ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887 http://www.applmathmech.cn

一类具有变号位势 Kirchhoff 型方程解的存在性*

雷 俊, 索洪敏, 彭林艳, 吴德科, 蒙 璐

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵阳 550025)

摘要: 该文研究了一类带有变号位势非线性项的 Kirchhoff 型方程的 Neumann 边值问题.利用变分方法,首先对空间进行分解,证明了该问题的能量泛函满足山路结构;然后证明了能量泛函的(PS)序列有强收敛的子列;最后通过 Ekeland 变分原理和山路引理,获得了该问题两个非平凡解的存在性.

关 键 词: Kirchhoff 型方程; Neumann 边值; 山路引理; 变号位势

中图分类号: O176.3 **文献标志码:** A DOI:10.21656/1000-0887.410283

Existence of Solutions for a Class of Kirchhoff Type Equations With Sign-Changing Potential

LEI Jun, SUO Hongmin, PENG Linyan, WU Deke, MENG Lu

(*School of Data Science and Information Engineering*, *Guizhou Minzu University*, *Guiyang* 550025, *P.R.China*)

Abstract: The Neumann boundary value problem about a class of Kirchhoff type equations with sign-changing potential terms was studied. By means of the variational method and the decomposition process for the underlying space, the energy functional was proved to satisfy the mountain pass geometry. Then, the energy functional (PS) sequence was proved to have a strongly convergent subsequence. Finally, the existence of two nontrivial solutions was obtained by Ekeland's variational principle and the mountain pass lemma.

Key words: Kirchhoff type equation; Neumann boundary value; mountain pass lemma; sign-changing potential

1 引言和主要结果

考虑如下 Neumann 边界条件的 Kirchhoff 型方程:

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = Q(x)|u|^{p-2}u+\lambda\dfrac{|u|^{q-2}u}{|x|^\beta}, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v}=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset R^3$ 是具有光滑边界的有界域且包括原点, $a>0, b\geqslant 0, 1<q<2, 4<p<6, 0\leqslant\beta<(6-q)/2$,

* **收稿日期:** 2020-09-17; **修订日期:** 2021-03-12
基金项目: 国家自然科学基金(11661021;11861021)
作者简介: 雷俊(1995—),男,硕士生(E-mail: 1769819417@qq.com);
索洪敏(1965—),男,教授(通讯作者. E-mail: 11394861@qq.com).
引用格式: 雷俊, 索洪敏, 彭林艳, 吴德科, 蒙璐. 一类具有变号位势 Kirchhoff 型方程解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(8): 859-865.

$\lambda > 0$ 是一个参数.假设 $Q(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上变号连续函数,满足 $Q^+ \neq 0, Q^- \neq 0$ 和 $\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x < 0$.空间 $L^s(\Omega)(1 \leqslant s < +\infty)$ 的范数记为 $\|u\|_s^s = \int_\Omega |u|^s \mathrm{d}x$.记 $C_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 为正常数,

$$S = \inf_{u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x\right)^{1/3}}$$

是 H^1 嵌入 $L^6(\Omega)$ 的最佳 Sobolev 嵌入常数.

问题(1)源于下列 Kirchhoff 型方程的研究:

$$\begin{cases} -\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

方程(2)作为经典的 d'Alembert 弹性弦自由振动波动方程的推广,该模型考虑的是横向振动引起的弦长的变化.且方程(2)含有 $\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$, 使得方程不再逐点成立,称该类问题为非局部问题.关于方程(2)更详细的物理背景可参考文献[1].

