离散时滞奇异摄动控制系统的稳定性分析*

孙凤琪

(吉林师范大学 数学学院, 吉林 四平 136000)

摘要： 对含不确定性结构的奇异摄动时滞离散控制系统进行稳定性研究.通过设计一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 基于 Lyapunov 稳定性理论,在时滞依赖情形下, 采取交叉项界定技术、线性矩阵分析方法并运用引理, 推出在零到奇异摄动上界的整个区间范围内系统渐近稳定,给出充分性的稳定性判据.之后,再对其进行理论加深和推广, 得到更加简洁性的推论, 可以借助于 MATLAB 工具箱进行求解.最后,用算例证明本文所得方法的优越性和可行性.

关 键 词： 稳定性； 离散系统； 时滞依赖； 时滞独立； 交叉项界定法

中图分类号： O231.2　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.410208

Stability Analysis of Discrete Time-Delay Singularly Perturbed Uncertainty Control Systems

SUN Fengqi

(*College of Mathematics*, *Jilin Normal University*,
Siping, *Jilin* 136000, *P.R.China*)

Abstract: The stability of discrete control systems with time delay, singular perturbation and uncertainty was studied. With a designed new Lyapunov-Krasovskii functional, based on the cross term defined technique, the linear matrix analysis method and the related lemmas, and furthermore, according to the Lyapunov stability theory, the asymptotic stability of the system in the entire interval from zero to the singularly perturbed upper bound was derived in the time-delay-dependent case. Then the sufficient stability criterion was given, which was deepened and generalized to deduce the linearized inferences, and solved with the MATLAB toolbox. The example illustrates the superiority and feasibility of the obtained method.

Key words: stability; discrete system; delay-dependent; delay-independent; cross term defined method

引　　言

时滞奇异摄动不确定系统是指在一个不确定系统中,给定的输入信号或控制信号经过一段时间的延迟才在系统中产生输出信号的一类控制系统[1].系统的变化趋势不仅由当前的状态决定,而且还依赖于过去状态.另一方面,由于数字计算机大量的推广应用以及系统在理论研究中的深入,数字计算机在运算上是将时

* **收稿日期：** 2020-07-10；**修订日期：** 2020-11-02

基金项目： 国家自然科学基金(61741318)

作者简介： 孙凤琪(1968—),女,教授,博士,硕士生导师(E-mail：1092748497@qq.com).

引用格式： 孙凤琪. 离散时滞奇异摄动控制系统的稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(7)：696-703.

间通过离散化的方式来处理的,实际的系统在通过数字计算机对其处理、控制时,要精确建立连续系统的数学模型几乎是不可能的,这就需要把时间变量考虑为离散变量,把研究的系统考虑为离散系统[1-3],进而建模成离散时滞奇异摄动不确定控制系统,因此,对它的研究具有十分重要的意义.

随着人们在科学技术上的不断创新, 现代文明和技术发展越来越离不开离散控制系统, 离散控制系统的若干综合性问题是建立在稳定性基础之上的[4-5].因此, 如何将一个处于不稳定的系统进行稳定性分析, 使之变成稳定的状态并使之保持下去, 具有非常重要的理论研究价值. 鉴于此, 一些学者近年来做了大量研究[6-9].

文献[1]基于线性情况下的离散时滞系统探究其稳定性问题,利用鲁棒 D- 稳定的理论,得到极点在给定的圆形区域内充分的稳定性条件.其中,时滞的上界选取较大数时给出的定理将不适用.文献[2]基于在一定区间内的离散时滞广义 Markov 跳变系统讨论其稳定性,利用 Jensen 不等式技术和凸组合方法,得到一个新的稳定性结论.但加入很多的权矩阵,增加了计算上复杂度.文献[1,3]分别在有限时间情形下和脉冲与切换控制下对具有混合结构的时滞离散系统进行稳定性研究,利用 Wirtinger-based 理论,设计平均驻留时间的方法,提出该系统在有限时间情形下、在网络脉冲控制下的稳定性条件.但得到的稳定性判据并不适用于具有摄动参数的不确定时变时滞离散系统,不能应用于多时变情形.文献[4]探讨了具有不确定性结构的奇异系统的稳定性问题,采用鲁棒 D- 稳定的技术,得到了系统充分的稳定性条件.但对于理论中考虑的矩阵是正则的,而对于奇异系统中的矩阵是非正则的,并不适用[10-11].

目前,基于不确定时滞离散系统展开的稳定性研究在理论和应用上获得了大量的重要成果.但是,所研究的系统具有一定局限性,所得结论在保守性上仍有很大的减小空间.本文针对具有奇异摄动、不确定性、时变时滞的离散综合性的控制系统进行稳定性分析.构造了新的 Lyapunov 泛函,基于改进的交叉项界定方法和矩阵不等式技术,在时滞依赖的情况下,推出摄动参数上界更大的稳定性存在的充分条件.其次,将所得定理进行更深层次的改进和推广.最后,通过算例验证了定理的可行性和优越性.

