

# 一类 Lotka-Volterra 竞争模型的最小波速\*

张亚菲, 周音波

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

**摘要:** 研究了一类带有单稳非线性项的三物种竞争系统行波解最小波速的速度选择. 首先利用比较方法, 通过构造适当的上下解, 建立了最小波速的速度选择机制. 然后证明了物种的竞争系数关于速度选择的阈值结果, 并得到了阈值的估计. 最后借助数值模拟说明所得结果推广了已有文献的相关工作.

**关键词:** Lotka-Volterra 竞争系统; 最小波速; 速度选择; 行波解

**中图分类号:** O175.26      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.410279

## The Minimal Wave Speed of a Lotka-Volterra Competition Model

ZHANG Yafei, ZHOU Yinbo

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University,  
Xi'an 710071, P.R.China)

**Abstract:** The minimal wave speed selection for the traveling waves of a 3-species competition system with monostable nonlinearity was considered. First, a comparison method was used to establish minimal-speed selection mechanisms through construction of subtle upper and lower solutions. Then, the speed selection about the threshold values of competition coefficients and the estimations were obtained. Finally, some numerical simulations were performed to show that the obtained results extend those in the previous literatures.

**Key words:** Lotka-Volterra competition system; minimal wave speed; speed selection; traveling wave solution

## 引言

研究多物种在种群动力学中的相互作用是生物数学的重要研究问题之一. Lotka-Volterra 竞争系统就是描述这种现象的典型数学模型, 其通常具有以下形式:

$$u_t^i = D_i u_{xx}^i + r_i u^i \left( 1 - \sum_{j=1}^N b_{ij} u^j \right), \quad x, t \in \mathbf{R}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

它描述了  $N$  个物种相互竞争, 其中  $D_i, r_i, b_{ij} > 0$ . 为了研究系统(1)的入侵现象, 自然要研究行波解及相关性质. 本文考虑了系统(1)三个物种 ( $N = 3$ ) 的情况. 更准确地说, 本文研究下列三物种竞争扩散系统:

\* 收稿日期: 2020-09-16; 修订日期: 2020-12-18

基金项目: 国家自然科学基金(11671315)

作者简介: 张亚菲(1996—), 女, 硕士生(通讯作者. E-mail: zhangyafei@stu.xidian.edu.cn);  
周音波(1996—), 女, 硕士生(E-mail: 1136339034@qq.com).

引用格式: 张亚菲, 周音波. 一类 Lotka-Volterra 竞争模型的最小波速[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(6): 575-585.

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + r_1 u(1 - u - b_{12}v), \\ v_t = D_2 v_{xx} + r_2 v(1 - b_{21}u - v - b_{23}w), \\ w_t = D_3 w_{xx} + r_3 w(1 - w - b_{32}v), \end{cases} \quad x, t \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

其中  $D_i > 0, r_i > 0, b_{ij} > 0, u, v, w$  分别表示物种 1, 2, 3 的种群密度,  $b_{ij}$  表示物种  $j$  对物种  $i$  的竞争系数,  $r_i$  是物种  $i$  的增长率,  $D_i$  是物种  $i$  的扩散系数. 通过归一化, 假设每个物种的承载能力为 1. 对于 Lotka-Volterra 竞争系统更多的生物意义可参考文献 [1-6].

显然, 上述系统 (2) 具有平衡点  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  和  $(1, 0, 1)$ . 本文中, 我们假设

$$(A) \quad b_{12}, b_{32} > 1, b_{21} + b_{23} < 1,$$

即物种  $u, w$  相对于物种  $v$  是弱竞争者. 容易得到在假设 (A) 下, 平衡点  $(0, 1, 0)$  和  $(1, 0, 1)$  分别是稳定点和不稳定点, 所以系统 (2) 在假设 (A) 下是单稳系统. 为了探究物种  $v$  最终能否赢得竞争, 自然要研究系统 (2) 连接  $(0, 1, 0)$  和  $(1, 0, 1)$  的行波解. 进一步, 令  $\phi = 1 - u, \psi = v, \theta = 1 - w$ , 系统 (2) 可转化为以下等价合作系统:

$$\begin{cases} \phi_t = D_1 \phi_{xx} + r_1(1 - \phi)(b_{12}\psi - \phi), \\ \psi_t = D_2 \psi_{xx} + r_2\psi(1 - b_{21} - b_{23} - \psi + b_{21}\phi + b_{23}\theta), \\ \theta_t = D_3 \theta_{xx} + r_3(1 - \theta)(b_{32}\psi - \theta). \end{cases} \quad (3)$$

那么  $(0, 1, 0)$  和  $(1, 0, 1)$  分别转化为  $e_1 := (1, 1, 1)$  和  $e_0 := (0, 0, 0)$ . 因此要研究系统 (3) 连接  $e_1$  和  $e_0$  且具有以下特殊形式的行波解:

$$(\phi, \psi, \theta)(x, t) = (U, V, W)(z), \quad z = x - ct, \quad (4)$$

其中  $c > 0$ , 将式 (4) 代入式 (3) 得到

$$\begin{cases} D_1 U'' + cU' + r_1(1 - U)(b_{12}V - U) = 0, \\ D_2 V'' + cV' + r_2V(1 - b_{21} - b_{23} - V + b_{21}U + b_{23}W) = 0, \\ D_3 W'' + cW' + r_3(1 - W)(b_{32}V - W) = 0, \\ (U, V, W)(-\infty) = (1, 1, 1), (U, V, W)(+\infty) = (0, 0, 0). \end{cases} \quad (5)$$

系统 (5) 的第二个方程在点  $(0, 0, 0)$  处线性化, 得到对应的特征方程为

$$\Gamma(\mu) := D_2 \mu^2 - c\mu + r_2(1 - b_{21} - b_{23}) = 0. \quad (6)$$

容易得到当且仅当  $c \geq c_0$  时, 式 (6) 存在正解, 其中

$$c_0 = 2\sqrt{D_2 r_2 (1 - b_{21} - b_{23})}. \quad (7)$$

由文献 [7] 不难得出存在正常数  $c_{\min}$ , 使得当且仅当  $c \geq c_{\min}$  时, 系统 (5) 具有波速为  $c$  的严格单调的行波解. 通常  $c_{\min} \geq c_0$ , 然而系统参数只有在一定范围内才有  $c_{\min} = c_0$ , 否则  $c_{\min} > c_0$ . 它们是否相等是研究生物入侵面临的挑战性问题. 因此, 本文先给出系统 (3) 最小波速的线性选择或非线性选择的定义.