近年来,方程(2)在 Dirichlet 边界条件下有了大量的研究,其中在文献[2]中考虑了含变号位势的凹凸非线性 Kirchhoff 型方程,在一些假设条件下,通过 Nehari 流形得到了两个正解的存在性.文献[3]考虑了方程(2)非线性项含临界和次线性情形,通过 Nehari 流形得到了一个正的基态解和多重正解的存在性,关于方程(2)在 Dirichlet 边界条件下更多的研究结果可参考文献[4-6].关于方程(2)在 Neumann 边界条件下的研究,文献[7]中,Zhang 研究了非线性项含临界和次线性的 Kirchhoff 型方程,在不同假设条件下,通过变分法和集中紧性原理,证明了该问题多个正解的存在性.文献[8]考虑了一类不具有 AR 条件 Kirchhoff 型方程的 Neumann 问题,通过喷泉定理,得到了无穷多个高能量解的存在性.在 Neumann 边界条件下 Kirchhoff 型方程的研究还可参考文献[9-10].文献[11]考虑了非线性椭圆型边值问题解的存在性.特别地,文献[12]考虑了如下含凹扰动项的半线性椭圆方程临界 Neumann 问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = Q(x)|u|^{2^*-2}u + \lambda f(x,u), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset R^N$ 是光滑边界的有界域, $2^* = 2N/(N-2)(N \geqslant 3)$ 是 Sobolev 临界指数, $Q(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上变号连续函数,且 $\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x < 0$.在 $f(x,u)$ 的适当假设条件下,通过变分方法得到了两个非平凡解的存在性.受文献[12]的启发,我们将其相关结果推广至 Kirchhoff 型方程.本文的主要结果如下:

定义方程(1)对应的能量泛函为

$$I_\lambda(u) = \frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega Q(x)|u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x, \tag{3}$$

显然,泛函 $I_\lambda(u)$ 是可微的.若存在 $u \in H^1(\Omega)$, 对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$, 都有

$$\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega Q(x)|u|^{p-2}u\varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|u|^{q-2}u}{|x|^\beta}\varphi \mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

则称 u 是方程(1)的弱解.

定理 1　假设 $0 \leqslant \beta < (6-q)/2$ 和 $Q(x)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上变号连续函数,则存在 $\Lambda_0 > 0$, 使得对任意 $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, 问题(1)至少存在两个非平凡解.

2　主要引理

对 $H^1(\Omega)$ 做空间分解: $H^1(\Omega) = V \oplus \mathbf{R}, u = v + t, \forall t \in \mathbf{R}$, 其中 $V = \left\{v \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega v\mathrm{d}x = 0\right\}$.空间

$H^1(\Omega)$ 的范数为 $\|u\|^2=\int_\Omega(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x$，本文引用文献[13]中等价范数记为 $\|u\|^2=\|\nabla v\|_2^2+t^2$.从文献[12-13]，$V$ 连续嵌入到 $L^p(\Omega)$ 有下列的引理.

引理 1　假设存在实数 $\eta>0$，使得对任意的 $v\in V,t\in\mathbf{R}$，有 $\|\nabla v\|_2\leqslant\eta|t|$，则

$$\int_\Omega Q(x)|v(x)+t|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{|t|^p}{2}\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

证明　事实上,通过反证法,假设对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，存在 $v_n\in V,t_n\in\mathbf{R}$，使得 $\|\nabla v_n\|_2\leqslant|t_n|/n$，有

$$\int_\Omega Q(x)|v_n+t_n|^p\mathrm{d}x>\frac{|t_n|^p}{2}\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

由上述不等式推出 $\|\nabla v_nt_n^{-1}\|_2\leqslant 1/n$，令 $w_n=v_nt_n^{-1}$，当 $n\to\infty$ 时,可得 $\nabla w_n\to 0$ 在 $L^2(\Omega)$.根据 V 连续嵌入到 $L^p(\Omega)$，有 Sobolev 不等式 $\|w_n\|_p\leqslant C_1\|\nabla w_n\|_2$，当 $n\to\infty$ 时,可得 $w_n\to 0$ 在 $L^p(\Omega)$.通过不等式(6)两边同时除以 $|t_n|^p$ 并取极限,当 $n\to\infty$ 时,由 Lebesgue 控制收敛定理,我们获得 $\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.这与 $\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x<0$ 矛盾,故假设不成立.