1　预 备 知 识

引理 1[6]　如果存在对称阵 $\boldsymbol{Z}_i(i=1,2,3,4,5)$, 且 $\boldsymbol{Z}_i=\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm T}(i=1,2,3,4)$, 则有如下 LMIs:

1) $\boldsymbol{Z}_1>\boldsymbol{0}$;

2) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1+\bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_3 & \bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_5^{\mathrm T}\\ \bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_5 & \bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_2\end{bmatrix}>\boldsymbol{0}$;

3) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1+\bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_3 & \bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_5^{\mathrm T}\\ \bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_5 & \bar\varepsilon\boldsymbol{Z}_2+\bar\varepsilon^2\boldsymbol{Z}_4\end{bmatrix}>\boldsymbol{0}$,

则

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)=(\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon))^{\mathrm T}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)>\boldsymbol{0},\qquad \forall\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon],$$

其中

$$\boldsymbol{Z}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1+\varepsilon\boldsymbol{Z}_3 & \varepsilon\boldsymbol{Z}_5^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{Z}_5 & \boldsymbol{Z}_2+\varepsilon\boldsymbol{Z}_4\end{bmatrix}.$$

引理 2[6]　给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{Y}$ 是对称阵,不确定函数 $\boldsymbol{F}(k)$ 有 $\boldsymbol{F}^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{F}(k)\leqslant\boldsymbol{I}$, 则

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{F}^{\mathrm T}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}<\boldsymbol{0}$$

的充要条件是,存在一个常量 $\boldsymbol{\eta}>\boldsymbol{0}$, 使得

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}<\boldsymbol{0}.$$

引理 3[6]　对任意适当维数的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}$, 其中 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是对称的,若 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm T} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}$, 则

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\leqslant\inf_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{P}-\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm T}-\boldsymbol{X}^{\mathrm T} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}.$$

2 主要结论

研究如下含有不确定性结构的奇异摄动时变时滞离散控制系统：

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k+1)=[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{DF}(k)\boldsymbol{E}_a]\boldsymbol{x}(k)+[\boldsymbol{B}+\boldsymbol{DF}(k)\boldsymbol{E}_b]\boldsymbol{x}(k-d(k)),$$
$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\varphi}(k),\ k=-d_2,-d_2+1,L,0, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{E}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{\varphi}(k)$ 是系统初始条件；$\boldsymbol{x}(k)\in R^n$ 是系统状态向量；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是已知的适当维数的常数矩阵，$\boldsymbol{A}$ 渐近稳定，$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_a,\boldsymbol{E}_b$ 是已知适当维数的定常矩阵，表示不确定性的结构信息；$d(k)$ 是时变时滞可微函数，满足

$$d_1\leqslant d(k)\leqslant d_2, \tag{2}$$

d_1,d_2 是已知的正整数；$\boldsymbol{F}(k)\in R^{i\times j}$ 是范数有界的不确定系统模型参数矩阵，满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{F}(k)\leqslant\boldsymbol{I}. \tag{3}$$

3 时滞依赖的稳定性判据

定理 1 给定正数 $\bar{\varepsilon}>0$，系统(1)对 $\forall\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 是渐近稳定的．若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0},\boldsymbol{W}>\boldsymbol{0}$，常数 $\gamma>0$，适当维数的矩阵 $\boldsymbol{P}$，对称矩阵 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{R}$，满足 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}$，以及矩阵 $\boldsymbol{Z}_i(i=1,2,3,4,5)$ 且 $\boldsymbol{Z}_i=\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}(i=1,2,3,4)$，使得对于满足条件(3)所具有的不确定性 $\boldsymbol{F}(k)$，在满足引理 1 矩阵不等式条件 1)~3)时，下列矩阵不等式的条件是可行的：

$$\begin{bmatrix}
\gamma\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{AZ}^{-1}(0) & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-1}(0) & \boldsymbol{0}\\
 & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}(0) & \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(0)\\
 & & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_b^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{WE}(0) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\
 * & & & & & & -\boldsymbol{\varPi}^{-1}(0)
\end{bmatrix}<\boldsymbol{0},$$

$$\begin{bmatrix}
\gamma\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{AZ}^{-1}(\bar{\varepsilon}) & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-1}(\bar{\varepsilon}) & \boldsymbol{0}\\
 & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{E}(\bar{\varepsilon}) & \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(\bar{\varepsilon}))\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(\bar{\varepsilon})\\
 & & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_b^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{WE}(\bar{\varepsilon}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\
 * & & & & & & -\boldsymbol{\varPi}^{-1}(\bar{\varepsilon})
\end{bmatrix}<\boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{\varPi}(0)=(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{WE}(0)+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{\varPi}(\bar{\varepsilon})=(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{WE}(\bar{\varepsilon})+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}.$$

证明 构造新的 Lyapunov 函数 $\boldsymbol{V}(k)=\boldsymbol{V}_1(k)+\boldsymbol{V}_2(k)+\boldsymbol{V}_3(k)$，其中

$$\boldsymbol{V}_1(k)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k),$$
$$\boldsymbol{V}_2(k)=\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{Qx}(i),$$

$$\boldsymbol{V}_3(k)=\sum_{\theta=-d_1+1}^{-d_2}\sum_{i=k-1+\theta}^{k-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(i),$$

其中 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{W}$ 为未知的对称正定矩阵.