**定义 1** 如果  $c_{\min} = c_0$ , 则系统 (3) 的最小波速是线性选择的; 如果  $c_{\min} > c_0$ , 则系统 (3) 的最小波速是非线性选择的.

对于系统 (1) 两物种 ( $N = 2$ ) 的情形, 即以下 Lotka-Volterra 竞争系统:

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + r_1 u(1 - b_1 u - a_1 v), \\ v_t = d_2 v_{xx} + r_2 v(1 - a_2 u - b_2 v). \end{cases} \quad (8)$$

目前有很多关于速度选择机制的研究, 例如文献 [7-16] 等. 其中, Hosono<sup>[10]</sup> 在数值上证明了可以通过选取适当的系统参数实现最小波速的线性选择或非线性选择. 特别地, Hosono 证明了系统 (8) 的最小波速是线性选择的, 如果系统参数满足

$$d_2 = 0, (a_1 a_2 - 1)r_2 \leq 2(1 - a_1).$$

Weinberger 等<sup>[11]</sup> 研究了具有以下形式的合作系统的线性选择:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_i)_t &= d_i (\mathbf{u}_i)_{xx} + \mathbf{f}_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x), \end{aligned}$$

其中  $d_i \geq 0, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  与  $x$  和  $t$  无关. 他们首次提出最小波速线性选择的严格定义, 并证得当  $\mathbf{f}$  满足

特定条件时,最小波速是线性选择的.Lewis 等<sup>[12]</sup>利用文献[11]研究了最小波速的线性选择并推广了文献[10]中得到的线性选择的条件.由于研究非线性选择较为困难,对于速度选择机制的研究多与线性选择有关.最近对于系统(8)速度选择机制的研究有了一些新进展.Alhasanat 等<sup>[7]</sup>利用上下解方法得到系统(8)最小波速线性选择和非线性选择的条件,他们进一步在文献[8]中研究了系统(8)对应的  $d = 0$  的系统并得到了线性选择和非线性选择的相关结论.Wang 等<sup>[13]</sup>利用文献[7-8]类似的方法研究了系统(8)对应的空间离散系统的速度选择机制.然而,除文献[5]以外,关于三物种竞争-扩散系统的速度选择机制的工作较少,且文献[5]也只给出了系统(2)最小波速线性选择的结果.更具体地说,文献[5]证明了系统(2)最小波速是线性选择的,如果  $(D_j, r_j, b_{j2}) \in B_j^1 \cup B_j^2 (j = 1, 3)$ , 其中

$$\begin{cases} B_j^1 := \{D_j \in (0, 2D_2], b_{j2}(b_{21} + b_{23}) \leq 1, r_j > 0\}, \\ B_j^2 := \left\{D_j \in (0, 2D_2), b_{j2}(b_{21} + b_{23}) > 1, 0 < r_j < \left(2 - \frac{D_j}{D_2}\right) \frac{r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{b_{j2}(b_{21} + b_{23}) - 1}\right\}. \end{cases} \quad (9)$$

但是,对于三物种竞争-扩散系统的非线性选择目前仍没有相关结果.

本文目的是通过构造适当的上下解得到速度选择的判定条件,并补充和完善文献[5]对应的结果.首先,本文借助上下解得到最小波速线性选择的判定条件(见定理 1,2),同时得到了文献[5]没有提及的非线性选择的判定条件(见定理 3).其次,本文证明了阈值  $\bar{b}_{j2} (j = 1, 3)$  的存在性结果,即当  $b_{j2}$  的值经过  $\bar{b}_{j2}$  时,系统(2)的最小波速由线性选择变为非线性选择,然后进一步给出了速度选择关于阈值的估计.最后,通过数值模拟验证了本文的主要结论,并比较与文献[5]对应结果的不同之处.

## 1 预备知识

**定义 2** 给定常数  $c > 0$ .

① (参见文献[5]) 称由  $\mathbf{R}$  映到  $(0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1]$  上的连续函数  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  是式(5)的上解,如果  $\bar{U}(-\infty) = \bar{V}(-\infty) = \bar{W}(-\infty) = 1$ , 以及存在  $z_0 \in \mathbf{R}$ , 有  $\bar{U}(z_0) < 1, \bar{W}(z_0) < 1$ , 且  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  在  $\mathbf{R}$  上几乎处处可微,使得

$$\begin{cases} D_1 \bar{U}'' + c \bar{U}' + r_1(1 - \bar{U})(b_{12} \bar{V} - \bar{U}) \leq 0, \\ D_2 \bar{V}'' + c \bar{V}' + r_2 \bar{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \bar{V} + b_{21} \bar{U} + b_{23} \bar{W}) \leq 0, \\ D_3 \bar{W}'' + c \bar{W}' + r_3(1 - \bar{W})(b_{32} \bar{V} - \bar{W}) \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

几乎处处成立.

② 称由  $\mathbf{R}$  映到  $(0, 1] \times (0, 1] \times (0, 1]$  上的连续函数  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})$  是式(5)的下解,如果  $\underline{U}(\infty) = \underline{V}(\infty) = \underline{W}(\infty) = 0$ , 且  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})$  在  $\mathbf{R}$  上几乎处处可微,使得

$$\begin{cases} D_1 \underline{U}'' + c \underline{U}' + r_1(1 - \underline{U})(b_{12} \underline{V} - \underline{U}) \geq 0, \\ D_2 \underline{V}'' + c \underline{V}' + r_2 \underline{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \underline{V} + b_{21} \underline{U} + b_{23} \underline{W}) \geq 0, \\ D_3 \underline{W}'' + c \underline{W}' + r_3(1 - \underline{W})(b_{32} \underline{V} - \underline{W}) \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

几乎处处成立.

下面的引理用来说明系统(5)解的存在性,它可由文献[7]中定理 6.2 直接得到,故省略证明.