引理 2　设存在实数 $r,\rho,\Lambda_0>0$，使得对任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_0)$，泛函 $I_\lambda(u)$ 满足下列条件:

(i) $I_\lambda|_{\|u\|=\rho}\geqslant r>0$，$\inf_{\|u\|\leqslant\rho}I_\lambda<0$；

(ii) 若存在 $e\in H^1(\Omega)$ 使得 $\|e\|>\rho$，有 $I_\lambda(e)<0$.

证明　(i) 设 $\rho^2=\|u\|^2=\|\nabla v\|_2^2+t^2$，存在实数 $\eta>0$，考虑下列两种情况：$\|\nabla v\|_2\leqslant\eta|t|$ 和 $\|\nabla v\|_2>\eta|t|$.如果 $\|\nabla v\|_2\leqslant\eta|t|$ 和 $\rho^2=\|\nabla v\|_2^2+t^2$，则有 $t^2\geqslant\rho^2/(1+\eta^2)$.通过引理 1,我们有下列不等式:

$$\int_\Omega Q(x)|v(x)+t|^p\mathrm{d}x\leqslant-|t|^p\alpha,$$

其中 $\alpha=-(1/2)\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x>0$.设 R_0 为一个正常数,使得 $\Omega\subset B(0,R_0)=\{x\in R^3||x|<R_0\}$.根据 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{|u|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x&\leqslant\left(\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\right)^{q/6}\left(\int_\Omega\frac{1}{|x|^{6\beta/(6-q)}}\mathrm{d}x\right)^{(6-q)/6}\leqslant\\&S^{-q/2}\|u\|^q\left(\int_{B(0,R_0)}\frac{1}{|x|^{6\beta/(6-q)}}\mathrm{d}x\right)^{(6-q)/6}\leqslant\\&S^{-q/2}\|u\|^q\left(4\pi\int_0^{R_0}r^{(2(6-q)-6\beta)/(6-q)}\mathrm{d}r\right)^{(6-q)/6}=\\&S^{-q/2}\|u\|^qT^{(6-q)/6},\end{aligned}\tag{7}$$

其中　$T=\dfrac{4\pi(6-q)}{3(6-q)-6\beta}R_0^{(3(6-q)-6\beta)/(6-q)}$.

由上述不等式,我们有对泛函 $I_\lambda(u)$ 的估计:

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&=\frac{a}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{b}{4}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2-\frac{1}{p}\int_\Omega Q(x)|u|^p\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_\Omega\frac{|u|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x\geqslant\\&\frac{\alpha}{p}|t|^p-\frac{\lambda}{q}\left(\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\right)^{q/6}\left(\int_\Omega\frac{1}{|x|^{6\beta/(6-q)}}\mathrm{d}x\right)^{(6-q)/6}\geqslant\\&\frac{\alpha\rho^p}{p(1+\eta^2)^{p/2}}-\frac{\lambda}{q}S^{-q/2}\|u\|^qT^{(6-q)/6}.\end{aligned}$$

如果 $\|\nabla v\|_2>\eta|t|$ 和 $\|u\|^2=\|\nabla v\|_2^2+t^2$，我们可得 $\|u\|\leqslant\|\nabla v\|_2(1+1/\eta^2)^{1/2}$.根据 Sobolev 不等式,存在常数 $C>0$，有

$$\left|\int_\Omega Q(x)|u|^p\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|u\|^p\leqslant C\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{p/2}\|\nabla v\|_2^p.$$

因此,取充分小的 $\|u\| = \rho$, 我们有

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) \geqslant{}& \frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{b}{4}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{C}{p}\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{p/2} \|\nabla v\|_2^p - \\
& \frac{\lambda}{q}\left(\int_\Omega |u|^6 \mathrm{d}x\right)^{q/6}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{6\beta/(6-q)}}\mathrm{d}x\right)^{(6-q)/6} \geqslant \\
& \frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x - \frac{C}{p}\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{p/2} \|\nabla v\|_2^p - \frac{\lambda}{q} S^{-q/2} \|u\|^q T^{(6-q)/6} \geqslant \\
& \frac{a}{4}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda}{q} S^{-q/2}\|u\|^q T^{(6-q)/6}.
\end{aligned}
$$

