

油藏油水两相流低阶模型算法*

贾欣鑫, 王雷, 张浩, 孙小玲, 段利亚, 王鑫

(齐鲁工业大学(山东省科学院)海洋仪器仪表研究所, 山东 青岛 266061)

摘要: 目前,油藏数值模拟主要采用的方法如有限元方法、有限容积法等,在油藏数值计算时均需要较长的计算时间,很大程度上限制了油藏注采的实时预测与快速动态模拟.该文以一种高效的数据处理方法(最佳正交分解(POD)方法)为基础,对油藏油、水两相流抽取特征函数,并对油藏两相流模型进行 Galerkin 投影得到新的低阶计算模型.数值计算表明,POD 方法所得到的特征向量能量具有最优的特征,能以较少的特征向量捕捉到数学模型中较大的“能量”,因此能最大限度地描述油藏的特征(压力、饱和度),对油藏偏微分方程模型起到较好的降阶作用.结论表明,低阶模型的计算结果与隐压显饱(IMPES)所得计算结果吻合较好,且能节省更多的计算时间,因此能较好地,在油藏注采数值模拟中进行历史拟合与仿真计算.

关键词: 油藏数值模拟; 低阶模型; 油水两相; 最佳正交分解

中图分类号: TK121 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410235

A Low-Order Model Method for 2-Phase Oil Reservoir Simulation

JIA Xinxin, WANG Lei, ZHANG Hao, SUN Xiaoling, DUAN Liya, WANG Xin
(*Institute of Oceanographic Instrumentation, Qilu University of Technology*
(*Shandong Academy of Sciences*), Qingdao, Shandong 266061, P.R.China)

Abstract: At present, the main methods used in reservoir numerical simulation, such as the finite element method and the finite volume method, require long calculation times, which limit their implementation in the real-time prediction and the reservoir production. An efficient data-processing method that based on the POD (proper orthogonal decomposition) was proposed to obtain the empirical coefficients and eigenfunctions of the oil-water 2-phase flow in the reservoir, and build a new low-order Galerkin calculation model. The numerical calculation indicates that, with the POD, the calculated eigenvector energy has proper features. Only a small number of eigenvalues can capture most of the energy, completely describe the reservoir characteristics (pressure, saturation), and help reduce the order of the partial differential equations. The calculation results of the low-order model are in good agreement with those from the IMPES, with much time saved. The proposed method applies well to history matching in numerical simulation of reservoir injection and production.

Key words: numerical simulation of reservoir; low-order model; oil-water 2-phase; proper orthogonal decomposition

* 收稿日期: 2020-08-11; 修订日期: 2021-03-08

基金项目: 国家自然科学基金(61702308;51504146);山东省重大科技创新工程(2018YFJH0705)

作者简介: 贾欣鑫(1983—),男,副研究员,博士(通讯作者. E-mail: jiaxx@qlu.edu.cn).

引用格式: 贾欣鑫,王雷,张浩,孙小玲,段利亚,王鑫.油藏油水两相流低阶模型算法[J].应用数学和力学,2021,42(9):891-899.

引言

目前,大多数油藏数值计算所使用的方法如有限单元方法^[1-2]、有限容积法^[3-4],在进行油田开采的实时控制与历史拟合问题时,都需要耗费大量的计算时间,这其中包括油藏的产量与油藏特征(含油饱和度、压力)的计算.近年来,油藏数值计算问题的研究工作者主要从数值解法入手进行解决,现在比较通用的解决方法是 Vinsome^[4]提出的多重网格法以及预处理共轭梯度算法^[5-6],以及与之配合使用的并行算法^[7-8],这些在油藏数值计算中取得了非常成功与广泛的应用.但是这些数值解法都是对油藏油水两相流偏微分方程离散求解,因此无法避免因方程组数量过大而导致的求解时间过长的问题.本文将湍流拟序结构分析中的最佳正交分解(POD)理论^[9-12],运用到油藏数值模拟计算中,并在该理论基础上提出了一种快速计算压力与饱和度的算法.该理论在流体流动的领域应用较多,Charbi 和 Qasem 等^[13]将其应用在多孔介质流动中,得到多孔介质流动的低阶模型.Vermeulen 等^[14]和 Wu 等^[15]将大尺度地下水流动模型低阶处理,得到地下裂缝与孔隙度的流体流动状态.丁鹏等^[16-17]在流动与数值传热领域将 POD 插值方法对不同反问题进行重构,计算表明,该方法较之有限容积法可节省至少几十倍时间.吴学红等^[18]应用 POD 方法计算了不可压缩流动问题快速计算的低阶模型.在油藏数值计算领域,Heijn 等^[19]和 Leask 等^[20]将其应用在油藏模型的单井注水宏观分析中,使用效果较为显著.Van Doren 和 Markovinović 等^[21]应用 POD 方法对单井水驱油进行低阶模型算法研究,依次优化了原计算模型结果.贾欣鑫和孙宪航等^[22-24]将低阶模型算法应用于油藏数值计算,建立了注采控制模型.在前期水驱油数值模拟研究基础上,本文拟采用 POD 方法分析油藏的主要特征(压力、油水饱和度),提取相应的相干结构,并用 Galerkin 投影方法对油藏微分方程投影,得到二维油、水两相流的低阶模型方程,同时通过五点注采系统对低阶模型进行了计算精度与计算时间验证.

