控制与 NLMS 相结合,设计一个基于 NLMS 算法的自适应反馈滤波控制器,其系统原理如图 4 所示。

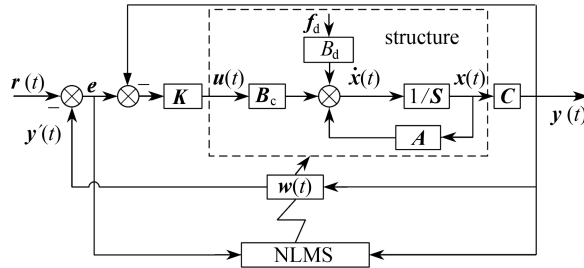


图4 NLMS 自适应反馈控制原理图

Fig. 4 The schematic diagram for the NLMS feedback control method

首先利用 LQR 控制调整状态反馈控制器  $K_c$ ,使目标函数  $J$  最小,获取状态反馈的最优控制规律.根据柱壳结构的状态空间方程,定义如下的二次型性能指标函数:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_x \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_c^T(t) \mathbf{R} \mathbf{f}_c(t)] dt, \quad (17)$$

其中  $\mathbf{R}$  为正定的输入权系数矩阵, $\mathbf{Q}_x$  为状态变量矩阵,是半正定的.若系统状态可测,且可以反馈给控制器,则方程(17)最优控制输入为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}_c = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}(t), \quad (18)$$

式中  $\mathbf{K}_c = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_c^T \mathbf{P}$  为最优反馈增益矩阵, $\mathbf{P}$  值通过求解 Riccati 方程得到

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}_x - \mathbf{P} \mathbf{B}_c \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_c^T \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (19)$$

为了更加有效实现开口柱壳的减振控制,本文基于 NLMS 自适应滤波算法,使滤波器输出信号与期望输出信号之间的均方误差最小,从而得到最佳控制输入补偿  $y'(t)$ :

$$y'(t) = \sum_{i=0}^N w_i(t) y(t-i) = \mathbf{w}^T \mathbf{y}(t), \quad (20)$$

其中  $N$  为 FIR 横向滤波器阶数,权值  $\mathbf{w}(t) = [w_0(t) \ w_1(t) \ \cdots \ w_N(t)]^T$  决定了滤波器的传递特性。

在图 4 中, $y'(t)$  辅助调控系统控制输入  $\mathbf{u}(t)$ , $r(t)$  为结构的目标信号, $\mathbf{e}(t) = r(t) - y'(t)$  为结构的响应误差信号.通过评价  $\mathbf{e}(t)$  的最小均方误差,采用最速下降法调整权值向量  $\mathbf{w}(t)$ ,为了降低计算量,采用瞬态误差的平方近似代替均方误差,并对步长进行归一化处理,可得 NLMS 算法的权值为

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) - \frac{2\mu}{\alpha + \mathbf{y}(t)^T \mathbf{y}(t)} \mathbf{e}(t) \mathbf{y}(t), \quad (21)$$

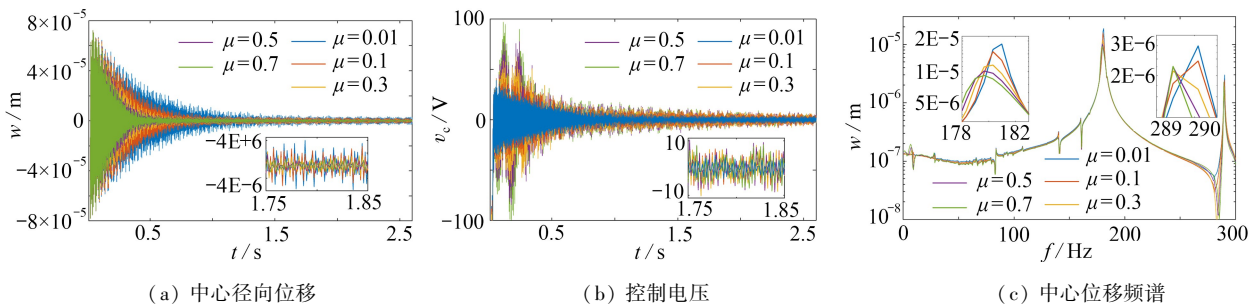
其中收敛因子  $\mu$  直接影响控制系统的稳定性和收敛速率,  $0 < \mu < 1, \alpha > 0$  为预设校正量,避免分母为零。

