 http://www.applmathmech.cn

一类反应扩散方程的孤立周期波和局部临界周期分支*

古结平[1]，黄文韬[1]，陈 挺[2]

(1. 广西师范大学 数学与统计学院, 广西 桂林 541006;
2. 广东财经大学 统计与数学学院, 广州 510320)

摘要： 研究了一类含有五次非线性反应项和常数扩散项的反应扩散方程的小振幅孤立周期波解, 以及它的行波方程局部临界周期分支问题. 运用行波变换将反应扩散方程转换为对应的行波系统, 应用奇点量方法和计算机代数软件 MATHEMATICA 计算出该系统的前 8 个奇点量, 得到该系统奇点的两个中心条件, 并证明行波系统原点处可分支出 8 个极限环, 对应的非线性反应扩散方程存在 8 个小振幅孤立周期波解; 通过周期常数的计算, 得到了行波系统原点的细中心阶数, 并证明该系统最多有 3 个局部临界周期分支, 且能达到 3 个局部临界周期分支; 通过分析行波系统的临界周期分支, 得到该反应扩散方程有 3 个临界周期波长.

关 键 词： 反应扩散方程； 奇点量； 极限环； 孤立周期波； 临界周期分支

中图分类号： O175.12 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.410263

Solitary Periodic Waves and Local Bifurcations of Critical Periods for a Class of Reaction-Diffusion Equations

GU Jieping[1], HUANG Wentao[1], CHEN Ting[2]

(1. *College of Mathematics and Statistics*, *Guangxi Normal University*, *Guilin*, *Guangxi* 541006, *P.R.China*;
2. *School of Statistics and Mathematics*, *Guangdong University of Finance and Economics*, *Guangzhou* 510320, *P.R.China*)

Abstract: The small-amplitude solitary periodic wave solutions and the local critical periodic bifurcations of the traveling wave equations for a class of reaction-diffusion equations with quintic nonlinear reaction terms and constant diffusion terms were studied. First, the reaction-diffusion equation was transformed into the corresponding traveling wave system through traveling wave transformation. The first 8 singular point quantities of the system were calculated with the singular point value method and the computer algebra software MATH-

* **收稿日期：** 2020-09-07; **修订日期：** 2020-09-23

基金项目： 国家自然科学基金(12061016;12001112); 广西自然科学基金(重点项目)(2016GXNSFDA380031); 广西研究生教育创新计划项目(YCSW2020105)

作者简介： 古结平(1996—), 男, 硕士生(E-mail: gujieping3032@163.com);
黄文韬(1966—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: huangwentao@163.com);
陈挺(1989—), 男, 博士(E-mail: chenting0715@126.com).

引用格式： 古结平, 黄文韬, 陈挺. 一类反应扩散方程的孤立周期波和局部临界周期分支[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(2): 221-232.

EMATICA. Then, 2 center conditions for the singular point of the system were obtained, 8 limit cycles were proved to bifurcate at the origin of the traveling wave system, and 8 small-amplitude solitary periodic wave solutions were found to exist in the corresponding nonlinear reaction-diffusion equation. Furthermore, through computation of the period constants, the weak center order for the origin of the traveling wave system was derived. Then, the system was proved to have at most 3 local critical periodic bifurcations and be able to reach the 3 bifurcations. Moreover, the analysis of the critical periodic bifurcations of the traveling wave system reveals that the reaction-diffusion equation has 3 critical periodic wavelengths.

Key words: reaction-diffusion equation; singular point quantity; limit cycle; solitary periodic wave; critical period bifurcation

引　　言

反应扩散方程是一类特殊的非线性波方程,它在不同科学领域对各种非线性现象的定性描述中起着重要作用[1],是非线性科学研究中的一个热点问题.现实世界中大量的实际问题能够与反应扩散方程相联系,例如传热传质、流体力学、土壤湿度、病毒生长、生物种群等.反应扩散方程包括反应项和扩散项,其典型的形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+f(u,u_x)\ ,\tag{1}$$

其中 $u=u(x,t)$ 表示关于 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 的密度或浓度.方程(1)等号右边的第一项描述的是扩散项,对 $\forall u\geqslant 0$, 扩散函数 $D(u)$ 满足 $D(u)>0$; 等号右边第二项是反应项.近年来,对于非线性波方程的孤立周期波的研究吸引了许多学者的兴趣.文献[2]研究了一类广义 BBM 方程的孤立波和周期波的存在性问题.文献[3]给出了一类奇异摄动高阶 KdV 方程的孤立波解.文献[4]讨论了细菌生长的反应扩散模型行波解的存在性且得到了一个近似解.文献[5]探索了振荡反应中周期行波发生的条件以及波的稳定性.

方程(1)的一个行波是形如 $u(x,t)=\phi(x-ct)=\phi(\xi)$ 的解,其中 c 为波速, $\xi=x-ct$.一个周期波列是对应周期函数 ϕ 的行波.众所周知,许多非线性波方程可以通过行波变换转换为平面动力系统(行波系统),从而能够运用微分方程的定性理论和分支理论去研究.经典的研究方法可参阅文献[6].将 $u(x,t)=\phi(x-ct)=\phi(\xi)$ 代入方程(1),可得

$$D(\phi)\ddot{\phi}+c\dot{\phi}+D'(\phi)(\dot{\phi})^2+f(\phi,\dot{\phi})=0,\tag{2}$$

这里 $(\dot{\ })=\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$.令 $v:=\dot{\phi}$ 及做尺度变换 $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau=D(\phi)$, 系统(2)等价于下列平面动力系统(行波系统):

$$\begin{cases}\dot{\phi}=D(\phi)v,\\ \dot{v}=-cv-f(\phi,v)-D'(\phi)v^2.\end{cases}\tag{3}$$

在系统(3)的奇点是中心的情况下,会有连续的周期波列(周期行波解)展开于方程(1)的均匀稳态解[7].如果系统(3)在奇点的邻域出现 m 个极限环,那么会有 m 个孤立周期行波或孤立周期波列接近系统(1)的稳态解[7-8].我们可以通过研究中心类型奇点周期轨道的性质,从而了解围绕对应稳态解的连续周期波列的情况.文献[7]研究了一类含有常数扩散项和三次反应项的反应扩散方程,获得从稳态解最多能分支出 4 个小振幅孤立周期波(SAIPW)的结果.文献[8]中讨论了一类含有常数扩散项和四次反应项的反应扩散方程的情形.更多关于行波方程的周期行波和 Hopf 分支的研究可查看文献[9-10].此外,与中心和极限环紧密联系的一个重要领域是微分系统的局部临界周期.在 1989 年,文献[11]通过类比 Bautin 研究极限环的方法,首次引入细中心和局部临界周期分支的概念,建立了局部临界周期分支理论,且研究了二次系统的局部临界周期分支.对于从系统的细中心最多能分支出几个局部临界周期的问题,一些经典系统已经被研究且获得一些成果.对于线性中心经三次齐次非线性扰动的临界周期分支问题已经被解决[12].三次 Kukles 系统[13]、可逆三次系统[14]和四次 Kukles 系统[8]的临界周期分支问题也得到了解决.在文献[8]中,笔者用临界周期分支

的方法讨论了一类反应扩散方程的周期波解和周期波长问题.