**引理 1** 如果系统(5)存在单调非增的上解  $(\bar{U}(z), \bar{V}(z), \bar{W}(z))$  和非 0 的下解  $(\underline{U}(z), \underline{V}(z), \underline{W}(z))$  满足  $(\underline{U}(z), \underline{V}(z), \underline{W}(z)) \leq (\bar{U}(z), \bar{V}(z), \bar{W}(z))$ , 则系统(5)存在解  $(U(z), V(z), W(z))$  且满足  $(\underline{U}(z), \underline{V}(z), \underline{W}(z)) \leq (U(z), V(z), W(z)) \leq (\bar{U}(z), \bar{V}(z), \bar{W}(z))$ . 这里上下解满足以下边值条件:

①  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})(\infty) = e_0, (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})(-\infty) = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3)$ , 其中  $(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \geq e_1$ ;

②  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})(\infty) = e_0, (\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})(-\infty) = (\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3)$ , 其中  $e_0 \leq (\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3) \leq e_1$ .

类似文献[7]的思想,为了使用上下解方法,现将系统(5)转化为标量方程,下面的结果可由文献[7]中

引理 2.2 得到.

**引理 2** 设  $c \geq c_0$ . 对任意给定的连续非增函数  $\tilde{V}(z)$ , 满足  $\tilde{V}(-\infty) = 1, \tilde{V}(+\infty) = 0$ , 则有以下结论成立:

① 存在非增函数  $U(z) = U(\tilde{V})(z)$  满足

$$\begin{cases} D_1 U'' + cU' + r_1(1 - U)(b_{12}\tilde{V} - U) = 0, \\ U(-\infty) = 1, U(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

进一步地, 解  $U(\tilde{V})$  关于  $\tilde{V}$  单调, 即当  $\tilde{V}_1 \geq \tilde{V}_2$  时,  $U(\tilde{V}_1) \geq U(\tilde{V}_2)$ .

② 存在非增函数  $W(z) = W(\tilde{V})(z)$  满足

$$\begin{cases} D_3 W'' + cW' + r_3(1 - W)(b_{32}\tilde{V} - W) = 0, \\ W(-\infty) = 1, W(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

进一步地, 解  $W(\tilde{V})$  关于  $\tilde{V}$  单调, 即当  $\tilde{V}_1 \geq \tilde{V}_2$  时,  $W(\tilde{V}_1) \geq W(\tilde{V}_2)$ .

通过引理 2, 系统(5)可转化为以下标量方程:

$$\begin{cases} D_2 V'' + cV' + r_2 V(1 - b_{21} - b_{23} - V + b_{21}U(V) + b_{23}W(V)) = 0, \\ V(-\infty) = 1, V(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

由方程(6)容易得到, 当  $c \geq c_0$  时,  $\Gamma(\mu) = 0$  有两个正根:

$$\begin{cases} \mu_1 := \mu_1(c) = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4D_2 r_2(1 - b_{21} - b_{23})}}{2D_2}, \\ \mu_2 := \mu_2(c) = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4D_2 r_2(1 - b_{21} - b_{23})}}{2D_2}. \end{cases} \quad (15)$$

此外,  $\mu_1(c)$  关于  $c$  是递减的, 以及  $\mu_2(c)$  关于  $c$  是递增的. 当  $z \rightarrow \infty$  且  $c > c_0$  时, 系统(5)中波廓  $V(z)$  的渐近行为由以下式子给出:

$$V(z) \sim C_1 e^{-\mu_1(c)z} + C_2 e^{-\mu_2(c)z}, \quad z \rightarrow \infty,$$

其中  $C_1, C_2 > 0$ . 类似文献[7]中引理 2.6 和引理 2.8 的证明, 可分别得到以下结论.

**引理 3** 设  $\underline{V}(z)$  是如下定义连续函数:

$$\underline{V}(z) = \begin{cases} \xi_1 e^{-\mu_1 z} (1 - M e^{-\epsilon z}), & z > z_1, \\ 0, & z \leq z_1. \end{cases}$$

其中  $c = c_0 + \epsilon_1$ ,  $0 < \epsilon, \epsilon_1 \ll 1$ ,  $z_1 = (1/\epsilon) \ln M$ ,  $\xi_1 > 0$  且  $M > 0$  是足够大的数. 进一步地,  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})(z)$  是系统(5)的下解, 其中  $\underline{U}(z)$  和  $\underline{W}(z)$  分别是  $V(z) = \underline{V}(z)$  时  $U$ -方程和  $W$ -方程的解.

**引理 4** 设  $c_1 > c_0$ ,  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})(x - c_1 t) \geq 0$  是以下偏微分系统的下解:

$$\begin{cases} u_t = D_1 u_{xx} + r_1(1 - u)(b_{12}v - u), \\ v_t = D_2 v_{xx} + r_2 v(1 - b_{21} - b_{23} - v + b_{21}u + b_{23}w), \\ w_t = D_3 w_{xx} + r_3(1 - w)(b_{32}v - w). \end{cases}$$

令  $z^* = x - c_1 t$ ,  $\underline{V}(z^*)$  是单调函数且满足  $\limsup_{z^* \rightarrow -\infty} \underline{V}(z^*) < 1$ , 当  $z^* \rightarrow +\infty$  时,  $\underline{V}(z^*) \sim e^{-\mu_2 z^*}$ . 则对任意  $c \in [c_0, c_1)$ , 系统(5)没有行波解.

## 2 主要结果及证明

### 2.1 速度选择的具体条件

本小节将建立系统(5)最小波速线性选择和非线性选择的条件, 这些条件表明了物种的扩散率、出生率和竞争系数之间的相互作用能够影响最小波速的选择机制. 下面两个定理给出了线性选择的判定条件.

**定理 1** 如果

$$0 \leq D_j < 2D_2, \quad b_{21} + b_{23} < \frac{2}{3}, \quad r_j < \left(2 - \frac{D_j}{D_2}\right) \frac{2r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{b_{j2} - 1}, \quad j = 1, 3 \quad (16)$$

成立,则系统(5)的最小波速是线性选择的.