## 4 减振控制结果分析

在柱壳中点处沿  $z$  方向施加幅值为 10 N 的谐波扰动  $f_d$ ,作用 0.008 s 后撤除,为了使柱壳振动快速减小,取压电减振控制器的输出权值  $Q = 10^6, R = 10^{-5}$ 。施加初始激励电压频率  $F_c = 85$  Hz,自适应步长  $\mu = 0.5$ ,滤波器阶数  $N = 8$ ,后续仿真分析中未作说明,所有参数与初始参数保持一致。

### 4.1 自适应步长 $\mu$ 的影响

图 5 为自适应步长  $\mu$  对系统减振控制特性的影响。由图 5(a)可以看出,当自适应步长  $\mu$  不断增大时,开口柱壳中点的径向位移收敛速度逐渐加快,如当  $\mu = 0.7$  时在 0.6 s 时已经接近稳定值,且此时稳态幅值最小,而  $\mu = 0.01$  时在 1.5 s 后才可以达到稳定状态,这与文献[17]结论一致。图 5(b)表明,控制电压随  $\mu$  增加收敛速度加快,但  $\mu$  越大电压超调量也越大,如  $\mu = 0.7$  时最大的控制电压幅值能够达到了 100 V,此时稳态控制电压值也较大,因此会增加控制难度。在图 5(c)中可以看出,  $\mu$  越大中点在 179 Hz 和 289.4 Hz 附近的峰值越小。因此在压电层许可电压范围下,增加自适应步长在一定程度上提升减振的有效性。



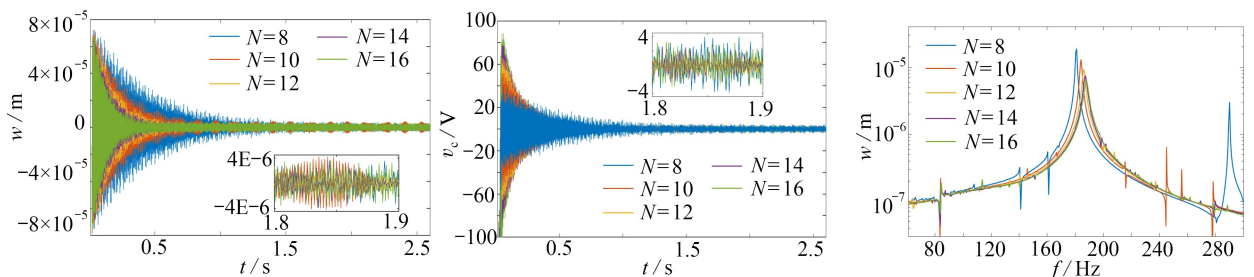
(a) The radial displacement of the midpoint (b) The control voltage (c) The midpoint displacement spectrum

图 5  $\mu$  对控制系统动态特性的影响

Fig. 5 The influence of adaptive step size  $\mu$  on the dynamic characteristics of the control system

### 4.2 滤波器阶数 $N$ 的影响

滤波阶数  $N$  对减振控制的影响如图 6 所示。由图 6(a)可见,随着滤波阶数  $N$  的增加,开口柱壳径向幅值的收敛速率逐渐增大,但  $N$  增大到一定值后位移的收敛速率基本趋于稳定;而较小的  $N$  会使柱壳中点位移减缓缓慢,降低主动减振效率。在图 6(b)中,控制电压的收敛速率也随  $N$  的增加变快,而  $N$  增大使得控制电压的最大幅值也随之增加。图 6(c)表明,增加  $N$  能够使噪声扰动对系统的影响减小,而且较大的  $N$  可以使控制系统的峰值频率更加接近耦合柱壳的第二阶模态固有频率 186.4 Hz,使系统更加有效地减小中点径向振动幅值。