国内外学者对反应扩散方程的研究已经取得了一些成果,但对含更高次反应项的反应扩散方程和利用极限环理论去研究还较少.本文受到文献[8]的启发,考虑下述一类含有常数扩散项和五次反应项的反应扩散方程的 SAIPW 和局部临界周期波长问题:

$$u_t = du_{xx} - \frac{1}{2}u + f_{01}u_x + \frac{3}{2}u^2 + f_{02}u_x^2 - u^3 + f_{12}uu_x^2 + f_{03}u_x^3 + f_{13}uu_x^3 + f_{04}u_x^4 + f_{14}uu_x^4 + f_{05}u_x^5, \tag{4}$$

这里 $u = u(x,t)$, $f_{i,j} \in \mathbb{R}$, $d > 0$, $\lambda := (d, f_{01}, \cdots, f_{14}, f_{05})$.

本文的结构如下:第 1 节给出一些必要的基础知识和结果.第 2 节首先运用行波变换将非线性波方程转换为对应的行波系统;然后利用奇点量方法计算出该系统的前几阶奇点量,探索该系统奇点的中心条件;证明了行波系统原点处能分支出的极限环最大个数,即对应的非线性反应扩散方程存在 SAIPW 解最多个数.第 3 节借助周期常数的计算,研究行波系统原点的细中心阶数,并证明该系统最多能分支出的局部临界周期个数;而后再通过分析行波系统的临界周期分支得到对应反应扩散方程有多少个临界周期波长.第 4 节给出本文的结论和展望.

1　预备知识

考虑如下实多项式微分系统:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x,y,\lambda) = X(x,y,\lambda), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_k(x,y,\lambda) = Y(x,y,\lambda), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\lambda \in \Lambda$, Λ 是参数集.假设函数 $X(x,y,\lambda)$ 和 $Y(x,y,\lambda)$ 在原点的邻域内解析且原点是系统(5)的中心型奇点.利用变换 $z = x + y\mathrm{i}$, $w = x - y\mathrm{i}$, $T = s\mathrm{i}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, 微分系统(5)可转换为复系统:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dT} = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\sum\limits_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} \right) = Z(z,w), \\ \dfrac{dw}{dT} = -w - \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\sum\limits_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^{\alpha} z^{\beta} \right) = -W(z,w), \end{cases} \tag{6}$$

注意,系统(6)的系数是有共轭关系的,即 $a_{\alpha\beta} = \overline{b_{\alpha\beta}}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 2,3,\cdots$, 我们称系统(6)是实系统(5)的伴随复系统[15].

对充分小的 h, 设 $P(h,\lambda)$ 为系统(5)通过非零点 $(h,0)$ 的闭轨的最小周期函数.文献[11]给出了周期函数 $P(h,\lambda)$ 的表达式:

$$P(h,\lambda) = 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}(\lambda) h^{2k}, \tag{7}$$

P_{2k} 称为系统(5)原点的第 k 阶周期常数.

定义 1[11]　若存在 $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_* \in \Lambda$, 使得 $P_2(\lambda_*) = P_4(\lambda_*) = \cdots = P_{2k}(\lambda_*) = 0$, $P_{2k+2}(\lambda_*) \neq 0$, 则称系统(5)的原点为对参数 λ_* 的 k 阶细中心.若 $k = 0$, 则原点是粗中心;若对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 都有 $P_{2k}(\lambda_*) = 0$, 则原点是等时中心.

定义 2[11]　考虑有限函数族 $f_j: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $j = 1,2,\cdots,k$.实(复)代数簇 $V(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 定义为 $\lambda \in \mathbb{R}^N$ $(\mathbb{C}^N)$ 的集合,使得 $f_j(\lambda) = 0$, $j = 1,2,\cdots,k$.对 $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, 如果

1) $\lambda_* \in \mathbb{R}^N$ 的任一邻域包含有 $\lambda \in V(f_1, f_2, \cdots, f_{k-1})$, 使得 $f_k(\lambda) f(\lambda) < 0$;

2) 代数簇 $V(f_1, f_2, \cdots, f_j)$, $2 \leqslant j \leqslant k-1$, 若 $\lambda \in V(f_1, f_2, \cdots, f_j)$ 且 $f_{j+1}(\lambda) \neq 0$, 则 λ 的任一邻域 W 包含有 $\sigma \in V(f_1, f_2, \cdots, f_{j-1})$, 使得 $f_j(\sigma) f_{j+1}(\lambda) < 0$;

3) 若 $\lambda \in V(f_1)$ 且 $f_2(\lambda) \neq 0$, 则 λ 的任一开邻域包含一个 σ, 使得 $f_1(\sigma)f_2(\lambda) < 0$.
那么就说 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 在 $\lambda_* \in V(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 关于 f 是无关的.

引理 1[11] 若参数 $\lambda = \lambda_*$ 时,系统(5)的中心 O 是 k 阶细中心,则至多有 k 个临界周期从中心 O 分支出来.进一步地,如果周期常数 $P_2, P_4, \cdots, P_{2k}$ 在 λ_* 关于 P_{2k+2} 是无关的,那么恰有 $m(m \leqslant k)$ 个临界周期从中心 O 分支出来.

由文献[16]中定理 5.4 可知,系统(5)原点的第一个非零周期常数 P_{2k} 和系统(6)原点的第一个非零复周期常数 τ_k 满足以下关系:

$$P_{2k} = -\pi\tau_k . \tag{8}$$

计算系统(6)原点的复周期常数 τ_k 的详细方法见文献[17].

假设复周期常数 τ_i 取决于 k 个独立参数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 即 $\tau_i = \tau_i(\lambda) = \tau_i(a_1, a_2, \cdots, a_k)$.由等式(8)以及文献[18]中定理 2, 我们有下述用于证明系统奇点存在局部临界周期的充分性引理.

引理 2[18] 对于系统(6)的原点,若存在 $\lambda_* = (a_{1c}, a_{2c}, \cdots, a_{kc})$, 使得

$$\tau_i(\lambda_*) = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,k,\ \tau_{k+1}(\lambda_*) \neq 0, \qquad \text{and} \qquad \det\left[\frac{\partial(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k)}{\partial(a_1, a_2, \cdots, a_k)}\right]_{\lambda_*} \neq 0, \tag{9}$$

则通过对 λ_* 的小扰动,系统(6)恰好有 k 个局部临界周期从原点分支出来.

2 奇点量、连续周期波列和 SAIPW

在这一节中,我们将主要探索反应扩散方程(4)稳态解 $u(x,t) \equiv \alpha$ 的周期波列的性质,这一目标可通过研究方程(4)对应的行波系统细焦点 $(\alpha,0)$ 的性质来实现.通过计算行波系统的伴随复系统的前几阶奇点量,寻找系统奇点的中心条件以及最大 SAIPW 个数.

Mañosa[7]受到文献[9]的启发,提出了下述假设.这一假设构建了类型(1)非线性波方程的稳态解和对应行波系统的细焦点之间的桥梁,也是研究类型(1)非线性波方程行波解存在性的重要途径.

假设 1 方程(1)中的扩散函数 $D(u)$ 和反应项 $f(u,u_x)$ 满足以下条件:

(i) $f(0,0) = f(1,0) = 0, f(\alpha,0) = 0$, 对 $\forall \alpha \in (0,1)$; 否则, $f(u,0) \neq 0$.

(ii) $f(\phi,v) \in C^{\omega}(\mathbb{R}^2), f_{\phi}(0,0) < 0, f_{\phi}(\alpha,0) > 0$ 且 $f_{\phi}(1,0) < 0$.