1 最佳正交基的生成

1.1 最佳正交理论

POD 是对已有数据做有限降维处理,即将高维偏微分的物理方程用最佳级数展开的方式,转化为一组常微分方程组,同时提供一个能够准确描述高维数据的低维模型.因此,通过 POD 可以将一些复杂的物理过程描述成一组只与重构系数与坐标系数有关的基函数之间的线性叠加.

最佳正交基生成过程包括:创建数值系统矩阵、构建自相关矩阵、求解特征值问题和获得最佳基函数.设 $\{U_i(x, t) : 1 \leq i \leq N; x \in \Omega; t \in T\}$ 表示包含在不同计算区域 Ω 中不同条件 T 下的 N 个物理解的值,也叫做“快照”点值. $U(x, t)$ 既可以通过数值求解控制方程得到,也可以通过实验测量的方式得到.对于求解不同的问题, x 表示不同系统的坐标, T 则可以表示不同的时间点或者不同的状态参数.

1.2 最佳正交基的生成

最佳正交基函数 Φ 的求解是根据基函数的最佳正交性,求得到一组正交基函数集 $\{\Phi_i(x) |_{i=1}^M\}$,使得数值解 $\{U_i(x, t) |_{i=1}^N\}$ 在基函数上的投影值最大,即

$$\max \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(U_i, \Phi)|^2 \right\}, \quad (1)$$

这里 $(\Phi, \Phi) = \|\Phi\|^2 = 1$, (\cdot, \cdot) 和 $\|\cdot\|$ 分别表示在区域 Ω 中的 L^2 空间内积以及 L^2 范数.

假设 POD 基函数 Φ 可以表示成数值解与重构系数的线性组合,即

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) U_i(x, t), \quad (2)$$

这里的 $\alpha_i(t)$ 表示重构系数.

为了求解式(1)的最大值,定义

$$R\Phi := \int_{\Omega} K(x, x') \Phi(x') dx', \quad (3)$$

这里的 R 为算子, $R: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, 其中

$$K(x, x') := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i(x) U_i(x'). \quad (4)$$

最大值表达式(1)可以通过以下函数内积算子的形式转化得到:

$$(R\Phi, \Phi) = \int_{\Omega} R\Phi(x) \Phi(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(U_i, \Phi)|^2. \quad (5)$$

根据内积算子的定义,对于任意的 $\Omega \in L^2$ 都存在 $(R\Phi, \Phi) = (\Phi, R\Phi)$, 且 R 是在区间 $L^2(\Omega)$ 上的正定算子.因此,式(1)中的最大值表达式求解,可以等同于求解算子 R 的最大特征值问题:

$$R\Phi = \lambda \Phi. \quad (6)$$

将式(4)、(5)代入到式(6)中,得到数据矩阵 C 、特征根 λ 和特征向量矩阵 V 的计算关系式:

$$CV = \lambda V, \quad (7)$$

这里数据矩阵 C 与特征向量矩阵 V 为

$$C_{ij} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} U_i U_j d\Omega, \quad V = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T.$$

由数据矩阵 C 的定义可知 C 为对称的正定矩阵,因此式(7)所得特征向量矩阵 V 里的特征向量 α_i, α_j 两两正交,而所求得特征根有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ 的大小关系.特征根同时又分别代表每一组特征向量所能捕捉到流场中广义“能”的大小,广义“能”的定义如下:

$$E = \left\langle \int_{\Omega} U(x, t) U'(x, t) d\Omega \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (8)$$

这里的 E 表示 n 个特征根所能捕捉到的场中能量的大小.