(a) The radial displacement of the midpoint (b) The control voltage (c) The midpoint displacement spectrum

图 6 滤波阶数  $N$  对控制系统动态特性的影响

Fig. 6 The influence of filter order  $N$  on the dynamic characteristics of the control system

### 4.3 控制电压频率 $F_c$ 的影响

图 7 为控制电压频率  $F_c$  对开口柱壳减振特性的影响。图 7(a)表明,选取不同的  $F_c$  时,控制算法都可以



保证减振的可靠性,但柱壳中点位移收敛速度不同,而且稳态的幅值也不同,图中  $F_c = 135 \text{ Hz}$  时减振控制效果最好。对比图 7(a)和图 7(b)可以看出,当图 7(a)中中点位移收敛较快时,对应的控制电压的最大值也较大,而采用较高频率的控制电压时可以缩减控制电压最大幅值。由图 7(c)可知,虽然高频控制电压不一定能够使柱壳中点径向幅值减小最多,但是能够有效避免噪声扰动对控制系统的影响。

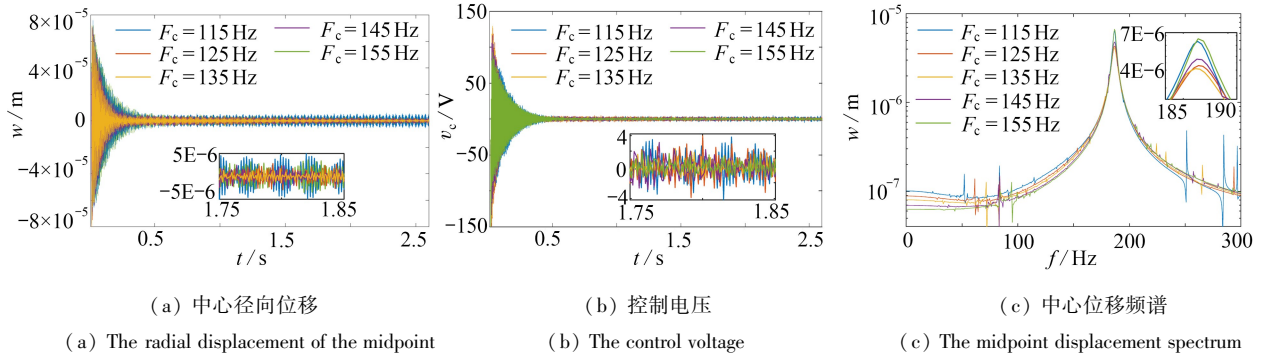


图 7 控制电压频率  $F_c$  对控制系统动态特性的影响

Fig. 7 The influence of control voltage frequency  $F_c$  on the dynamic characteristics of the control system

## 5 结 论

本文结合薄壳理论和能量法构建了开口柱壳的压电耦合减振模型,并综合利用 LQR 和 NLMS 方法对柱壳径向振动进行了减振控制,分析了各控制参数对减振效果的影响,结果表明:

- 1) NLMS 反馈控制方法可以有效地控制开口柱壳的振动幅值,并能在不同控制电压频率、滤波阶数和自适应步长下保证对开口柱壳振动的缩减。
- 2) 增加自适应步长和滤波阶数均能有效提高减振控制的响应速率,但会导致控制电压的超调量变大,在一定程度上增加控制难度。
- 3) 采用合理的控制电压频率可有效缩减柱壳振动,较高频率的控制电压和较大滤波阶数能够有效减小噪声扰动,提升控制系统的可靠性。