(iii) $D(u) \in C^{\omega}(\mathbb{R})$, 对 $\forall u \geqslant 0$, 有 $D(u) > 0$.

显然,在上述假设条件之下,点 $p_0(0,0), p_1(1,0)$ 和 $p_{\alpha}(\alpha,0)$ 是系统(3)对应于方程(1)的稳态解的奇点,此外没有其他奇点.

我们记 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\phi_*,0)$ 为行波系统(3)在奇点 $(\phi_*,0)$ 的线性化系统的系数矩阵, $\lambda_{\mathrm{spec}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\phi_*,0))$ 为矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\phi_*,0)$ 的特征值,它们的表达式如下:

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\phi_*,0) = \begin{pmatrix} 0 & D(\phi_*) \\ -f_{\phi}(\phi_*,0) & -c - f_v(\phi_*,0) \end{pmatrix}, \ \lambda_{\mathrm{spec}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\phi_*,0)) = \left\{\frac{\gamma_{\phi_*} \pm \sqrt{\Delta_{\phi_*}}}{2}\right\},$$

其中 $\gamma_{\phi_*} = -c - f_v(\phi_*,0), \Delta_{\phi_*} = (c + f_v(\phi_*,0))^2 - 4D(\phi_*)f_{\phi}(\phi_*,0)$.将假设 1 的条件(ii)和(iii)代入以上表达式计算可知, p_0, p_1 是系统(3)的双曲鞍点.若 $\Delta_{\alpha} \geqslant 0$, 则 p_{α} 是结点;若 $\Delta_{\alpha} < 0$ 且 $\gamma_{\alpha} \neq 0$, 则 p_{α} 是焦点.以上两种情况中, p_{α} 的稳定性由 γ_{α} 的符号决定.若 $\gamma_{\alpha} = 0$, 即当 $c = -f_v(\alpha,0)$ 时,此时 $\Delta_{\alpha} < 0$, 故 $\lambda_{\mathrm{spec}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(p_{\alpha})) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$; 在这种情况下, p_{α} 是细焦点且从方程(1)的稳态解 $u(x,t) \equiv \alpha$ 可能分支出 SAIPW[7].

在下面的讨论中,除了特别说明之外,总是限制 $D(u)$ 为常数,即方程(1)包含常数扩散项的情况.考虑如下含有五次反应项 $f(u,u_x)$ 的反应扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i+j=1}^{5} f_{ij}u^i u_x^j, \tag{10}$$

其中 $d > 0, f_{ij} \in \mathbb{R}$.令 $f_{10} < 0, f_{20} = -f_{10}(\alpha + 1)/\alpha, f_{30} = f_{10}/\alpha, f_{40} = f_{50} = 0, \alpha \in (0,1)$, 显然,方程(10)满足假设 1 的条件.方程(10)可转换为形如系统(3)的行波系统：

$$\begin{cases}\dot{\phi} = dv, \\ \dot{v} = -cv - f_{10}\phi - f_{01}v + \dfrac{f_{10}(\alpha+1)}{\alpha}\phi^2 - f_{11}\phi v - f_{02}v^2 - \dfrac{f_{10}}{\alpha}\phi^3 - f_{21}\phi^2 v - f_{12}\phi v^2 - f_{03}v^3 - \\ \qquad f_{31}\phi^3 v - f_{22}\phi^2 v^2 - f_{13}\phi v^3 - f_{04}v^4 - f_{41}\phi^4 v - f_{32}\phi^3 v^2 - f_{23}\phi^2 v^3 - f_{14}\phi v^4 - f_{05}v^5.\end{cases} \tag{11}$$

对于这个系统,我们计算得

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\alpha,0) = \begin{pmatrix} 0 & d \\ f_{10}(1-\alpha) & -c - f_{01} - f_{11}\alpha - f_{21}\alpha^2 - f_{31}\alpha^3 - f_{41}\alpha^4 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{\mathrm{spec}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\alpha,0)) = \left\{\frac{\gamma_\alpha \pm \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}\right\},$$

其中

$$\gamma_\alpha = -c - (f_{01} + f_{11}\alpha + f_{21}\alpha^2 + f_{31}\alpha^3 + f_{41}\alpha^4),$$

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha = {} & c^2 + 2cf_{01} + f_{01}^2 + 4df_{10} - 4df_{10}\alpha + 2cf_{11}\alpha + 2f_{01}f_{11}\alpha + f_{11}^2\alpha^2 + 2cf_{21}\alpha^2 + 2f_{01}f_{21}\alpha^2 + \\ & 2f_{11}f_{21}\alpha^3 + 2cf_{31}\alpha^3 + 2f_{01}f_{31}\alpha^3 + f_{21}^2\alpha^4 + 2f_{11}f_{31}\alpha^4 + 2cf_{41}\alpha^4 + 2f_{01}f_{41}\alpha^4 + \\ & 2f_{21}f_{31}\alpha^5 + 2f_{11}f_{41}\alpha^5 + f_{31}^2\alpha^6 + 2f_{21}f_{41}\alpha^6 + 2f_{31}f_{41}\alpha^7 + f_{41}^2\alpha^8.\end{aligned}$$

我们令 $c = c_* = -(f_{01} + f_{11}\alpha + f_{21}\alpha^2 + f_{31}\alpha^3 + f_{41}\alpha^4)$, 得 $\gamma_\alpha = 0, \Delta_\alpha = -4df_{10}(\alpha - 1) < 0$, 所以 $\lambda_{\mathrm{spec}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{X}}(\alpha, 0)) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.由此可知, $(\alpha,0)$ 是细焦点且从稳态解 $u(x,t) \equiv \alpha$ 可能分支 SAIPW.

对于方程(4),对照上面有 $\alpha = 1/2$, 下面我们讨论方程(4)在稳态解 $u(x,t) \equiv 1/2$ 的 SAIPW 分支.为了讨论方便,我们将方程(4)对应的行波系统奇点 $(1/2,0)$ 平移到坐标原点且进行尺度变换,即令 $x = (\phi - 1/2)/(-2\sqrt{d}), y = v$ 且 $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s = 2/\sqrt{d}$, 可得到方程(4)对应的平面微分系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = x - \dfrac{2f_{02} + f_{12}}{\sqrt{d}}y^2 - 16dx^3 + 4f_{12}xy^2 - \dfrac{2f_{03} + f_{13}}{\sqrt{d}}y^3 + 4f_{13}xy^3 - \\ \qquad \dfrac{2f_{04} + f_{14}}{\sqrt{d}}y^4 + 4f_{14}xy^4 - \dfrac{2f_{05}}{\sqrt{d}}y^5.\end{cases} \tag{12}$$

对系统(12)做变换 $z = x + y\mathrm{i}, w = x - y\mathrm{i}, T = s\mathrm{i}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}$, 我们得到它的伴随复系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T} = z + a_{20}z^2 + a_{11}zw + a_{02}w^2 + a_{30}z^3 + a_{21}z^2w + a_{12}zw^2 + a_{03}w^3 + a_{40}z^4 + a_{31}z^3w + \\ \qquad a_{22}z^2w^2 + a_{13}zw^3 + a_{04}w^4 + a_{50}z^5 + a_{41}z^4w + a_{32}z^3w^2 + a_{23}z^2w^3 + a_{14}zw^4 + a_{05}w^5, \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T} = -(w + b_{20}w^2 + b_{11}wz + b_{02}z^2 + b_{30}w^3 + b_{21}w^2z + b_{12}wz^2 + b_{03}z^3 + b_{40}w^4 + b_{31}w^3z + \\ \qquad b_{22}w^2z^2 + b_{13}wz^3 + b_{04}z^4 + b_{50}w^5 + b_{41}w^4z + b_{32}w^3z^2 + b_{23}w^2z^3 + b_{14}wz^4 + b_{05}z^5),\end{cases} \tag{13}$$