对式(2)得到的基函数,求其内积得

$$\begin{aligned} (\Phi_m, \Phi_n) &= \int_{\Omega} \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m U_i(x) \sum_{j=1}^N \alpha_j^n U_j(x) dx = \sum_{i=1}^N \alpha_i^m N \sum_{j=1}^N C_{i,j} \alpha_j^n = NV^m \cdot \lambda_n V^n. \end{aligned} \quad (9)$$

由于特征向量组 $\{\alpha_k; 1 \leq k \leq N\}$ 的正交性,因此

$$V^m \cdot V^n = \sum_{i=1}^N \alpha_i^m \alpha_i^n = \begin{cases} 1, & m = n, \\ N\lambda_n, & m \neq n, \end{cases} \quad (10)$$

故

$$(\Phi_m, \Phi_n) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

因此可知最佳正交基函数集 $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ 可以由式(2)的形式生成,且使得数值解在其对应的基函数上的投影值最大.

2 油水两相低阶模型的生成

2.1 低阶模型的构建

低阶模型的最终目的是从基函数 $\Phi(x)$ 中提取 M 个基函数 ($M \ll N$), 当 M 的取值使得式(8)中的广义能大于 99% 时, 系统中物理量可以由近似值 $\{F(x, t); x \in \Omega; t \in T\}$ 的形式重新构建, 即通过重构式(11)的计算形式得到:

$$F(x, t) = \sum_{i=1}^M b_i(t) \Phi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (11)$$

在本文中, F 可以表示压力或者饱和度等需要求解的未知物理量, 且 F 的近似值是正交基 $\Phi_i(x), i = 1, 2, \dots, M$ 的组合. 基函数 $\Phi_i(x)$ 是无量纲的, 而系数 $b_i(t)$ 则表示 F 的重构系数信息.

2.2 油水两相模型

引入油水两相流数学模型:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left[\frac{kk_{rw}}{B_w \mu_w} \nabla (p_w - \rho_w g D) \right] + q_{vw} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi s_w}{B_w} \right), \\ \nabla \cdot \left[\frac{kk_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla (p_o - \rho_o g D) \right] + q_{vo} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi s_o}{B_o} \right). \end{cases} \quad (12)$$

将辅助方程 $p_{cow} = p_o - p_w$ 代入方程组 (12) 的右侧时间项并做差分处理, 并将其化简得到油相:

$$\nabla \cdot [\lambda_o \nabla p_o] - \nabla \cdot [\lambda_o \nabla (\rho_o g D)] + q_o = \beta_o \frac{\partial p_o}{\partial t} + \phi \rho_o \frac{\partial s_o}{\partial t}; \quad (13)$$

水相:

$$\nabla \cdot [\lambda_w \nabla p_w] - \nabla \cdot [\lambda_w \nabla (\rho_w g D)] + q_w = \beta_w \frac{\partial p_w}{\partial t} + \phi \rho_w \frac{\partial s_w}{\partial t}; \quad (14)$$

辅助方程:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad s_w + s_o = 1,$$

这里

$$\lambda_w = \frac{kk_{rw}}{B_w \mu_w}, \quad \lambda_o = \frac{kk_{ro}}{B_o \mu_o}, \quad \beta_o = \rho_o \phi s_o (C_p + C_o), \quad \beta_w = \rho_w \phi s_w (C_p + C_w),$$

式中各参数符号如表 1 所示.