**致谢** 本文作者衷心感谢兰州交通大学-天津大学联合创新基金(2020053)对本文的资助。

## 参考文献(References):

- [1] AREFI M, KARROUBI R, IRANI-RAHAGHI M. Free vibration analysis of functionally graded laminated sandwich cylindrical shells integrated with piezoelectric layer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2016, **37**(7): 821-834.
- [2] LI W, SHEN H J. A layerwise finite element formulation of laminated composite cylindrical shells with piezoelectric layers [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, **32**(2): 731-741.
- [3] ROSTAMI R, MOHAMMADIMEHR M, RAHAGHI M I. Dynamic stability and nonlinear vibration of rotating sandwich cylindrical shell with considering FG core integrated with sensor and actuator[J]. *Steel and Composite Structures*, 2019, **32**(2): 225-237.
- [4] LIU J, YE W B, ZANG Q S, et al. Deformation of laminated and sandwich cylindrical shell with covered or embedded piezoelectric layers under compression and electrical loading [J]. *Composite Structures*, 2020, **240**: 112041. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112041.
- [5] LOGHMANI A, DANESH M, KWAK M K, et al. Active control of radiated sound power of a smart cylindrical shell based on radiation modes[J]. *Applied Acoustics*, 2016, **114**: 218-229.
- [6] BIGLAR M, MIRDAMADI H R. Configuration optimization of piezoelectric patches attached to functionally graded shear-deformable cylindrical shells considering spillover effects [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2016, **27**(3): 295-313.

- [7] 陆静,袁丽芸. 敷设主动约束层阻尼圆锥壳的控制特性分析[J]. 振动与冲击, 2016, **35**(9): 141-146. (LU Jing, YUAN Liyun. Control characteristics of a conical shell covered with active constrained layer damping[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, **35**(9): 141-146. (in Chinese))
- [8] LOGHMANI A, DANESH M, KWAK M K, et al. Vibration suppression of a piezo-equipped cylindrical shell in a broad-band frequency domain[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, **411**: 260-277.
- [9] ROOHOLLAH T, HAMED D G, MOHAMADREZA Z, et al. A robust optimum controller for suppressing radiated sound from an intelligent cylinder based on sliding mode method considering piezoelectric uncertainties [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2019, **30**(20): 3066-3079.
- [10] 安方,张万良,段勇,等. 水下压电智能结构振动控制中传感器/作动器位置优化[J]. 船舶力学, 2019, **23**(4): 488-496. (AN Fang, ZHANG Wanliang, DUAN Yong, et al. Optimal placement of sensor and actuators for vibration control of underwater cylinder bonded with macro fiber composite[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2019, **23**(4): 488-496.
- [11] DONG Y H, LI Y H, LI X Y, et al. Active control of dynamic behaviors of graded graphene reinforced cylindrical shells with piezoelectric actuator/sensor layers[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, **82**: 252-270.
- [12] RADEK M, JAROSLAV R, RENE J, et al. Least mean squares and recursive least squares algorithms for total harmonic distortion reduction using shunt active power filter control[J]. *Energies*, 2019, **12**(8): 1-26.
- [13] 朱晓锦,方昱斌,胡佳明,等. 压电柔性梁振动变步长 Fx-LMS 控制算法分析与验证[J]. 振动、测试与诊断, 2020, **40**(2): 215-221. (ZHU Xiaojin, FANG Yubin, HU Jiaming, et al. Analysis and verification of Fx-LMS vibration control with variable step size for piezoelectric flexible beam[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2020, **40**(2): 215-221. (in Chinese))
- [14] LORENTE J, FERRER M, DE GONZALEZ A. The frequency partitioned block modified filtered-x NLMS with orthogonal correction factors for multichannel active noise control[J]. *Digital Signal Processing*, 2015, **43**: 47-58.
- [15] CAO X, SHI L, ZHANG X, et al. Active control of acoustic radiation from laminated cylindrical shells integrated with a piezoelectric layer[J]. *Smart Material Structures*, 2013, **22**(6): 065003. DOI: 10.1088/0964-1726/22/6/065003.
- [16] BODAGHI M, SHAKERI M. An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads[J]. *Composite Structures*, 2012, **94**(5): 1721-1735.
- [17] 宋腾,韩邦成,郑世强,等. 基于最小位移的磁悬浮转子变极性 LMS 反馈不平衡补偿[J]. 振动与冲击, 2015, **34**(7): 24-32. (SONG Teng, HAN Bangcheng, ZHENG Shiqiang, et al. Variable polarity LMS feedback based on displacement nulling to compensate unbalance of magnetic bearing[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**(7): 24-32. (in Chinese))