其中

$$a_{20} = a_{02} = \frac{2f_{02} + f_{12}}{4\sqrt{d}},\ a_{11} = -\frac{2f_{02} + f_{12}}{2\sqrt{d}},\ a_{30} = \overline{a_{03}} = -2d - \frac{f_{12}}{2} - \frac{2f_{03} + f_{13}}{8\sqrt{d}}\mathrm{i},$$

$$a_{21} = \overline{a_{12}} = -6d + \frac{f_{12}}{2} + \frac{6f_{03} + 3f_{13}}{8\sqrt{d}}\mathrm{i},\ a_{40} = \overline{a_{04}} = -\frac{2f_{04} + f_{14}}{16\sqrt{d}} + \frac{f_{13}}{4}\mathrm{i},\ a_{31} = \overline{a_{13}} = \frac{2f_{04} + f_{14}}{4\sqrt{d}} - \frac{f_{13}}{2}\mathrm{i},$$

$$a_{22}=-\frac{6f_{04}+3f_{14}}{8\sqrt{d}},\ a_{50}=\overline{a_{05}}=\frac{f_{14}}{8}+\frac{f_{05}}{16\sqrt{d}}\mathrm{i},\ a_{41}=\overline{a_{14}}=-\frac{3f_{14}}{8}-\frac{5f_{05}}{16\sqrt{d}}\mathrm{i},\ a_{32}=\overline{a_{23}}=\frac{f_{14}}{4}+\frac{5f_{05}}{8\sqrt{d}}\mathrm{i},$$

$$a_{ij}=\overline{b_{ij}},\qquad i\geqslant 0,\ j\geqslant 0,\ i+j=2,3,4,5.$$

通过计算复系统(13)原点的奇点量,再由实系统奇点的焦点量与伴随复系统奇点的奇点量之间的等价关系,可以确定从实系统(12)原点分支出的小振幅极限环个数,从而获得从方程(4)的稳态解 $u(x,t)\equiv 1/2$ 分支出的 SAIPW 数目.

运用文献[19]中定理 2 的递推公式进行仔细计算并分析计算结果,我们有以下定理.

定理 1 复系统(13)的前 8 个奇点量全部为零,当且仅当满足下列条件之一:

$K_1=\{\lambda\in\mathbb{R}^9: f_{03}=f_{05}=f_{13}=0\}$;

$K_2=\{\lambda\in\mathbb{R}^9: 2f_{03}+f_{13}=0,\ f_{05}=0,\ 2f_{04}+f_{14}=0,\ 2f_{02}+f_{12}=0\}$.

证明 必要性.将系统(13)的系数代入文献[19]中定理 2 的递推公式进行计算,可得 $\mu_1=3(2f_{03}+f_{13})\mathrm{i}/(4\sqrt{d})$.令 $f_{03}=-f_{13}/2$,得 $\mu_1=0$ 且 $\mu_2=(5f_{05}-12f_{02}f_{13}-6f_{12}f_{13})\mathrm{i}/(4\sqrt{d})$.再令 $f_{05}=6f_{13}(2f_{02}+f_{12})/5$,得 $\mu_2=0$ 且 $\mu_3=-f_{13}(416df_{02}+14f_{04}+208df_{12}-120f_{02}f_{12}-60f_{12}^2+7f_{14})\mathrm{i}/(16\sqrt{d})$.取 $f_{04}=(-416df_{02}-208df_{12}+120f_{02}f_{12}+60f_{12}^2-7f_{14})/14$,得 $\mu_3=0$ 且

$$\mu_4=-\frac{f_{13}(2f_{02}+f_{12})(8\,384d^2+11\,760f_{02}^2+9\,200df_{12}+11\,760f_{02}f_{12}+1\,020f_{12}^2-343f_{14})}{280\sqrt{d}}\mathrm{i}.$$

再取 $f_{14}=4(2\,096d^2+2\,940f_{02}^2+2\,300df_{12}+2\,940f_{02}f_{12}+255f_{12}^2)/343$,得 $\mu_4=0$ 且

$$\mu_5=-\frac{f_{13}(2f_{02}+f_{12})F_1}{102\,900\sqrt{d}}\mathrm{i},\ \mu_6=-\frac{32f_{13}(2f_{02}+f_{12})F_2}{5\,294\,205\sqrt{d}}\mathrm{i},$$

$$\mu_7=\frac{f_{13}(2f_{02}+f_{12})F_3}{6\,573\,529\,972\,428\,353\,278\,491\,543\,853\,065d^{3/2}}\mathrm{i},\ \mu_8=\frac{f_{13}(2f_{02}+f_{12})F_4}{F_0}\mathrm{i},$$

这里

$$\begin{aligned}F_0={}&899\,184\,838\,685\,683\,965\,029\,890\,839\,471\,690\,326\,604\,873\,618\,006\,549\\&674\,053\,265\,479\,127\,114\,300\,359\,926\,555\,625\,490\,075\,367\,578\,280d^{5/2},\\F_1={}&60\,868\,480d^3+611\,520df_{02}^2+34\,660\,160d^2f_{12}+611\,520df_{02}f_{12}+16\,934\,400f_{02}^2f_{12}-\\&12\,059\,400df_{12}^2+16\,934\,400f_{02}f_{12}^2+5\,400\,000f_{12}^3-64\,827f_{13}^2,\\F_2={}&2\,480\,236\,144d^4-282\,159\,444d^2f_{02}^2-171\,143\,280f_{02}^4+529\,318\,928d^3f_{12}-\\&282\,159\,444d^2f_{02}f_{12}+810\,368\,811df_{02}^2f_{12}-342\,286\,560f_{02}^3f_{12}-\\&731\,923\,266d^2f_{12}^2+810\,368\,811df_{02}f_{12}^2-371\,974\,680f_{02}^2f_{12}^2+\\&352\,386\,081df_{12}^3-200\,831\,400f_{02}f_{12}^3-51\,058\,755f_{12}^4,\end{aligned}$$

F_3 和 F_4 也为 d, f_{02}, f_{12} 的表达式,因其表达式较复杂,故在此省略.

若 $f_{13}=0$,则 $f_{05}=f_{03}=0$ 且前 8 个奇点量全都为零.因此,我们得到条件 K_1.

若 $2f_{02}+f_{12}=0$,则 $f_{04}=-f_{14}/2$, $f_{05}=0$, $f_{03}=-f_{13}/2$ 且前 8 个奇点量全都为零.因此,我们得到条件 K_2.

若 $f_{13}(2f_{02}+f_{12})\neq 0$,不失一般性,我们取 $d=1$,得

$\mathrm{Res}(F_2,F_3,f_{02})=M_1$,

$\mathrm{Res}(F_2,F_4,f_{02})=M_2$,

$\mathrm{Res}(M_1,M_2,f_{12})=50\,096\,392\,356\,781\,803\,791\,886\,937\,692\,913\,903\,439\,852\,161\,558\,375\,638\cdots$,

其中,$\mathrm{Res}(Y_1,Y_2,x)$ 是多项式 Y_1 和 Y_2 关于变量 x 的结式,M_1 和 M_2 分别是 f_{12} 的 20 次和 28 次幂多项式.因为 $\mathrm{Res}(M_1,M_2,f_{12})\neq 0$,所以 $M_1=M_2=0$ 没有实根 f_{12}.所以,当 $f_{13}(2f_{02}+f_{12})\neq 0$ 且 $d>0$ 时,存在 $\mu_1=$

$\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6=\mu_7=0,\mu_8\neq 0$.因此,系统(13)的细奇点的最高阶数为 8.