表 1 油藏模型符号说明

Table 1 The symbols of the reservoir model

symbol	meaning	symbol	meaning
D / m	elevation	ϕ	reservoir porosity
$\rho_o, \rho_w / (\text{kg}/\text{m}^3)$	density of oil, water	$p_o, p_w / \text{MPa}$	pressure of oil, water
B_o, B_w	volume coefficient of oil, water	s_o, s_w	saturation of oil, water
$C_o, C_w, C_p / \text{MPa}^{-1}$	compressibility coefficient of oil, water, rock	$\mu_o, \mu_w / (\text{mPa} \cdot \text{s})$	viscosity of oil, water
k / mD	absolute permeability	k_{ro}, k_{rw}	relative permeability
$q_{vo}, q_{vw} / (\text{m}^3/\text{s})$	volume of oil, water injected or produced per unit time in ground conditions		

用数值计算的方法求解式 (13)、(14) 油水两相模型的物理量 p_o, p_w, s_o, s_w , 并将之作为待求模型中物理量的样本物理场数据, 进行样本的收集. 求得基函数与低阶模型系数之后, 所要求解物理场可以用近似值函数 $\{F(x, t) : x \in \Omega; t \in T\}$ 来表示, 而待求未知物理场 p_o, p_w, s_o, s_w 则分别用重构式 (15a) ~ (15d) 来表示:

$$p_o(x, t) = \sum_{i=1}^M b_i^{po}(t) \Phi_i^{po}(x), \quad (15a)$$

$$p_w(x, t) = \sum_{i=1}^M b_i^{pw}(t) \Phi_i^{pw}(x), \quad (15b)$$

$$s_o(x, t) = \sum_{i=1}^M b_i^{so}(t) \Phi_i^{so}(x), \quad (15c)$$

$$s_w(x, t) = \sum_{i=1}^M b_i^{sw}(t) \Phi_i^{sw}(x). \quad (15d)$$

将所得饱和度以及压力的重构公式分别代入式 (13)、(14) 中得到

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left[\lambda_o \nabla \sum_{i=1}^M b_i^{po}(t) \Phi_i^{po}(x) \right] - \nabla \cdot [\lambda_o \nabla (\rho_o g D)] + q_o(x, t) = \\ & \beta_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^M b_i^{po}(t) \Phi_i^{po}(x) \right) + \phi \rho_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^M b_i^{so}(t) \Phi_i^{so}(x) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \left[\lambda_w \nabla \sum_{i=1}^M b_i^{pw}(t) \Phi_i^{pw}(x) \right] - \nabla \cdot [\lambda_w \nabla (\rho_w g D)] + q_w(x, t) = \beta_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^M b_i^{pw}(t) \Phi_i^{pw}(x) \right) + \phi \rho_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^M b_i^{sw}(t) \Phi_i^{sw}(x) \right). \quad (17)$$

将用 POD 方法得到的基函数对油藏偏微分方程(16)、(17)进行 Galerkin 投影,进而可以将求解压力场及含油饱和度的非线性偏微分方程组(12)的问题,完全转换为求解常微分方程的形式,进而完成降阶。

$$\phi \rho_o \frac{\partial b_i^{so}(t)}{\partial t} = (q_o(x, t), \Phi_i^{so}(x)), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (18)$$

$$\phi \rho_w \frac{\partial b_i^{sw}(t)}{\partial t} = (q_w(x, t), \Phi_i^{sw}(x)), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (19)$$

$$\beta_o \frac{\partial b_i^{po}(t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \lambda_o b_j^{po}(t) (\nabla^2 \Phi_j^{po}(x), \Phi_i^{po}(x)) + (q_o(x, t), \Phi_i^{po}(x)), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (20)$$

$$\beta_w \frac{\partial b_i^{pw}(t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \lambda_w b_j^{pw}(t) (\nabla^2 \Phi_j^{pw}(x), \Phi_i^{pw}(x)) + (q_w(x, t), \Phi_i^{pw}(x)), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (21)$$

式(18)~(21)即为油藏偏微分方程在 Galerkin 投影条件下的低阶模型。

将式(18)~(21)中所得系数 $b_i^{so}(t), b_i^{po}(t), b_i^{pw}(t), b_i^{sw}(t)$ 与 POD 方法所得特征函数结合,应用到重构公式(11)中就可以重构新的压力场与饱和度场。这种重构的计算方法在求解模型系数时,相当于求解一个时间复杂度仅为 $O(4 \times M)$ 的 4 阶常微分方程组。由于 $M \ll n, 4 \ll n$, 因此其时间复杂度远远小于原问题求解一个时间复杂度为 $O(n \times n)$ 的非线性方程组,因此较之直接求解的方式节省更多的计算时间。