**证明** 令

$$\bar{V} = \frac{1}{1 + e^{\mu_1(c)z}}, \bar{U} = \bar{W} = 1 - (1 - \bar{V})^2,$$

这里  $c = c_0 + \epsilon_2, 0 < \epsilon_2 \ll 1$ . 进而有

$$\bar{V}' = -\mu_1(c)\bar{V}(1 - \bar{V}), \bar{V}'' = \mu_1^2(c)\bar{V}(1 - \bar{V})(1 - 2\bar{V}),$$

以及

$$\bar{U}' = \bar{W}' = -2\mu_1(c)\bar{V}(1 - \bar{V})^2, \bar{U}'' = \bar{W}'' = 2\mu_1^2(c)\bar{V}(1 - \bar{V})^2(1 - 3\bar{V}).$$

接下来证明  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  是系统(5)的上解.

实际上,注意到  $\mu_1^2(c) = \mu_1^2(c_0 + \epsilon_2) = \mu_1^2(c_0) + \delta_1(\epsilon_2) = r_2(1 - b_{21} - b_{23})/D_2 + \delta_1(\epsilon_2)$ , 当  $\epsilon_2 \rightarrow 0^+$  时,有  $\delta_1(\epsilon_2) \rightarrow 0^-$ . 所以,令  $\epsilon_2$  是足够小的正数,由式(16)得

$$\begin{aligned} D_2\bar{V}'' + c\bar{V}' + r_2\bar{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \bar{V} + b_{21}\bar{U} + b_{23}\bar{W}) = \\ \bar{V}(1 - \bar{V}) \left[ D_2\mu_1^2(c)(1 - 2\bar{V}) - c\mu_1(c) + r_2 \frac{1 - \bar{V} - b_{21}(1 - \bar{U}) - b_{23}(1 - \bar{W})}{1 - \bar{V}} \right] = \\ \bar{V}(1 - \bar{V}) \{ D_2\mu_1^2(c)(1 - 2\bar{V}) - c\mu_1(c) + r_2[1 - (1 - \bar{V})(b_{21} + b_{23})] \} = \\ \bar{V}^2(1 - \bar{V}) [-2D_2\mu_1^2(c) + r_2(b_{21} + b_{23})] \rightarrow \\ \bar{V}^2(1 - \bar{V}) [3r_2(b_{21} + b_{23}) - 2r_2] \leq 0, \end{aligned}$$

同时,对  $U$ - 方程有

$$\begin{aligned} D_1\bar{U}'' + c\bar{U}' + r_1(1 - \bar{U})(b_{12}\bar{V} - \bar{U}) = \\ \bar{V}(1 - \bar{V})^2 [2D_1\mu_1^2(c)(1 - 3\bar{V}) - 2c\mu_1(c) + r_1(b_{12} - 2 + \bar{V})] \leq \\ \bar{V}(1 - \bar{V})^2 [2D_1\mu_1^2(c) - 2c\mu_1(c) + r_1(b_{12} - 1)] \rightarrow \\ \bar{V}(1 - \bar{V})^2 \left[ 2r_2(1 - b_{21} - b_{23}) \left( \frac{D_1}{D_2} - 2 \right) + r_1(b_{12} - 1) \right] \leq 0. \end{aligned}$$

类似地,对  $W$ - 方程可以证明

$$D_3\bar{W}'' + c\bar{W}' + r_3(1 - \bar{W})(b_{32}\bar{V} - \bar{W}) \leq 0.$$

因此,由定义 2 得  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  是系统(5)的上解.进而由  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的任意性,利用引理 1 和引理 3 可知系统(5)存在波速为  $c_0$  的行波解.证毕.

接下来选取不同于定理 1 的上解得到线性选择的另一个条件.

**定理 2** 设

$$b_{21} + b_{23} < \frac{1}{5}. \tag{17}$$

如果

$$\left( \frac{D_j}{4D_2} - 1 \right) r_2(1 - b_{21} - b_{23}) < r_j < \frac{3D_j r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{2D_2(b_{j2} + 1)}, \tag{18}$$

或

$$\frac{3D_j r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{2D_2(b_{j2} + 1)} < r_j < \left( \frac{D_j}{D_2} + 2 \right) \frac{r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{b_{j2} - 1} \tag{19}$$

成立,其中  $j = 1, 3$ , 则系统(5)的最小波速是线性选择的.

**证明** 令  $\bar{V}(z)$  是以下微分方程边值问题的解:

$$\bar{V}' = -\mu_1(c)\bar{V}(1 - \bar{V}^{1/2}), \bar{V}(-\infty) = 1, \bar{V}(\infty) = 0,$$

其中  $c = c_0 + \epsilon_3$ ,  $0 < \epsilon_3 \ll 1$ . 令  $\bar{U}(z) = \bar{W}(z) = 1 - (1 - \bar{V}^{1/2})^2$ . 容易验证

$$\bar{V}'' = \mu_1^2(c)\bar{V}(1 - \bar{V}^{1/2})\left(1 - \frac{3}{2}\bar{V}^{1/2}\right),$$

$$\bar{U}' = \bar{W}' = -\mu_1(c)\bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2, \bar{U}'' = \bar{W}'' = \frac{\mu_1^2(c)}{2}\bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2(1 - 3\bar{V}^{1/2}).$$

类似定理 1 的证明, 只需说明  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  是式 (5) 的上解. 显然,

$$\mu_1^2(c) = \mu_1^2(c_0 + \epsilon_3) = \mu_1^2(c_0) + \delta_2(\epsilon_3) = \frac{r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{D_2} + \delta_2(\epsilon_3),$$

当  $\epsilon_3 \rightarrow 0^+$  时,  $\delta_2(\epsilon_3) \rightarrow 0^-$ . 由条件 (17), 令  $\epsilon_3$  是足够小的正数, 容易计算得

$$\begin{aligned} D_2\bar{V}'' + c\bar{V}' + r_2\bar{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \bar{V} + b_{21}\bar{U} + b_{23}\bar{W}) = \\ \bar{V}(1 - \bar{V}^{1/2})\left\{D_2\mu_1^2(c)\left(1 - \frac{3}{2}\bar{V}^{1/2}\right) - c\mu_1(c) + \right. \\ \left. r_2[(1 + \bar{V}^{1/2}) - b_{21}(1 - \bar{V}^{1/2}) - b_{23}(1 - \bar{V}^{1/2})]\right\} = \\ \bar{V}^{3/2}(1 - \bar{V}^{1/2})\left[-\frac{3}{2}D_2\mu_1^2(c) + r_2(1 + b_{21} + b_{23})\right] \leq 0. \end{aligned}$$