充分性.由必要性的证明过程容易看到,如果 $\lambda\in K_1\cup K_2$, 那么

$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5=\mu_6=\mu_7=\mu_8=0.$$

由实系统(12)原点的焦点量与伴随复系统(13)原点的奇点量之间的等价关系,我们有以下定理.

定理 2　实平面解析系统(12)的原点为中心点(系统(13)的原点为复中心点),或等价地说,非线性反应扩散方程(4)有连续的周期波列以恒定波速 $c=c_*$ 围绕稳态解 $u(x,t)\equiv 1/2$, 当且仅当 $\lambda\in K_1\cup K_2$.

证明　当条件 K_1 满足时,系统(12)可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=-y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=x-\dfrac{2f_{02}+f_{12}}{\sqrt{d}}y^2-16dx^3+4f_{12}xy^2-\dfrac{2f_{04}+f_{14}}{\sqrt{d}}y^4+4f_{14}xy^4,\end{cases}\tag{14}$$

显然,系统(14)是关于 x 轴对称的.因此,若条件 K_1 满足,则系统(12)的原点是一个中心点.

当条件 K_2 满足时,系统(12)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=-y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=x-16dx^3+4f_{12}xy^2+4f_{13}xy^3+4f_{14}xy^4.\end{cases}\tag{15}$$

显然,系统(15)是关于 y 轴对称的.因此,若条件 K_2 满足,则系统(12)的原点是一个中心点.

由定理 1 的证明过程,我们可得到以下结果.

定理 3　系统(13)的原点是一个 8 阶细奇点(系统(12)的原点是一个 8 阶细焦点),当且仅当

$$\begin{cases}f_{03}=-\dfrac{f_{13}}{2},\ f_{05}=\dfrac{6}{5}f_{13}(2f_{02}+f_{12}),\\[2mm]f_{04}=\dfrac{1}{14}(-416df_{02}-208df_{12}+120f_{02}f_{12}+60f_{12}^2-7f_{14}),\\[2mm]f_{14}=\dfrac{4}{343}(2\,096d^2+2\,940f_{02}^2+2\,300df_{12}+2\,940f_{02}f_{12}+255f_{12}^2),\\[2mm]f_{13}(2f_{02}+f_{12})\neq 0,\ F_1=F_2=F_3=0.\end{cases}\tag{16}$$

接下来,不失一般性,我们假设 $d=1$.通过解方程 $F_1=F_2=F_3=0$, 可得到它的 8 个实数解,其中一个解可表示为

$$\begin{cases}f_{02}=1.183\,192\,875\,224\,389\,171\,822\,953\,016\,745\,190\,502\,742\\\qquad 741\,695\,552\,312\,503\,317\,931\,798\,334\,9\cdots,\\f_{12}=3.098\,626\,407\,619\,032\,782\,251\,985\,495\,470\,055\,427\,434\\\qquad 902\,104\,336\,483\,559\,209\,455\,915\,670\,1\cdots,\\f_{13}=-86.234\,298\,596\,256\,212\,896\,911\,242\,255\,584\,806\,241\\\qquad 939\,460\,205\,852\,229\,547\,981\,573\,713\,98\cdots.\end{cases}\tag{17}$$

经过仔细地计算,我们得到下面的 Jacobi 行列式:

$$\det\left[\frac{\partial(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5,\mu_6,\mu_7)}{\partial(f_{02},f_{12},f_{03},f_{13},f_{04},f_{14},f_{05})}\right]\Bigg|_{(16,17),d=1}\approx -1.214\,371\,642\,460\,91\times 10^{25}\mathrm{i}\neq 0.$$

根据文献[14]中定理 2 以及焦点量和奇点量的等价关系[15],通过对参数 $\lambda=(d,f_{01},\cdots,f_{14},f_{05})$ 的临界值进行适当的扰动,使得从系统(12)的原点恰好能分支出 8 个小振幅极限环.由文献[7],我们得到本节的主要结果.

定理 4 若非线性反应扩散方程(4)满足条件 $f_{10} < 0$, $f_{20} = -f_{10}(\alpha + 1)/\alpha$, $f_{30} = f_{10}/\alpha$, 则从方程(4)的稳态解 $u(x,t) \equiv 1/2$ 最多能分支出 8 个 SAIPW. 另外,存在参数值 λ_*, 使得从非线性反应扩散方程(4)的稳态解 $u(x,t) \equiv 1/2$ 恰好能分支出 8 个 SAIPW.

3 细中心和局部临界周期分支

由文献[20],我们得到非线性方程(1)的连续周期波列 ϕ 的波长等价于系统(3)原点 O 的周期函数 $P(h,\lambda)$. 如果系统(3)原点 O 存在 m 个临界周期分支,则方程(1)的连续周期波列的波长的单调性发生 m 次变化,我们也称方程(1)具有 m 个临界周期波长. 通过变换 $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau = D(\phi) = d > 0$, $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s = b = 2/\sqrt{d} > 0$, 所以系统(4)在 $u(x,t) \equiv 1/2$ 附近的周期波列波长的单调性与系统(12)原点附近的周期轨的周期函数的单调性一致. 由本文中的定理 2 我们知道,如果 $\lambda \in K_1 \cup K_2$, 那么系统(12)的原点为中心点. 在此基础上,我们将继续讨论系统(12)的细中心和局部临界周期分支问题,分别考虑下述两种情形.

情形 K_1 $f_{03} = f_{05} = f_{13} = 0$.

我们将定理 1 的条件 K_1 代入文献[17]中的定理 3.1 的递推公式进行仔细地计算. 若 $f_{12} = 0$, 我们有 $\tau_1 = (-36d^2 - 4f_{02}^2)/(3d)$, 此时 $\tau_1 \neq 0$, 则系统(13)的原点是粗中心. 若 $f_{12} \neq 0$, 我们得到系统(13)原点的前两个复周期常数:

$$\tau_1 = \frac{H_1}{3d},\ \tau_2 = \frac{H_2}{216d^2},$$

其中

$$\begin{aligned} H_1 =& -36d^2 - 4f_{02}^2 + 3df_{12} - 4f_{02}f_{12} - f_{12}^2, \\ H_2 =& 832f_{02}^4 - 576df_{02}f_{04} + 720df_{02}^2f_{12} + 1\,664f_{02}^3f_{12} - 288df_{04}f_{12} + 720df_{02}f_{12}^2 + 1\,264f_{02}^2f_{12}^2 + \\ & 168df_{12}^3 + 432f_{02}f_{12}^3 + 56f_{12}^4 - 288df_{02}f_{14} - 12f_{02}^2f_{14} - 135df_{12}f_{14} - 12f_{02}f_{12}f_{14} - 3f_{12}^2f_{14}. \end{aligned}$$