3 数值实验及分析

本文选取五点法注采系统的一个单元,用低阶模型方法与隐压显饱 (IMPES) 方法求得该单元的压力以及饱和度分布做对比。以二维油水两相的油藏为例进行说明,图 1 分别给出了生产井与注水井的位置示意。

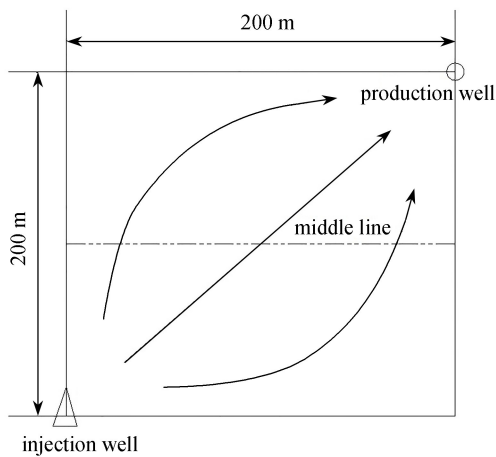


图 1 生产井 O、注水井 Δ 位置

Fig. 1 Positions of production well O and water injection well Δ

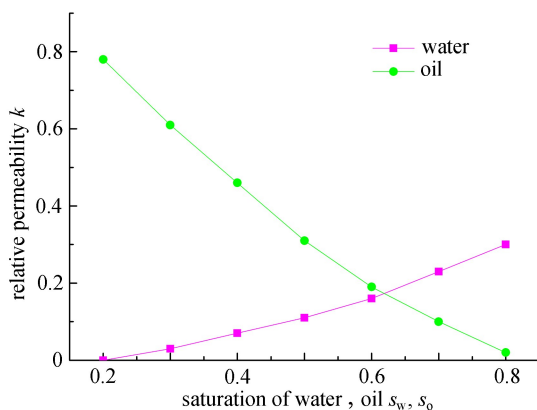


图 2 油、水相对渗透率曲线

Fig. 2 Relative permeability curves of oil and water

油藏均质等厚,岩石和流体均可压缩,且符合 Darcy 渗流方程。单元边长 200 m,油层厚度 10 m,绝对渗透率为 $1 \mu\text{m}^2$,孔隙度为 0.25,综合压缩系数为 $1.0 \times 10^{-4} \text{MPa}^{-1}$,油黏度为 $5.0 \text{mPa}\cdot\text{s}$,水黏度为 $1.0 \text{mPa}\cdot\text{s}$,原始的地层压力为 12.0 MPa,原始含油饱和度为 0.8,注水井底压力 $P_{\text{iwf}} = 14.0 \text{MPa}$,生产井底压力 $P_{\text{wf}} = 10.0 \text{MPa}$ 。注入井原始含油饱和度为 0.2,生产井原始含油饱和度为 0.8。油藏的相对渗透率与饱和度关系如图 2 所示。

模型中平面 x 方向上划分 50 个计算网格, y 方向上划分 50 个计算网格,总共划分计算网格数为: $50 \times 50 = 2\,500$ 。

3.1 基函数的生成

根据 POD 基函数的推导与计算过程,可以将基函数的获取分为以下 4 个步骤:

1) 样本数据的获取

样本通常是通过实验或者数值模拟的方法得到关于所研究的物理过程特征量的场,大多数情况 POD 所处理的数据对象来自于直接数值计算,这些数据来自于计算离散网格点和不同时刻压力、含油饱和度。本文采用 IMPES 方法,对所计算的油藏在注水开采一年(365 d)范围内以天为单位进行计算,求解每一个时间步长 ($\Delta t = 10$ d) 内的压力、油水饱和度,这样可以获得 36 组样本。

2) 通过数据矩阵 C 的定义可得

$$C_{ij} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} U_i(x) U_j(x) dx. \quad (22)$$

3) 计算出数据矩阵 C 的特征值 λ 以及对应的特征向量 α

每一个特征向量对应的特征根都是递减的, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0, N = 36$ 。表 2 给出压力以及饱和度的特征根对应的能量分布表,从表中可以看出特征值递减非常明显。因此说明前几组特征值所捕捉到物理场中的广义“能”较多,能更多捕捉所代表的物理场中的信息。表 2 分别给出含油饱和度与压力两组基函数的前 6 个特征值累计捕捉到广义“能”的大小。两组特征值中,第 1 个特征值所捕捉到的广义能最大,能捕捉到全场广义“能”的 97% 以上,前 5 个特征根已经几乎捕捉到整个物理场中的信息(99.9%)。