接下来验证  $\bar{U}(z)$  和  $\bar{W}(z)$  分别是  $U$ -方程和  $W$ -方程的上解, 这里只计算  $U$ -方程, 对于  $W$ -方程可以类似讨论. 将  $\bar{U}(z)$  代入式 (5) 可得

$$\begin{aligned} D_1\bar{U}'' + c\bar{U}' + r_1(1 - \bar{U})(b_{12}\bar{V} - \bar{U}) = \\ \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left[\frac{D_1}{2}\mu_1^2(c)(1 - 3\bar{V}^{1/2}) - c\mu_1(c) + r_1(b_{12}\bar{V}^{1/2} + \bar{V}^{1/2} - 2)\right] = \\ \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left[\frac{D_1}{2}\mu_1^2(c) - c\mu_1(c) - 2r_1 + \bar{V}^{1/2}\left(r_1b_{12} + r_1 - \frac{3}{2}D_1\mu_1^2(c)\right)\right] \leq \\ \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left\{\left(\frac{D_1}{2D_2} - 2\right)r_2(1 - b_{21} - b_{23}) - 2r_1 + \bar{V}^{1/2}\left[r_1b_{12} + r_1 - \frac{3D_1}{2D_2}r_2(1 - b_{21} - b_{23})\right]\right\}. \end{aligned}$$

进一步地, 如果式 (18) 成立, 则

$$\begin{aligned} \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left\{\left(\frac{D_1}{2D_2} - 2\right)r_2(1 - b_{21} - b_{23}) - 2r_1 + \bar{V}^{1/2}\left[r_1b_{12} + r_1 - \frac{3D_1}{2D_2}r_2(1 - b_{21} - b_{23})\right]\right\} \leq \\ \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left\{\left(\frac{D_1}{2D_2} - 2\right)r_2(1 - b_{21} - b_{23}) - 2r_1\right\} \leq 0, \end{aligned}$$

或者如果条件 (19) 成立, 那么由  $\bar{V}^{1/2} \leq 1$  得

$$\begin{aligned} \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left\{\left(\frac{D_1}{2D_2} - 2\right)r_2(1 - b_{21} - b_{23}) - 2r_1 + \bar{V}^{1/2}\left[r_1b_{12} + r_1 - \frac{3D_1}{2D_2}r_2(1 - b_{21} - b_{23})\right]\right\} \leq \\ \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left\{\left(\frac{D_1}{2D_2} - 2\right)r_2(1 - b_{21} - b_{23}) - 2r_1 + r_1b_{12} + r_1 - \frac{3D_1}{2D_2}r_2(1 - b_{21} - b_{23})\right\} \leq \\ \bar{V}^{1/2}(1 - \bar{V}^{1/2})^2\left\{\left(-\frac{D_1}{D_2} - 2\right)r_2(1 - b_{21} - b_{23}) + r_1(b_{12} - 1)\right\} \leq 0. \end{aligned}$$

综上,  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  是系统 (5) 的上解, 然后由  $\epsilon_1, \epsilon_3$  的任意性和引理 1、引理 3 可知系统 (5) 存在波速为  $c_0$  的行波解. 证毕.

下面通过给出下解  $(U, V, W)$  的具体表达式来得到系统式 (5) 最小波速非线性选择的判据.

**定理 3** 系统式(5)的最小波速是非线性选择的,如果有

$$\frac{1}{3} < b_{21} + b_{23} < 1, \frac{4r_2(1 - b_{21} - b_{23})(D_j/D_2 + 1) + 2r_j}{r_j b_{j2}} < 3(b_{21} + b_{23}) - 1 \tag{20}$$

成立,其中  $j = 1, 3$ .

**证明** 定义

$$\underline{V} = \frac{k}{1 + e^{\mu_2(c)z}}, \underline{U} = \underline{W} = 1 - \left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right)^2,$$

其中  $c = c_0 + \epsilon_4, 0 < \epsilon_4 \ll 1, 0 < k < 1$  是待确定的数.直接计算可以得到

$$\underline{V}' = -\mu_2(c)\underline{V}\left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right), \underline{V}'' = \mu_2^2(c)\underline{V}\left(1 - 2\frac{\underline{V}}{k}\right),$$

以及

$$\underline{U}' = \underline{W}' = -2\mu_2(c)\frac{\underline{V}}{k}\left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right)^2, \underline{U}'' = \underline{W}'' = 2\mu_2^2(c)\frac{\underline{V}}{k}\left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right)^2\left(1 - 3\frac{\underline{V}}{k}\right).$$

将上述表达式代入式(5),由式(20)可得

$$\begin{aligned} D_2 \underline{V}'' + c \underline{V}' + r_2 \underline{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \underline{V} + b_{21} \underline{U} + b_{23} \underline{W}) = \\ \underline{V}\left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right) \left\{ (D_2 \mu_2^2(c) - c \mu_2(c) + r_2(1 - b_{21} - b_{23})) + \right. \\ \left. \frac{\underline{V}}{k} \left[ -2D_2 \mu_2^2(c) + r_2 \frac{b_{21} \underline{U} + b_{23} \underline{W} - \underline{V}((b_{21} + b_{23} - 1 + k)/k)}{(\underline{V}/k)(1 - (\underline{V}/k))} \right] \right\} = \\ \frac{\underline{V}^2}{k} \left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right) \left[ -2D_2 \mu_2^2(c) + r_2 \left( b_{21} + b_{23} + \frac{k(1 - k)}{k - \underline{V}} \right) \right] \geq \\ \frac{\underline{V}^2}{k} \left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right) [3r_2(b_{21} + b_{23}) - r_2(1 + k)] \geq 0. \end{aligned}$$

对  $U$ -方程可计算得

$$\begin{aligned} D_1 \underline{U}'' + c \underline{U}' + r_1(1 - \underline{U})(b_{12} \underline{V} - \underline{U}) = \\ \frac{\underline{V}}{k} \left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right)^2 \left[ 2D_1 \mu_2^2(c) \left(1 - \frac{3\underline{V}}{k}\right) - 2c \mu_2(c) + r_1 \left( b_{12} k - 2 + \frac{\underline{V}}{k} \right) \right] \geq \\ \frac{\underline{V}}{k} \left(1 - \frac{\underline{V}}{k}\right)^2 \left[ -4\left(\frac{D_1}{D_2} + 1\right) r_2(1 - b_{21} - b_{23}) - 2r_1 + r_1 b_{12} k \right], \end{aligned}$$