由于 $\rho \leqslant \|\nabla v\|_2 (1+1/\eta^2)^{1/2}$, 推出 $\|\nabla v\|_2 \geqslant \eta\rho/(1+\eta^2)^{1/2}$, 则有下列对泛函 $I_\lambda(u)$ 的估计:

$$
I_\lambda(u) \geqslant \frac{a\rho^2\eta^2}{4(1+\eta^2)} - \frac{\lambda}{q} S^{-q/2}\|u\|^q T^{(6-q)/6}.
$$

取

$$
k = \min\left\{\frac{\alpha\rho^p}{p(1+\eta^2)^{p/2}}, \frac{a\rho^2\eta^2}{4(1+\eta^2)}\right\},
$$

根据上面的讨论可得 $I_\lambda(u) \geqslant k - (\lambda/q)S^{-q/2}\|u\|^q T^{(6-q)/6}$.选取适当小的 $\Lambda_0 > 0$, 对任意的 $0 < \lambda < \Lambda_0$, 当 $\|u\| = \rho$ 时,可得 $I_\lambda(u) \geqslant r > 0$.而对任意的 $u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}$ 和 $t > 0$, 都有

$$
\lim_{t\to 0} \frac{I_\lambda(tu)}{t^q} = -\frac{\lambda}{q}\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x < 0,
$$

则对充分小的 t, 我们获得 $I_\lambda(tu) < 0$, 使得 $m = \inf_{\|u\|\leqslant\rho} I_\lambda(u) < 0$.

(ii) 设 $v \in H^1(\Omega)$ 使得 $\sup pv \subset \{x \in \Omega \mid Q(x) > 0\}$, $v \neq 0$, 则对任意的 $t > 0$ 且充分大时,有

$$
I_\lambda(tv) = \frac{at^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}x + \frac{bt^4}{4}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{t^p}{p}\int_\Omega Q(x)|v|^p\mathrm{d}x - \frac{\lambda t^q}{q}\int_\Omega \frac{|v|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x < 0,
$$

选取适当的 $t_0 > 0$, 使得当 $\|e\| = \|t_0 v\| > \rho$ 时,得到 $I_\lambda(e) < 0$.

引理 3 假设 $4 < p < 6$, $1 < q < 2$ 和 $\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x < 0$, 则对任意的 $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, 泛函 $I_\lambda(u)$ 满足(PS)条件.

证明 设对任意的 $c \in \mathbf{R}$, $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ 是泛函 I_λ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列,即

$$
I_\lambda(u_n) \to c,\ I'_\lambda(u_n) \to 0 \quad \text{in} \quad H^{-1}(\Omega). \tag{8}
$$

首先证明 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有界,采用反证法,假设 $\|u_n\| \to \infty$.令 $v_n = u_n/\|u_n\|$, 对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $\|v_n\| = 1$, 则存在 $v \in H^1(\Omega)$,使得 v_n 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛到 v,在 $L^s(\Omega)$ $(1 \leqslant s < 6)$ 中强收敛到 v.通过式(8)有

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x + \frac{b\|u_n\|^2}{4}\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{\|u_n\|^{p-2}}{p}\int_\Omega Q(x)|v_n|^p\mathrm{d}x - \\
&\quad \frac{\lambda\|u_n\|^{q-2}}{q}\int_\Omega \frac{|v_n|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x = o(1),
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&a\int_\Omega |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x + b\|u_n\|^2\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \|u_n\|^{p-2}\int_\Omega Q(x)|v_n|^p\mathrm{d}x - \\
&\quad \lambda\|u_n\|^{q-2}\int_\Omega \frac{|v_n|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x = o(1).
\end{aligned} \tag{10}
$$

当 $n \to \infty$ 时,等式(9)和(10)的左边第四项趋于零.因此,有下列等式:

$$
\frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x + \frac{b\|u_n\|^2}{4}\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2 - \frac{\|u_n\|^{p-2}}{p}\int_\Omega Q(x)|v_n|^p\mathrm{d}x = o(1),
$$

$$a\int_{\Omega}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x+b\|u_n\|^2\left(\int_{\Omega}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\|u_n\|^{p-2}\int_{\Omega}Q(x)|v_n|^p\mathrm{d}x=o(1).$$