表 2 特征根及捕捉的“能量”

Table 2 Eigenvalues and the “energy”

No.	saturation eigenvalue λ_n^s	“energy” $E / \%$	pressure eigenvalue λ_n^p	“energy” $E / \%$
1	9 282.27	97.11	398.22	99.999 65
2	197.92	99.18	1.28×10^{-3}	99.999 97
3	46.07	99.67	1.08×10^{-4}	100
4	15.77	99.84	3.95×10^{-6}	100
5	7.79	99.92	9.44×10^{-7}	100
6	3.93	99.96	8.07×10^{-7}	100

4) POD 基函数的计算

通过表 2 可以看出,压力、饱和度等物性信息用前 5 个特征值即能捕捉整个物理场中 99.9% 的计算信息。因此,在本例的低阶模型系数的计算过程中,选取的 N (36) 组基函数中,前五组基函数 ($M = 5$) 便能同时满足压力以及饱和度的物性。

本例中基函数的计算可通过式(2)得到不同的基函数:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N b_i U_i. \quad (23)$$

3.2 低阶模型的求解

得到基函数之后在给定的初始时刻饱和度、压力以及边界条件下,用 Runge-Kutta 方法求解式(18)~(21)组成的常微分方程组。求解得到各个结算节点处所求解的油藏区域的含油饱和度以及油、水各相压力的系数。

得到相应的低阶模型系数 $b_i^{so}(t), b_i^{s_o}(t), b_i^{pw}(t), b_i^{sw}(t)$ 并将之分别代入到式(15),进而可以计算求得不同时间相应的油藏计算区域的含油饱和度以及压力,从而得到各个不同时间的产油量以及注水量。

图 3、4 给出计算节点(25,25)处水压与含油饱和度随着不同特征向量的组数 (M 组),而取得的不同的水压随时间的变化。对比可以发现,低阶模型具有较好的预测特性,而且随着特征向量数量 M 的增加,低阶模型所求得的结果越来越逼近 IMPES 所得到的结果。当特征向量 $M = 3$ 时,压力计算已经相当的吻合;而当 $M = 5$ 时,油藏的含油饱和度的计算也已经相当的吻合。

为验证低阶模型的准确度,定义相对误差为

$$\delta = \|f_1 - f_M\| / \|f_1\| \times 100\%, \quad (24)$$

这里 f_1 表示用 IMPES 计算得到的结果, f_M 表示用低阶模型得到的结果. 通过对比可以发现, 低阶模型表现出较好的计算结果, 并且相对误差随着所取基函数的数量增加而降低.

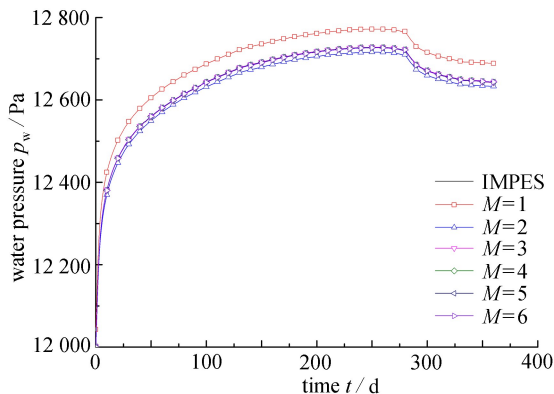


图 3 油藏水压

Fig. 3 Reservoir water pressures

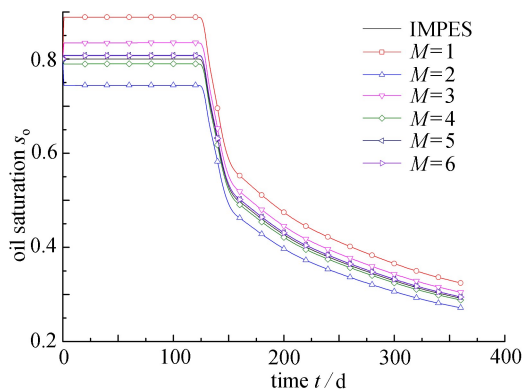


图 4 油藏含油饱和度

Fig. 4 Oil saturations of the reservoir

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本.