显然  $k$  的选取取决于  $b_{21} + b_{23}$  的值.当  $b_{21} + b_{23} \in (1/3, 2/3]$  时,则  $k$  满足

$$\frac{4r_2(1 - b_{21} - b_{23})(D_1/D_2 + 1) + 2r_1}{r_1 b_{12}} < k < 3(b_{21} + b_{23}) - 1.$$

当  $b_{21} + b_{23} \in (2/3, 1)$  时, $k$  可以取

$$\frac{4r_2(1 - b_{21} - b_{23})(D_1/D_2 + 1) + 2r_1}{r_1 b_{12}} < k < 1.$$

对  $W$ -方程,可类似上面的讨论.所以,若式(20)成立,则有

$$\begin{cases} D_1 \underline{U}'' + c \underline{U}' + r_1(1 - \underline{U})(b_{12} \underline{V} - \underline{U}) \geq 0, \\ D_2 \underline{V}'' + c \underline{V}' + r_2 \underline{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \underline{V} + b_{21} \underline{U} + b_{23} \underline{W}) \geq 0, \\ D_3 \underline{W}'' + c \underline{W}' + r_3(1 - \underline{W})(b_{32} \underline{V} - \underline{W}) \geq 0. \end{cases}$$

故  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{W})$  是式(5)的下解.由引理 4 知结论成立.

## 2.2 $b_{j_2}$ 阈值的存在性及估计

下面探究  $D_1 = D_3 = 0$  及其他参数固定时, 竞争系数  $b_{j_2}$  对速度选择机制的影响. 本小节探究  $b_{j_2}$  的阈值  $\bar{b}_{j_2}$  ( $j = 1, 3$ ) 的存在性, 即随着  $b_{j_2}$  从 1 开始增大, 经过  $\bar{b}_{j_2}$  时最小波速从线性选择变为非线性选择. 本小节考虑以下系统:

$$\begin{cases} cU' + r_1(1 - U)(b_{12}V - U) = 0, \\ D_2V'' + cV' + r_2V(1 - b_{21} - b_{23} - V + b_{21}U + b_{23}W) = 0, \\ cW' + r_3(1 - W)(b_{32}V - W) = 0, \\ (U, V, W)(-\infty) = (1, 1, 1), (U, V, W)(+\infty) = (0, 0, 0). \end{cases} \quad (21)$$

**引理 5** 如果存在  $\tilde{b}_{j_2}$  ( $j = 1, 3$ ) 使得系统 (21) 的最小波速是线性选择的, 则对所有的  $1 < b_{j_2} \leq \tilde{b}_{j_2}$  系统都是线性选择的.

**证明** 令  $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(z)$  是系统 (21) 满足  $b_{j_2} = \tilde{b}_{j_2}$  ( $j = 1, 3$ ) 时对应的解, 则有

$$\begin{cases} c\tilde{U}' + r_1(1 - \tilde{U})(\tilde{b}_{12}\tilde{V} - \tilde{U}) = 0, \\ D_2\tilde{V}'' + c\tilde{V}' + r_2\tilde{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \tilde{V} + b_{21}\tilde{U} + b_{23}\tilde{W}) = 0, \\ c\tilde{W}' + r_3(1 - \tilde{W})(\tilde{b}_{32}\tilde{V} - \tilde{W}) = 0, \\ (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(-\infty) = (1, 1, 1), (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(+\infty) = (0, 0, 0). \end{cases} \quad (22)$$

为了验证  $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(z)$  是系统 (21) 满足  $b_{j_2} \leq \tilde{b}_{j_2}$  时的上解, 需验证

$$\begin{cases} c\tilde{U}' + r_1(1 - \tilde{U})(b_{12}\tilde{V} - \tilde{U}) \leq 0, \\ D_2\tilde{V}'' + c\tilde{V}' + r_2\tilde{V}(1 - b_{21} - b_{23} - \tilde{V} + b_{21}\tilde{U} + b_{23}\tilde{W}) \leq 0, \\ c\tilde{W}' + r_3(1 - \tilde{W})(b_{32}\tilde{V} - \tilde{W}) \leq 0, \\ (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(-\infty) = (1, 1, 1), (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(+\infty) = (0, 0, 0). \end{cases} \quad (23)$$

实际上, 当  $b_{j_2} \leq \tilde{b}_{j_2}$  时, 由式 (22) 可知, 式 (23) 的第二个式子自然成立. 对于式 (23) 的第一和第三个式子, 有

$$\begin{aligned} c\tilde{U}' + r_1(1 - \tilde{U})(b_{12}V - \tilde{U}) &= r_1(b_{12} - \tilde{b}_{12})(1 - \tilde{U})\tilde{V} \leq 0, \\ c\tilde{W}' + r_3(1 - \tilde{W})(b_{32}V - \tilde{W}) &= r_3(b_{32} - \tilde{b}_{32})(1 - \tilde{W})\tilde{V} \leq 0. \end{aligned}$$

因此,  $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})(z)$  是上解. 所以当  $1 < b_{j_2} \leq \tilde{b}_{j_2}$  时, 最小波速是线性选择的. 证毕.

由引理 5 可如下定义  $b_{j_2}$  ( $j = 1, 3$ ) 的阈值 (系统 (21) 的最小波速是线性选择的):

$$\bar{b}_{j_2} = \sup \{ b_{j_2} > 1 \}, \quad j = 1, 3.$$

**定理 4** 当  $1 < b_{j_2} \leq \bar{b}_{j_2}$  时, 系统 (21) 的最小波速是线性选择的; 当  $b_{j_2} > \bar{b}_{j_2}$  时, 系统 (21) 是非线性选择的, 其中  $j = 1, 3$ .

由定理 1 和定理 3 可以得到阈值  $\bar{b}_{j_2}$  ( $j = 1, 3$ ) 的以下估计.