若 $f_{02} = -f_{12}/2$, 我们有 $\tau_1 = f_{12} - 12d$, 令 $f_{12} = 12d$, 得 $\tau_1 = 0$ 且 $\tau_2 = (f_{14} - 192d^2)/2$. 取 $f_{14} = 192d^2$, 得 $\tau_2 = 0$ 且 $\tau_3 = -(69\,312d^4 + 1\,344d^2f_{04} + 7f_{04}^2)/(5d)$, 不失一般性,我们假设 $d = 1$, 容易发现 $\tau_3 = -(7f_{04}^2 + 1\,344f_{04} + 69\,312)/5 = 0$ 没有实数解, 故对 $d > 0$, 有 $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $\tau_3 \neq 0$. 因此, 系统(13)的原点是至多 2 阶的细中心. 若 $f_{02} \neq -f_{12}/2$, 令

$$\begin{aligned} f_{04} =& (832f_{02}^4 + 720df_{02}^2f_{12} + 1\,664f_{02}^3f_{12} + 720df_{02}f_{12}^2 + 1\,264f_{02}^2f_{12}^2 + 168df_{12}^3 + 432f_{02}f_{12}^3 + \\ & 56f_{12}^4 - 288df_{02}f_{14} - 12f_{02}^2f_{14} - 135df_{12}f_{14} - 12f_{02}f_{12}f_{14} - 3f_{12}^2f_{14})/(288d(2f_{02} + f_{12})), \end{aligned} \tag{18}$$

得 $\tau_2 = 0$. 如果 $f_{14} = 0$, 我们有

$$\tau_3 = \frac{H_3}{38\,880d^3(2f_{02} + f_{12})^2},$$

这里

$$\begin{aligned} H_3 =& -2\,703\,232f_{02}^8 + 2\,419\,776df_{02}^6f_{12} - 10\,812\,928f_{02}^2f_{12} + 7\,259\,328df_{02}^5f_{12}^2 - \\ & 18\,784\,968f_{02}^6f_{12}^2 + 8\,975\,046df_{02}^4f_{12}^3 - 18\,509\,656f_{02}^5f_{12}^3 + 5\,851\,212df_{02}^3f_{12}^4 - \\ & 11\,310\,254f_{02}^4f_{12}^4 + 2\,119\,863df_{02}^2f_{12}^5 - 4\,386\,164f_{02}^3f_{12}^5 + 404\,145df_{02}f_{12}^6 - \\ & 1\,053\,337f_{02}^2f_{12}^6 + 31\,605df_{12}^7 - 143\,043f_{02}f_{12}^7 - 8\,395f_{12}^8. \end{aligned}$$

不失一般性,假设 $d = 1$, 我们有

$$\begin{aligned} G_1 =& \mathrm{Res}(H_1, H_3, f_{02}) = \\ & 20\,615\,156\,961\,164\,666\,018\,463\,744 - 9\,642\,662\,634\,659\,388\,504\,145\,920f_{12} + \\ & 2\,053\,600\,305\,272\,250\,930\,561\,024f_{12}^2 - 266\,237\,080\,245\,870\,841\,036\,800f_{12}^3 + \\ & 23\,346\,212\,717\,189\,381\,750\,784f_{12}^4 - 1\,426\,915\,908\,889\,545\,277\,440f_{12}^5 + \end{aligned}$$

$$59\,822\,032\,075\,446\,288\,384 f_{12}^6 - 1\,604\,098\,933\,905\,162\,240 f_{12}^7 + 21\,504\,753\,678\,680\,064 f_{12}^8.$$

经过计算,我们发现 $G_1 = 0$ 没有实数解.因此,没有实数解满足方程 $H_1 = H_3 = 0$.故对 $d > 0$, 有 $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $\tau_3 \neq 0$, 所以,系统(13)的原点是至多 2 阶的细中心.若 $f_{14} \neq 0$, 我们有

$$\tau_3 = \frac{H_4}{4\,976\,640 d^3 (2f_{02} + f_{12})^2},$$

这里

$$\begin{aligned} H_4 =& -346\,013\,696 f_{02}^8 + 309\,731\,328 d f_{02}^6 f_{12} - 1\,384\,054\,784 f_{02}^7 f_{12} + 929\,193\,984 d f_{02}^5 f_{12}^2 - \\ & 567 f_{12}^4 f_{14}^2 - 2\,404\,475\,904 f_{02}^6 f_{12}^2 + 1\,148\,805\,888 d f_{02}^4 f_{12}^3 - 2\,369\,235\,968 f_{02}^5 f_{12}^3 + \\ & 748\,955\,136 d f_{02}^3 f_{12}^4 - 1\,447\,712\,512 f_{02}^4 f_{12}^4 + 271\,342\,464 d f_{02}^2 f_{12}^5 - 561\,428\,992 f_{02}^3 f_{12}^5 + \\ & 51\,730\,560 d f_{02} f_{12}^6 - 134\,827\,136 f_{02}^2 f_{12}^6 + 4\,045\,440 d f_{12}^7 - 18\,309\,504 f_{02} f_{12}^7 - 1\,074\,560 f_{12}^8 - \\ & 16\,969\,728 f_{02}^6 f_{14} + 13\,252\,608 d f_{02}^4 f_{12} f_{14} - 50\,909\,184 f_{02}^5 f_{12} f_{14} + 26\,505\,216 d f_{02}^3 f_{12}^2 f_{14} - \\ & 63\,560\,448 f_{02}^4 f_{12}^2 f_{14} + 19\,797\,696 d f_{02}^2 f_{12}^3 f_{14} - 42\,272\,256 f_{02}^3 f_{12}^3 f_{14} + 6\,545\,088 d f_{02} f_{12}^4 f_{14} - \\ & 15\,797\,088 f_{02}^2 f_{12}^4 f_{14} + 809\,496 d f_{12}^5 f_{14} - 3\,145\,824 f_{02} f_{12}^5 f_{14} - 260\,904 f_{12}^6 f_{14} - \\ & 12\,096 f_{02}^4 f_{14}^2 + 18\,144 d f_{02}^2 f_{12} f_{14}^2 - 24\,192 f_{02}^3 f_{12} f_{14}^2 + 18\,144 d f_{02} f_{12}^2 f_{14}^2 - \\ & 17\,388 f_{02}^2 f_{12}^2 f_{14}^2 + 3\,969 d f_{12}^3 f_{14}^2 - 5\,292 f_{02} f_{12}^3 f_{14}^2. \end{aligned}$$

不失一般性,假设 $d = 1$, $f_{14} = 1$, 我们有

$$\begin{aligned} G_2 =& \operatorname{Res}(H_1, H_4, f_{02}) = \\ & 334\,087\,967\,779\,619\,575\,729\,383\,014\,400 - 156\,526\,967\,543\,031\,197\,868\,648\,038\,400 f_{12} + \\ & 33\,398\,114\,198\,122\,706\,245\,779\,456\,000 f_{12}^2 - 4\,338\,208\,403\,256\,302\,398\,498\,406\,400 f_{12}^3 + \\ & 381\,094\,254\,312\,711\,670\,663\,741\,440 f_{12}^4 - 23\,328\,725\,328\,278\,954\,358\,865\,920 f_{12}^5 + \\ & 979\,307\,508\,219\,957\,812\,920\,320 f_{12}^6 - 26\,281\,556\,933\,102\,178\,140\,160 f_{12}^7 + \\ & 352\,333\,884\,271\,494\,168\,576 f_{12}^8. \end{aligned}$$

经过计算,我们发现 $G_2 = 0$ 没有实数解.因此,没有实数解满足方程 $H_1 = H_4 = 0$.故对 $d > 0$, 有 $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $\tau_3 \neq 0$, 所以,系统(13)的原点是至多 2 阶的细中心.