表 3 低阶模型误差

Table 3 Low-order model errors

number of basis functions M	40 d error $\delta / \%$		184 d error $\delta / \%$		355 d error $\delta / \%$	
	s_o	p_w	s_o	p_w	s_o	p_w
1	11.72	0.356	18.64	0.784	15.872	0.562 8
2	7.34	8.49×10^{-2}	6.43	9.74×10^{-2}	6.794	0.984
3	4.33	1.09×10^{-2}	3.36	3.34×10^{-2}	3.748	2.10×10^{-2}
4	1.38	5.96×10^{-4}	2.01	4.76×10^{-4}	1.758	2.32×10^{-4}
5	1.07	4.93×10^{-5}	0.92	3.36×10^{-5}	0.98	7.80×10^{-5}
6	0.94	5.03×10^{-5}	0.87	4.01×10^{-5}	0.898	4.80×10^{-5}

对比表 3 低阶模型所得到的结果与 IMPES 计算结果的相对误差可以看出, 当基函数的数量 $M = 5$ 时, 低阶模型的含油饱和度的计算相对误差约为 1%, 而压力的计算误差在 $M = 1$ 时已经小于 1%, 误差已满足工程数值模拟的计算需求.

表 4 不同计算量所需计算时间

Table 4 Calculation time required for different calculation amounts

grid type	IMPES t / s	order model t / s
40×40	5.42	0.26
50×50	9.77	0.27
80×80	50.94	0.30
100×100	170.17	0.37
150×150	260.45	0.41

采用 FORTRAN 语言求解, 表 4 给出相同的计算条件下, 不同的网格数量时, 低阶模型与 IMPES 方法计算所需要的 CPU 计算时间. 通过表 4 可以看出, 低阶模型对于处理网格数量较大、较复杂的计算问题优势更为明显, 低阶模型计算只需小于 1 s 的时间, 而 IMPES 方法的计算时间是 5.42~260.45 s 不等. 这里低阶模型计算方法的计算时间不包括前期采集样本数据及计算特征函数特征根等所需要的计算时间.

4 结 论

1) 本文应用 POD 方法提取油藏两相流压力与含油饱和度的特征函数, 并用 Galerkin 投影方法构建低阶模型. 结果表明, 本文所构模型结果与 IMPES 方法所得结果符合较好.

2) 从 POD 方法的推导过程可以看出,该方法能捕捉到流场中物理量广义“能”最大,在本文算例中大约能捕捉到 97%以上广义“能”,它所对应的基函数能捕捉到整个流场的基本特征,当低阶模型基函数的数量 $M = 5$ 时,含油饱和度与压力的计算误差约为 1%,该结果误差已满足工程数值模拟的计算需求。

3) 本文所构建的低阶模型计算方法简单,且随着计算网格的复杂性增大,计算时间优势更加明显。因此,可以将该计算模型用于油藏开采的实时控制与中后期的历史拟合计算中。

参考文献(References):