由以上两式推出,当 $n\to\infty$ 时,可得 $\int_{\Omega}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\to 0$ 和 $\|u_n\|^{p-2}\int_{\Omega}Q(x)|v_n|^p\mathrm{d}x\to 0$.令

$$\bar{v}=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}v\mathrm{d}x,\tilde{v}=v-\bar{v}.$$

设特征值问题:

$$\begin{cases}-\Delta v=\mu v, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中特征值为 $0=\mu_*<\mu_1<\mu_2<\cdots$, 则有 $\int_{\Omega}|\nabla\tilde{v}|^2\mathrm{d}x\geqslant\mu_1\int_{\Omega}\tilde{v}^2\mathrm{d}x$.于是根据

$$\int_{\Omega}|\nabla\tilde{v}_n|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\geqslant\mu_1\int_{\Omega}\tilde{v}_n^2\mathrm{d}x$$

及 $\int_{\Omega}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\to 0$, 推出 $\int_{\Omega}\tilde{v}_n^2\mathrm{d}x\to 0$.由于 $v_n\to v$ 在 $L^2(\Omega)$, 可得 $\tilde{v}_n\to\tilde{v}$ 在 $L^2(\Omega)$, 从而 $\int_{\Omega}\tilde{v}_n^2\mathrm{d}x\to\int_{\Omega}\tilde{v}^2\mathrm{d}x=0$, 因此 $v=\bar{v}=l$(常数)及 $\int_{\Omega}Q(x)|l|^p\mathrm{d}x=0$.由 $\int_{\Omega}Q(x)\mathrm{d}x<0$, 当 $n\to\infty$ 时,得到 $v_n\to 0$ 在 $H^1(\Omega)$, 这与 $\|v_n\|=1$ 矛盾.故 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 上有界,因此 $\{u_n\}$ 存在一个子列,不妨仍用 $\{u_n\}$ 来表示,存在 $u\in H^1(\Omega)$, 当 $n\to\infty$ 时,使得

$$\begin{cases}u_n\xrightarrow{\text{weak convergence}}u, & \text{in}\quad H^1(\Omega),\\ u_n\xrightarrow{\text{strong convergence}}u, & \text{in}\quad L^s(\Omega),\ 1\leqslant s<6,\\ u_n(x)\to u(x), & \text{a.e. } x\in\Omega.\end{cases}\tag{11}$$

现在我们证明 $u_n\to u$ 在 $H^1(\Omega)$, 从式(8)和(11)知存在 $\varphi=u_n-u\in H^1(\Omega)$, 有

$$\langle I'_\lambda(u_n),u_n-u\rangle=\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\Omega}\langle\nabla u_n,\nabla(u_n-u)\rangle\mathrm{d}x-$$

$$\int_{\Omega}Q(x)|u_n|^{p-2}u_n(u_n-u)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}\frac{|u_n|^{q-2}u_n(u_n-u)}{|x|^\beta}\mathrm{d}x=o(1),$$

对上式两边同时取极限得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\Omega}\langle\nabla u_n,\nabla(u_n-u)\rangle\mathrm{d}x=0.$$

由于 u_n 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛到 u, 且 $a+b\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x>0$, 我们推出 $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$, 则有 $\nabla u_n\to\nabla u$ 在 $L^2(\Omega)$, 故可得 $u_n\to u$ 在 $H^1(\Omega)$.

3　问题(1)第一个解的存在性

定理 2　假设 $0<\lambda<\Lambda_0$ 和 $0\leqslant\beta<(6-q)/2$, 问题(1)存在一个非平凡解 u_λ 使得 $I_\lambda(u_\lambda)<0$.