由以上讨论过程,我们得到以下结果.

定理 5　若 $\lambda_* \in K_1$, 则系统(13)的原点是一个阶数最大为 2 的细中心.此外,系统(13)原点是 $m(m = 0,1,2)$ 阶细中心,当且仅当 $\lambda_* \in K_1^m$, 其中

$$K_1^0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^9: f_{03} = f_{05} = f_{13} = 0, H_1 \neq 0\},$$

$$K_1^1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^9: f_{03} = f_{05} = f_{13} = 0, H_1 = 0, H_2 \neq 0\},$$

$$K_1^2 = \{\lambda \in \mathbb{R}^9: f_{03} = f_{05} = f_{13} = 0, H_1 = 0, H_2 = 0\}.$$

由上述定理,我们有以下结论.

定理 6　对于参数 λ_*, 若 $\lambda_* \in K_1^0$, 系统(13)没有局部临界周期从原点分支出来;若 $\lambda_* \in K_1^m(m = 1, 2)$, 系统(13)至多有 m 个局部临界周期从原点分支出来.此外,对任意正整数 $n(0 \leqslant n \leqslant m)$, 系统(13)恰好有 n 个局部临界周期从原点分支出来.

证明　我们只证明 $m = 2$ 的情形,其余情形证明方法类似.当 $f_{02} = -f_{12}/2$ 时,由式(8)可得

$$P_2 = (12d - f_{12})\pi, P_4 = (192d^2 - f_{14})\pi/2, \ P_6 = (69\,312d^4 + 1\,344d^2 f_{04} + 7f_{04}^2)\pi/(5d).$$

我们只需证明 P_2, P_4 在 $\lambda_* \in K_1^2$ 关于 P_6 是无关的.取

$$\begin{aligned} \lambda_* =& (d, f_{01}, f_{02}, f_{12}, f_{03}, f_{13}, f_{04}, f_{14}, f_{05}) = \\ & (d, f_{01}, -6d, 12d, 0, 0, f_{04}, 192d^2, 0) \in K_1^2 \subset V(P_2, P_4), \end{aligned}$$

对 λ_* 的任一邻域 U, 存在 $\lambda_1=(d,f_{01},-6d,12d,0,0,f_{04},192d^2+\varepsilon_1,0)\in U\subset V(P_2)$, 这里 $\varepsilon_1>0$ 充分小,使得 $P_4(\lambda_1)P_6(\lambda_1)=-(7f_{04}^2+1\,344d^2f_{04}+69\,312d^4)\pi^2\varepsilon_1/(10d)<0$.再取

$$\lambda_2=(d,f_{01},-6d,12d,0,0,f_{04},192d^2-\varepsilon_2,0)\in V(P_2),\qquad P_4(\lambda_2)\neq 0,$$

其中 $\varepsilon_2>0$, 对 λ_2 的任一邻域 U', 存在 $\lambda_3=(d,f_{01},-6d-\delta,12d+2\delta,0,0,f_{04},192d^2-\varepsilon_2,0)\in U'$, 这里 $\delta>0$ 充分小,使得 $P_2(\lambda_3)P_4(\lambda_2)=-\pi^2\delta\varepsilon_2<0$.所以满足定义 2 的条件,故 P_2,P_4 在 $\lambda_*\in K_1^2$ 关于 P_6 是无关的.由引理 1 可知,恰好有 2 个局部临界周期从系统(13)的原点分支出来.当 $f_{02}\neq -f_{12}/2$, $f_{14}=0$ 时,计算得

$$\det\left[\frac{\partial(\tau_1,\tau_2)}{\partial(f_{02},f_{12})}\right]\Bigg|_{(18),\,d=1,\,f_{14}=0}=H_5,\tag{19}$$

这里

$$H_5=-4(828f_{02}^4+135f_{02}^2f_{12}+1\,656f_{02}^3f_{12}+16f_{02}^4f_{12}+135f_{02}f_{12}^2+1\,227f_{02}^2f_{12}^2+32f_{02}^3f_{12}^2+36f_{12}^3+399f_{02}f_{12}^3+24f_{02}^2f_{12}^3+48f_{12}^4+8f_{02}f_{12}^4+f_{12}^5)/(81(2f_{02}+f_{12})).$$

进一步计算得

$$G_3=\mathrm{Res}(H_1,H_5,f_{12})=32(166\,464+113\,220f_{02}+28\,831f_{02}^2+3\,288f_{02}^3+144f_{02}^4)/(18+3f_{02}).$$

易知 $G_3=0$ 没有实数解,故式(19)不等于零.由引理 2 可知,通过对 λ_* 的小扰动,使得恰好有 2 个局部临界周期从系统(13)的原点分支出来.当 $(2f_{02}+f_{12})f_{14}\neq 0$ 时,不失一般性,取 $f_{14}=1$, 则

$$\det\left[\frac{\partial(\tau_1,\tau_2)}{\partial(f_{02},f_{12})}\right]\Bigg|_{(18),\,d=1,\,f_{14}=1}=H_6,\tag{20}$$

这里

$$H_6=-(36f_{02}^2+13\,248f_{02}^4-27f_{12}+36f_{02}f_{12}+2\,160f_{02}^2f_{12}+26\,496f_{02}^3f_{12}+256f_{02}^4f_{12}+9f_{12}^2+2\,160f_{02}f_{12}^2+19\,632f_{02}^2f_{12}^2+512f_{02}^3f_{12}^2+576f_{12}^3+6\,384f_{02}f_{12}^3+384f_{02}^2f_{12}^3+768f_{12}^4+128f_{02}f_{12}^4+16f_{12}^5)/(648f_{02}+324f_{12}).$$

进一步得 $G_4=\mathrm{Res}(H_1,H_6,f_{12})=(10\,650\,229+7\,244\,464f_{02}+1\,844\,992f_{02}^2+210\,432f_{02}^3+9\,216f_{02}^4)/(36+6f_{02})$.我们发现 $G_4=0$ 没有实数解,所以式(20)不等于零.由引理 2 可知,通过对 λ_* 的小扰动,使得恰好有 2 个局部临界周期从系统(13)的原点分支出来.

定理 7　在方程(4)的稳态解 $u(x,t)\equiv 1/2$ 邻域,若 $\lambda_*\in K_1^0$, 则没有临界周期波长,即连续周期波列的波长函数是单调的;若 $\lambda_*\in K_1^m(m=1,2)$, 则至多有 m 个临界周期波长.此外,对任意正整数 $n(0\leqslant n\leqslant m)$, 恰好有 n 个临界周期波长.

情形 K_2　$2f_{03}+f_{13}=0$, $f_{05}=0$, $2f_{04}+f_{14}=0$, $2f_{02}+f_{12}=0$.

我们将定理 1 的条件 K_2 代入文献[17]中定理 3.1 的递推公式计算,得到 $\tau_1=f_{12}-12d$.令 $f_{12}=12d$, 得 $\tau_1=0$ 且 $\tau_2=(f_{14}-192d^2)/2$.取 $f_{14}=192d^2$, 得 $\tau_2=0$ 且 $\tau_3=-3(80d^{3/2}-f_{13})(80d^{3/2}+f_{13})/20$.若 $f_{13}=80d^{3/2}$, 则 $\tau_3=0$ 且 $\tau_4=-18\,432d^4$; 若 $f_{13}=-80d^{3/2}$, 则 $\tau_3=0$ 且 $\tau_4=11\,008d^4$; 由于 $d>0$, 所以 τ_4 都不为零.因此,系统(13)的原点是至多 3 阶的细中心.