- [1] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*[M]. 6th ed. Barcelona: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [2] 李淑霞, 谷建伟. 油藏数值模拟基础[M]. 东营: 中国石油大学出版社, 2009. (LI Shuxia, GU Jianwei. *The Fundamental of Petroleum Reservoir Simulation*[M]. Dongying: China University of Petroleum Press, 2009. (in Chinese))
- [3] AZIZ K, SETTARI A. *Petroleum Reservoir Simulation*[M]. London: Applied Science Publishers, 1979.
- [4] VINSOME P K W. Orthomin: an iterative method for solving sparse banded sets of simultaneous linear equations[C]//*Proceedings Fourth Symposium on Reservoir Simulation, Society of Petroleum Engineers of AIME*. 1976: 149-159.
- [5] 许建红, 程林松, 周颖, 等. 一种求解低渗透油藏启动压力梯度的新方法[J]. 石油勘探与开发, 2007, 34(5): 594-597. (XU Jianhong, CHENG Linsong, ZHOU Ying, et al. A new method for calculating kickoff pressure gradient in low permeability reservoirs[J]. *Petroleum Exploration and Development*, 2007, 34(5): 594-597. (in Chinese))
- [6] BEHIE A, VINSOME P K W. Block iterative methods for fully implicit reservoir simulation[J]. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1982, 22(5): 658-668.
- [7] BHOGESWARA R, KILLOUGH J E. Parallel linear solvers for reservoir simulation: a generic approach for existing and emerging computer architectures[J]. *SPE Computer Applications*, 1994, 6(1): 5-11.
- [8] CAO H, TCHELEPI H, WALLIS J, et al. Parallel scalable unstructured CPR-type linear solver for reservoir simulation[C]//*SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. 2005.
- [9] SIROVICH L. Turbulence and dynamics of coherent structures, part 1: coherent structures[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, 45(3): 561-571.
- [10] SIROVICH L. Turbulence and dynamics of coherent structures, part 2: symmetries and transformations[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, 45(3): 573-582.
- [11] SIROVICH L. Turbulence and dynamics of coherent structures, part 3: dynamics and scaling[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, 45(3): 583-590.
- [12] SIROVICH L. Analysis of turbulent flows by means of the empirical eigenfunctions[J]. *Fluid Dynamics Research*, 1991, 8(1/4): 85-100.
- [13] GHARBI R B, QASEM F, SMAOUI N. Characterizing miscible displacements in heterogeneous reservoirs using the Karhunen-Loève decomposition[J]. *Petroleum Science and Technology*, 2003, 21(5/6): 747-776.
- [14] VERMEULEN P T M, HEEMINK A W, TE STROET C B M. Reduced models for linear groundwater flow models using empirical orthogonal functions[J]. *Advances in Water Resources*, 2004, 27(1): 57-69.
- [15] WU Z, LAURENCE D, UTUZHNIKOV S, et al. Proper orthogonal decomposition and dynamic mode decomposition of jet in channel crossflow[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2019, 344: 54-68.
- [16] 丁鹏, 陶文铨. 一种预测流动和传热问题的快速算法[J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(3): 271-273. (DING Peng, TAO Wenquan. Fast algorithm for prediction of fluid flow and heat transfer[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2007, 41(3): 271-273. (in Chinese))
- [17] 丁鹏, 陶文铨. 求解对流换热反问题的低阶模型[J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(3): 14-16. (DING Peng, TAO Wenquan. Reduced order model based algorithm for inverse convection heat transfer problem[J]. *Jour-*

- nal of Xi'an Jiaotong University*, 2009, **43**(3): 14-16.(in Chinese))
- [18] 吴学红,陶文铨,吕彦力,等.不可压缩流动问题快速计算的降阶模型[J].中国电机工程学报,2010,**30**(26): 69-74.(WU Xuehong,TAO Wenquan,LÜ Yanli,et al.Reduced order model for fast computation of incompressible fluid flow problem[J].*Proceedings of the CSEE*,2010,**30**(26): 69-74.(in Chinese))
- [19] HELJN T,MARKOVINOVIĆ R,JANSEN J D.Generation of low-order reservoir models using system-theoretical concepts[J].*SPE Journal*,2004,**9**(2): 202-218.
- [20] LEASK S B,MCDONELL V G,SAMUELSEN S.On the use of dynamic mode decomposition for liquid injection [J].*Automization and Sprays*,2019,**29**(11): 965-985.
- [21] VAN DOREN J F M,MARKOVINOVIĆ R,JANSEN J D.Reduced-order optimal control of water flooding using proper orthogonal decomposition[J].*Computational Geosciences*,2006,**10**(1): 137-158.
- [22] 贾欣鑫,王鑫,王虎,等.两相水驱油低阶模型计算方法研究[J].科学技术与工程,2017,**17**(6): 55-60.(JIA Xinxin,WANG Xin,WANG Hu,et al.The calculation method for reduced model of the water flooding[J].*Science Technology and Engineering*,2017,**17**(6): 55-60.(in Chinese))
- [23] 孙宪航,徐明海,贾欣鑫,等.预测水驱油藏中油、水流动问题的快速方法[J].应用数学和力学,2015,**36**(12): 1228-1237.(SUN Xianhang,XU Minghai,JIA Xinxin,et al.A fast POD-based method for predicting oil and water flow in water-drive reservoir[J].*Applied Mathematics and Mechanics*,2015,**36**(12): 1228-1237.(in Chinese))
- [24] SUN X,XU M.Optimal control of water flooding reservoir using proper orthogonal decomposition[J].*Journal of Computational and Applied Mathematics*,2017,**320**: 120-137.