证明　根据引理 2(i),有 $m=\inf_{\|u\|\leqslant\rho}I_\lambda(u)<0$.由 Ekeland 变分原理[14]知,存在极小化序列 $\{u_n\}\subset\overline{B_\rho(0)}$, 使得

$$I_\lambda(u_n)\leqslant\inf_{u\in\overline{B_\rho(0)}}I_\lambda(u)+\frac{1}{n},\ I_\lambda(v)\geqslant I_\lambda(u_n)-\frac{1}{n}\|v-u_n\|,\qquad v\in\overline{B_\rho(0)}.$$

因此,可得 $I_\lambda(u_n)\to m,I'_\lambda(u_n)\to 0$ 在 $H^{-1}(\Omega)$.由于 $\{u_n\}$ 是有界序列,且 $\overline{B_\rho(0)}$ 是闭凸集,我们可以假设 $\{u_n\}$ 存在一个子列,不妨仍用 $\{u_n\}$ 来表示,即存在 $u_\lambda\in\overline{B_\rho(0)}\subset H^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{\text{weak convergence}} u_\lambda, & \text{in} \quad H^1(\Omega), \\ u_n \xrightarrow{\text{strong convergence}} u_\lambda, & \text{in} \quad L^s(\Omega),\ 1 \leqslant s < 6, \\ u_n(x) \to u_\lambda(x), & \text{a.e. } x \in \Omega, \\ \forall n \in \mathbf{N}_+, \exists z \in L^s(\Omega) \to |u_n(x)| \leqslant z(x), & \text{a.e. } x \in \Omega. \end{cases}$$

通过式(7)和 Lebesgue 控制收敛定理,对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$, 当 $n \to \infty$ 时,都有

$$\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{|u_\lambda|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x,\ \int_\Omega \frac{|u_n|^{q-2}u_n}{|x|^\beta}\varphi\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{|u_\lambda|^{q-2}u_\lambda}{|x|^\beta}\varphi\mathrm{d}x.$$

由引理 3 知 u_n 在 $H^1(\Omega)$ 中强收敛到 u_λ, 从而 $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$, 得

$$\begin{aligned} m \geqslant &\liminf_{n\to\infty}\left[I_\lambda(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right] = \\ &\liminf_{n\to\infty}\left[a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2 + \right. \\ &\left.\lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x\right] \geqslant \\ &a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x + b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x\right)^2 + \lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\int_\Omega \frac{|u_\lambda|^q}{|x|^\beta}\mathrm{d}x = \\ &I_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{p}\langle I'_\lambda(u_\lambda), u_\lambda\rangle = I_\lambda(u_\lambda) \geqslant m. \end{aligned}$$

因此,有 $m = I_\lambda(u_\lambda) < 0$, 那么对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$ 满足

$$\left(a + b\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2\mathrm{d}x\right)\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla\varphi\mathrm{d}x - \int_\Omega Q(x)|u_\lambda|^{p-2}u_\lambda\varphi\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{|u_\lambda|^{q-2}u_\lambda}{|x|^\beta}\varphi\mathrm{d}x = 0,$$

则 u_λ 是方程(1)的一个弱解.注意 $I_\lambda(u_n) = I_\lambda(|u_n|)$, 可假设 $u_\lambda \geqslant 0$ 和 $u_\lambda \neq 0$, 故 u_λ 是问题(1)的一个非平凡解.

4 问题(1)第二个解的存在性

定理 3 假设 $0 < \lambda < \Lambda_0$ 和 $0 \leqslant \beta < (6 - q)/2$, 则问题(1)存在一个非平凡解 u_* 满足 $I_\lambda(u_*) > 0$.

证明 通过引理 2、引理 3,泛函 I_λ 满足山路引理条件[15].故存在一个子序列 $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$, 当 $n \to \infty$ 时,使得

$$I_\lambda(u_n) \to c > 0,\ I'_\lambda(u_n) \to 0 \quad \text{in} \quad H^{-1}(\Omega). \tag{12}$$

令 Γ 是 $H^1(\Omega)$ 中联结 0 与 e 道路的集合,即

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

定义 I_λ 的山路水平值为

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)).$$

根据引理 3,序列 $\{u_n\}$ 存在一个收敛子序列,不妨仍用 $\{u_n\}$ 来表示,当 $n \to \infty$ 时,有 $u_n \to u_*$ 在 $H^1(\Omega)$.