**定理 5** 当  $0 \leq D_j < 2D_2$ ,  $b_{21} + b_{23} < 2/3$  时, 有

$$\bar{b}_{j_2} \geq \frac{2r_2(1 - b_{21} - b_{23})(2 - D_j/D_2) + r_j}{r_j}, \quad j = 1, 3.$$

**定理 6** 如果  $1/3 < b_{21} + b_{23} < 1$ , 则有

$$\bar{b}_{j_2} \leq \frac{4r_2(1 - b_{21} - b_{23})(D_j/D_2 + 1) + 2r_j}{r_j[3(b_{21} + b_{23}) - 1]}, \quad j = 1, 3.$$

## 3 数值模拟

本节将进行一些数值模拟来验证上一节得到的定理, 并比较文献 [5] 中速度选择的结果.

首先, 我们数值计算系统 (2) 行波解的最小波速, 记为  $c_{\text{num}}$ , 然后将它和由式 (7) 得到的  $c_0$  作比较. 为了得到  $c_{\text{num}}$ , 本文应用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解初边值问题 (2) 并选取以下初始条件:

$$u(j,0) = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq N_j, \\ 1, & N_j + 1 \leq j \leq N_L, \end{cases} \quad v(j,0) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq N_j, \\ 0, & N_j + 1 \leq j \leq N_L, \end{cases} \quad (24)$$

$$w(j,0) = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq N_j, \\ 1, & N_j + 1 \leq j \leq N_L, \end{cases} \quad (25)$$

和边界条件

$$\begin{cases} u(1,t) - u(2,t) = u(N_L,t) - u(N_L - 1,t) = 0, \\ v(1,t) - v(2,t) = v(N_L,t) - v(N_L - 1,t) = 0, \\ w(1,t) - w(2,t) = w(N_L,t) - w(N_L - 1,t) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

其中  $N_L$  是足够大的正整数.通过传播速度的相关理论<sup>[17]</sup>可知,具有上述初值问题的解可以演变为具有最小波速的行波解,即  $c_{\text{num}}$  可以给出  $c_{\text{min}}$  的精确估计.模拟 Lotka-Volterra 竞争系统的相关内容请参见文献[9,10,13].为了便于模拟,本节总是令  $D_2 = r_2 = 1, D_1 = D_3, r_1 = r_3, b_{12} = b_{32}, b_{21} = b_{23}$ .图 1 描述了系统(2)不同时刻  $t$  的行波解  $v(x,t)$ .图 1 中的曲线体现了行波解的平移不变性.

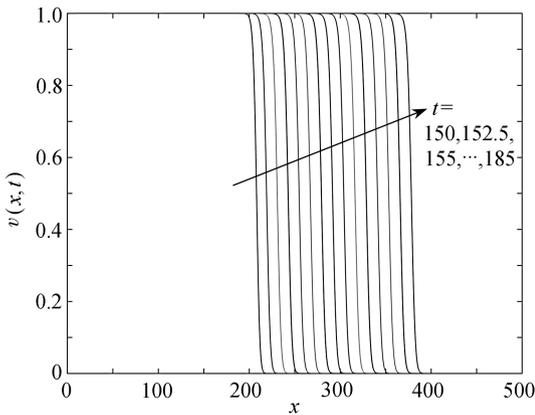


图 1 当  $D_1 = D_3 = 0.5, r_1 = r_3 = 2, D_2 = r_2 = 1, b_{12} = b_{32} = 2, b_{21} = b_{23} = 0.1$  时的解  $v(x,t)$ , 其中  $t = 150, 152.5, 155, \dots, 185$

Fig. 1 Solution  $v(x,t)$  for  $t = 150, 152.5, 155, \dots, 185, D_1 = D_3 = 0.5, r_1 = r_3 = 2, D_2 = r_2 = 1, b_{12} = b_{32} = 2, b_{21} = b_{23} = 0.1$

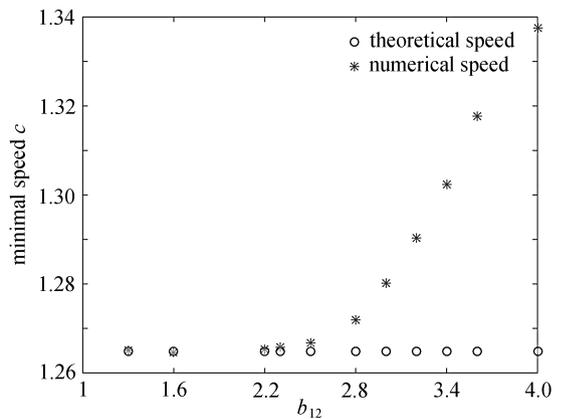


图 2 固定  $D_1 = D_3 = 1, r_1 = r_3 = 1, D_2 = r_2 = 1, b_{21} = b_{23} = 0.3, b_{12} = b_{32}$ , 变化  $b_{12}$  时最小波速的线性与非线性选择

Fig. 2 Linear and nonlinear selections of the minimal speed for varied values of  $b_{12}, D_1 = D_3 = 1, r_1 = r_3 = 1, D_2 = r_2 = 1, b_{21} = b_{23} = 0.3, b_{12} = b_{32}$

表 1 定理的数值演示

Table 1 Numerical demonstrations of the theorems

theorem	$D_1$	$r_1$	$b_{12}$	$b_{21}$	$c_0$	$c_{\text{num}}$	$c_0 - c_{\text{num}}$
1	0.5	0.05	20	0.3	1.264 9	1.265 2	0.000 3
2	5	1	2	0.05	1.897 4	1.898 3	0.000 9
3	0.5	2	10	0.4	0.894 4	0.957 6	-0.063 2

根据定理 1~3 分别选取一组系数作为系统线性选择和非线性选择的示例,如表 1 所示,不难验证表中的系数分别满足各定理的条件.以定理 1 为例,即表 1 的第一行数据.当  $D_2 = r_2 = 1, b_{21} = b_{23} = 0.3$  时,得到  $c_0 = 1.264 9$  以及  $(2 - D_j/D_2)(2r_2(1 - b_{21} - b_{23})/(b_{j2} - 1)) = 0.063 2$ ,显然选取的  $r_1 = r_3 = 0.05 < 0.063 2, b_{21} + b_{23} = 0.6 < 2/3, D_1 = D_3 = 0.5 < 2D_2 = 2$ .所以在表 1 第一行数据的选取下式(16)成立.由表 1 不难看出,前两组数据的相对误差小至  $O(10^{-4})$ ,这意味着数值模拟分别与定理 1 和定理 2 的理论结果是一致的,即在前两组数据的选取下,系统(2)的最小波速是线性选择的.表 1 的最后一行用来说明定理 3 非线性选择的结果,在满足定理 3 的参数条件下,可以看到数值计算的速度  $c_{\text{num}}$  大于线性速度  $c_0$ ,所以系统是非线性选择的.