定理 8　若 $\lambda_*\in K_2$, 则系统(13)的原点是一个阶数最大为 3 的细中心.此外,系统(13)原点是 $m(m=0,1,2,3)$ 阶细中心,当且仅当 $\lambda\in K_2^m$, 其中

$$K_2^0=\{\lambda\in\mathbb{R}^9: 2f_{03}+f_{13}=0,\ f_{05}=0,\ 2f_{04}+f_{14}=0,\ f_{12}=-2f_{02}\neq 12d\},$$

$$K_2^1=\{\lambda\in\mathbb{R}^9: 2f_{03}+f_{13}=0,\ f_{05}=0,\ f_{14}=-2f_{04}\neq 192d^2,\ f_{12}=-2f_{02}=12d\},$$

$$K_2^2=\{\lambda\in\mathbb{R}^9: f_{13}=-2f_{03},\ f_{13}^2\neq 6\,400d^3,\ f_{05}=0,\ f_{14}=-2f_{04}=192d^2,\ f_{12}=-2f_{02}=12d\},$$

$$K_2^3=\{\lambda\in\mathbb{R}^9: f_{13}=-2f_{03},\ f_{13}^2=6\,400d^3,\ f_{05}=0,\ f_{14}=-2f_{04}=192d^2,\ f_{12}=-2f_{02}=12d\}.$$

由定理 8,我们有以下结果.

定理 9　对于参数 λ_*,若 $\lambda_* \in K_2^0$,则没有局部临界周期从系统(13)的原点分支出来;若 $\lambda_* \in K_2^m(m=1,2,3)$,则至多有 m 个局部临界周期从系统(13)的原点分支出来;此外,对任意正整数 $n(0 \leqslant n \leqslant m)$,恰好有 n 个局部临界周期从系统(13)的原点分支出来.

证明　我们只证明 $m=3$ 的情形,其余情形证明方法类似.令

$$\begin{aligned}\lambda_* &= (d, f_{01}, f_{02}, f_{12}, f_{03}, f_{13}, f_{04}, f_{14}, f_{05}) = \\ &\quad (d, f_{01}, -6d, 12d, -40d^{3/2}, 80d^{3/2}, -96d^2, 192d^2, 0) \in K_2^3,\end{aligned}$$

对任意 $d>0$,我们得到

$$\det\left[\frac{\partial(\tau_1,\tau_2,\tau_3)}{\partial(f_{12},f_{13},f_{14})}\right]\Bigg|_{\lambda_*} = -12d^{3/2} \neq 0.$$

由引理 2 可知,通过对 λ_* 的小扰动,使得恰好有 3 个局部临界周期从系统(13)原点分支出来.

定理 10　在方程(4)的稳态解 $u(x,t) \equiv 1/2$ 邻域,若 $\lambda_* \in K_2^0$,则没有临界周期波长,即连续周期波列的波长函数是单调的;若 $\lambda_* \in K_2^m(m=1,2,3)$,则至多有 m 个临界周期波长.此外,对任意正整数 $n(0 \leqslant n \leqslant m)$,恰好有 n 个临界周期波长.

4　结论和展望

本文对一类含有五次非线性反应项和常数扩散项的反应扩散方程(4)的 SAIPW 和局部临界周期波长分支问题进行了研究.通过研究其行波系统(2)原点的中心条件和小振幅极限环个数,得到了反应扩散方程(4)具有连续的周期波列的条件,以及得到了该方程存在 8 个 SAIPW .此外,本文还进一步得到了在周期波列条件下,反应扩散方程(4)最多具有 3 个临界周期波长,即连续周期波列的波长函数的单调性最多发生 3 次变化.对于反应扩散方程(1)是否存在等周期的周期波列,这是我们将需要考虑的一个问题;另外,对于一般的含有五次非线性反应项和常数扩散项的反应扩散方程,其最多有多少个 SAIPW,也是值得进一步研究的.

参考文献(References):

[1]　ARANSON I, KRAMER L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. *Review of Modern Physics*, 2001, **74**(1): 99-143.

[2]　CHEN A Y, GUO L N, DENG X J. Existence of solitary waves and periodic waves for a perturbed generalized BBM equation[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, **261**(10): 5324-5349.

[3]　ZHUANG K G, DU Z J, LIN X J. Solitary waves solutions of singularly perturbed higher-order KdV equation via geometric singular perturbation method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **80**(1/2): 629-635.

[4]　MANSOUR M B A. Traveling wave solutions of a reaction-diffusion model for bacterial growth[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2007, **383**(2): 466-472.

[5]　SHERRATT J A, SMITH M J. Periodic travelling waves in cyclic populations: field studies and reaction-diffusion models[J]. *Journal of the Royal Society Interface*, 2008, **5**(22): 483-505.

[6]　LI J B, WU J H, ZHU H P. Traveling waves for an integrable higher order KdV type wave equations[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, **16**(8): 2235-2260.

[7]　MAÑOSA V. Periodic travelling waves in nonlinear reaction-diffusion equations via multiple Hopf bifurcation[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, **18**(2): 241-257.

[8]　HUANG W T, CHEN T, LI J B. Isolated periodic wave trains and local critical wave lengths for a nonlinear reaction-diffusion equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **74**(5): 84-96.

[9] SANCHEAGARDUNO F, MAINI P K. Traveling wave phenomena in some degenerate reaction-diffusion equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 1995, **117**(2): 281-319.

[10] YANG G X. Hopf bifurcation of traveling wave solutions of delayed Fisher-KPP equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **220**(4): 213-220.

[11] CHICONE C, JACOBS M. Bifurcation of critical periods for plane vector fields[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, **312**(2): 433-486.

[12] ROMANOVSKI V G, HAN M A. Critical period bifurcations of a cubic system[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, **36**(18): 5011-5022.

[13] ROUSSEAU C, TONI B. Local bifurcations of critical periods in the reduced Kukles system[J]. *Canadian Journal of Mathematics*, 1997, **49**(2): 338-358.

[14] YU P, HAN M A. Critical periods of planar revertible vector field with third-degree polynomial functions[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, **19**(1): 419-433.

[15] LIU Y R, LI J B. Theory of values of singular point in complex autonomous differential systems[J]. *Science in China* (*Series A*), 1990, **33**: 10-24.

[16] 黄文韬. 微分自治系统的几类极限环分支与等时中心问题[D]. 博士学位论文. 长沙: 中南大学, 2004.(HUANG Wentao. Several classes of bifurcations of limit cycles and isochronous centers for differential autonomous systems[D]. PhD Thesis. Changsha: Central South University, 2004. (in Chinese))

[17] LIU Y R, HUANG W T. A new method to determine isochronous center conditions for polynomial differential systems[J]. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2003, **127**(2): 133-148.

[18] YU P, HAN M A. Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, **15**(7): 2191-2205.

[19] CHEN H B, LIU Y R. Linear recursion formulas of quantities of singular point and applications[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **148**(1): 163-171.

[20] GEYER A, VILLADELPRAT J. On the wave length of smooth periodic traveling waves of the Camassa-Holm equation[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **259**(6): 2317-2332.