由引理 2 可得 $I_\lambda(u_*) = \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c > r > 0$,则推出 $u_* \neq 0$.即 u_* 是问题(1)的第二个非平凡解.

5 结 论

本文研究了一类含变号位势 Kirchhoff 型方程的 Neumann 问题,主要通过变分方法和空间分解的技巧,获得了方程多重非平凡解的存在性.利用引理 1 的不等式和引理 2 证明了能量泛函具有山路结构,引理 3 证明了泛函的(PS)序列有强收敛的子列.定理 2 利用 Ekeland 变分原理获得了问题(1)存在一个非平凡的极小解.定理 3 由山路引理条件获得了问题(1)存在一个非平凡的山路解.推广了文献[12]的相关结果.

参考文献(References)：

[1] KIRCHHOFF G. *Mechanik*[M]. Leipzig：Teubner，1883.

[2] XIE W H，CHEN H B. Multiple positive solutions for the critical Kirchhoff type problems involving sign-changing weight functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Application*，2019，**479**(1)：135-161.

[3] CAO X F，XU J X. Multiple solutions for Kirchhoff type problems involving super-linear and sub-linear terms [J]. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*，2015，**16**：1-14.

[4] SHEN L J，YAO X H. Multiple positive solutions for a class of Kirchhoff type problems involving general critical growth[R/OL]. 2016. (2016-07-07)[2021-03-12]. https://arxiv.org/pdf/1607.01923.pdf.

[5] CHEN C Y，KUO Y C，WU T F. The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions[J]. *Journal of Differential Equations*，2011，**250**(4)：1876-1908.

[6] LIAO J F，LI H Y，ZHANG P. Existence and multiplicity of solutions for a nonlocal problem with critical Sobolev exponent[J]. *Computers & Mathematics With Applications*，2018，**75**(3)：787-797.

[7] ZHANG J. The critical Neumann problem of Kirchhoff type[J]. *Applied Mathematics and Computation*，2106，**274**(1)：519-530.

[8] 胡爱莲. Kirchhoff 方程 Neumann 问题的无穷多解[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版)，2019，**33**(9)：223-228.(HU Ailian. Infinitely many solutions for Neumann problem of Kirchhoff equation[J]. *Journal of Chongqing University of Technology*(*Natural Science*)，2019，**33**(9)：223-228.(in Chinese))

[9] AN Y C，SUO H M. Existence of solutions for the Neumann boundary problem of Kirchhoff type equations[J]. *Journal of Spectral Theory*，2018，**9**(2)：547-568.

[10] 郝娅楠，黄永艳. 带有 Neumann 边界的 Kirchhoff 问题无穷多径向解的存在性[J]. 云南民族大学学报(自然科学版)，2018，**27**(3)：212-215.(HAO Yanan，HUANG Yongyan. Existence of infinitely many radial solutions to a Kirchhoff equation with Neumann boundary conditions[J]. *Journal of Yunnan University of Nationalities*(*Natural Sciences Edition*)，2018，**27**(3)：212-215.(in Chinese))

[11] 邵荣，牛欣，沈祖和. 非线性椭圆型边值问题解的存在性[J]. 应用数学和力学，2003，**24**(1)：89-97.(SHAO Rong，NIU Xin，SHEN Zuhe. Existence of solutions for nonlinear elliptic boundary value problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2003，**24**(1)：89-97.(in Chinese))

[12] CHABROWSKI J. The critical Neumann problem for semilinear elliptic equations with concave perturbations[J]. *Ricerche di Matematica*，2007，**56**(2)：297-319.

[13] BERESTYCKI H，CAPUZZO-DOLCETTA I，NIRENBERG L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems[J]. *NoDEA：Nonlinear Differential Equations and Applications*，1995，**2**(4)：553-572.

[14] EKELAND I. On the variational principle[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*，1974，**47**(2)：324-353.

[15] AMBROSETTI A，RABINOWITZ P H. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. *Journal of Functional Analysis*，1973，**14**(4)：349-381.