第 2.2 小节研究了其他参数固定时系统关于  $b_{j2}(j = 1, 3)$  的速度选择机制.现在固定  $D_1 = D_3 = 1, r_1 = r_3$

$= 1, b_{21} = b_{23} = 0.3$ , 速度选择机制关于  $b_{12}$  的变化如图 2 所示. 不难发现, 当  $1 < b_{12} \leq \bar{b}_{12}$  时, 系统是线性选择的; 当  $b_{12} > \bar{b}_{12}$  时, 系统是非线性选择的, 这与定理 4 的结果一致. 另外在这组参数下, 由定理 5 得到  $\bar{b}_{j_2}$  的下界  $\bar{b}_{j_2*} = 1.8$ , 由定理 6 得到  $\bar{b}_{j_2}$  的上界  $\bar{b}_{j_2}^* = 3.25$ . 由图 2 可以发现  $\bar{b}_{j_2} \approx 2.5$ , 在区间  $[\bar{b}_{j_2*}, \bar{b}_{j_2}^*] = [1.8, 3.25]$  内, 因此阈值  $\bar{b}_{j_2}$  的理论估计与模拟结果也是一致的.

通过以上数值模拟的讨论, 下面比较本文与文献[5]得到的有关速度选择机制的结果. 容易发现本文的定理 1 与文献[5]中  $B_j^2$  对  $r_j$  的范围很类似, 但通过表 1 第一行对定理 1 的数值模拟发现, 在这组参数下有  $D_j = 0.5 \in (0, 2)$ ,  $b_{j_2}(b_{21} + b_{23}) = 12 > 1$ , 另外

$$\left(2 - \frac{D_j}{D_2}\right) \frac{r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{b_{j_2}(b_{21} + b_{23}) - 1} = 0.0545 < \left(2 - \frac{D_j}{D_2}\right) \frac{2r_2(1 - b_{21} - b_{23})}{b_{j_2} - 1} = 0.0632,$$

即本文定理 1 对  $r_j$  的范围比文献[5]中  $B_j^2$  对  $r_j$  的范围大. 其次, 在表 1 第二行对本文定理 2 的数值模拟中, 选取的  $D_j = 5$  显然超过了文献[5]  $B_j^1$  和  $B_j^2$  中  $D_j$  的范围. 所以定理 2 是文献[5]线性选择结果的补充. 此外, 本文还得到了文献[5]没有提及的非线性选择的结果(定理 3).

## 4 结 论

本文通过构造与已有文献不同的上下解, 建立了系统(2)最小波速线性选择和非线性选择的新结果, 并得到了速度选择机制的阈值结果和估计, 然后进行数值模拟验证了本文的主要结论. 通过模拟发现, 本文推广了文献[5]对系统(2)线性选择的条件, 此外还得到了文献[5]没有提及的非线性选择的结果. 在线性选择的意义下, 从生物学角度可以得到 Lotka-Volterra 模型强竞争物种的入侵速度. 因此, 本文的工作具有理论意义和实际意义.

## 参考文献 (References):

- [1] MIMURA M, FIFE P C. A 3-component system of competition and diffusion[J]. *Hiroshima Mathematical Journal*, 1986, **16**: 189-207.
- [2] WU C H. A general approach to the asymptotic behavior of traveling waves in a class of three-component lattice dynamical systems[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2016, **28**: 317-338.
- [3] CHEN C C, HUNG L C, MIMURA M, et al. Exact traveling wave solutions of three species competition-diffusion systems[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series B)*, 2012, **17**: 2653-2669.
- [4] WU C C. Monotonicity and uniqueness of wave profiles for a three components lattice dynamical system[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2017, **37**: 2813-2827.
- [5] GUO J S, WANG Y, WU C H, et al. The minimal speed of traveling wave solutions for a diffusive three species competition system[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2015, **19**: 1805-1829.
- [6] 谷雨萌, 黄明迪. 一类时间周期的时滞竞争系统行波解的存在性[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(6): 658-668. (GU Yumeng, HUANG Mingdi. Existence of periodic traveling waves for time-periodic Lotka-Volterra competition systems with delay[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 658-668. (in Chinese))
- [7] ALHASANAT A, OU C. Minimal-speed selection of traveling waves to the Lotka-Volterra competition model [J]. *Journal of Differential Equations*, 2019, **266**: 7357-7378.
- [8] ALHASANAT A, OU C. On a conjecture raised by Yuzo Hosono[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2018, **4**: 1-18.
- [9] HOSONO Y. Traveling waves for diffusive Lotka-Volterra competition model II: a geometric approach[J]. *Forma*, 1995, **10**: 235-257.
- [10] HOSONO Y. The minimal speed of traveling fronts for diffusive Lotka-Volterra competition model[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1998, **60**: 435-448.
- [11] WEINBERGER H F, LEWIS M A, LI B. Analysis of linear determinacy for spread in cooperative models[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2002, **45**: 183-218.
- [12] LEWIS M A, LI B, WEINBERGER H F. Spreading speed and linear determinacy for two-species competition

- models[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2002, **45**: 219-233.
- [13] WANG H, HUANG Z, OU C. Speed selection for the wavefronts of the lattice Lotka-Volterra competition system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2020, **268**: 3880-3902.
- [14] HUANG W. Problem on minimum wave speed for Lotka-Volterra reaction-diffusion competition model[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2010, **22**: 285-297.
- [15] GUO J S, WU C H. Traveling wave front for a two-component lattice dynamical system arising in competition models[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**: 4357-4391.
- [16] GUO J S, LIANG X. The minimal speed of traveling fronts for the Lotka-Volterra competition system[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2011, **23**: 353-363.
- [17] FANG J, ZHAO X. Bistable traveling waves for monotone semiflows with applications[J]. *Journal of the European Mathematical Society*, 2015, **17**: 2243-2288.