由引理 1 知

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)=[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)]^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0},\qquad\forall\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}],$$
$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)=[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)]^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0},\qquad\forall\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}],$$

则 $\boldsymbol{V}(k)$ 为正定的 Lyapunov 泛函.将 $\boldsymbol{V}(k)$ 沿着系统(1)向前差分,得

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{V}_1(k)=&\boldsymbol{V}_1(k+1)-\boldsymbol{V}_1(k)=\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)]\boldsymbol{x}(k)+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-d(k))[(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})]\boldsymbol{x}(k)+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-d(k))[(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})]\boldsymbol{x}(k-d(k))+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})]\boldsymbol{x}(k-d(k)).\end{aligned}$$

同理, $\boldsymbol{V}_2(k)$ 和 $\boldsymbol{V}_3(k)$ 向前差分,得

$$\Delta\boldsymbol{V}_2(k)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-d(k))\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k-d(k)),$$

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{V}_3(k)=&\boldsymbol{V}_3(k+1)-\boldsymbol{V}_3(k)=\\&\sum_{\theta=-d_1+1}^{-d_2}\left(\sum_{i=k+\theta}^{k}-\sum_{i=k-1+\theta}^{k-1}\right)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(i)=\\&\sum_{\theta=-d_1+1}^{-d_2}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-1+\theta)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k-1+\theta)]=\\&(d_1-d_2)[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k)]-\sum_{i=k-d_1}^{k-1-d_2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(i)\leqslant\\&(d_1-d_2)[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k)]-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-d_1)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\boldsymbol{x}(k-d_1).\end{aligned}$$

由引理 3 可知,存在适当维数的矩阵 $\boldsymbol{P}$, 对称阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{R}$, 使得

$$\begin{aligned}&-(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})]\boldsymbol{x}(k-d(k)))\leqslant\\&\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\\boldsymbol{x}(k-d(k))\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}&\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\\ *&\boldsymbol{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\\boldsymbol{x}(k-d(k))\end{bmatrix},\end{aligned}$$

故

$$\Delta\boldsymbol{V}(k)\leqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{G}(\varepsilon)\boldsymbol{\eta}(k),$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}(k)=[\boldsymbol{x}(k)\quad\boldsymbol{x}(k-d(k))\quad\boldsymbol{x}(k-d_1)]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{G}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}\begin{matrix}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})-\\\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\\(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\\\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}\end{matrix}&\begin{matrix}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\times\\(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})+\boldsymbol{P}\end{matrix}&\boldsymbol{0}\\ &\begin{matrix}(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\times\\(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}\end{matrix}&\boldsymbol{0}\\ * & &-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\end{bmatrix}.\tag{4}$$

由已知定理条件条件 $\boldsymbol{G}(0)<\boldsymbol{0},\boldsymbol{G}(\bar{\varepsilon})<\boldsymbol{0}$, 再由引理 1,得 $\boldsymbol{G}(\varepsilon)<\boldsymbol{0}$, 故可知 $\boldsymbol{V}(k)<\boldsymbol{0}$, 所以,系统(1)是渐近稳定的.

为求得定理 1 中未知的参数矩阵,需要消去式(4)中的不确定性,利用引理 2 可知,存在一个正常数 $\gamma>0$, 使得

$$
\boldsymbol{G}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}
\begin{matrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}-\\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\\ \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}+(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\end{matrix} & \boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{B}_{\mathrm{C}} & \boldsymbol{0}\\
* & \boldsymbol{B}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{B}_{\mathrm{C}}-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\
* & * & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)
\end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix}
\begin{matrix}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\\ \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}+(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)\end{matrix} & \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0}\\
 & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}\\
* & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)
\end{bmatrix}+
$$

$$
\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{C}}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{C}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}<\boldsymbol{0},
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}.
$$

利用 Schur 补引理,得

$$
\begin{bmatrix}
\gamma\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-1}(\varepsilon)\\
 & \begin{matrix}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{Z}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\\ (d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\\ \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}\end{matrix} & \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\
 & & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_b^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\
 & & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\
* & & & & & \boldsymbol{I}
\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}. \tag{5}
$$

对矩阵不等式(5)左侧矩阵分别左乘、右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{Z}^{-\mathrm{T}}(\varepsilon)\quad \boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{I}\}$ 和它的转置,再利用 Schur 补引理,得

$$
\begin{bmatrix}
\gamma\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}^{-1}(\varepsilon) & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-1}(\varepsilon) & \boldsymbol{0}\\
 & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{E}(\varepsilon) & \boldsymbol{Z}^{-T}(\varepsilon)\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-T}(\varepsilon)\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Z}^{-T}(\varepsilon)\\
 & & -\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_b^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
 & & & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\
* & & & & & & -\boldsymbol{\Pi}^{-1}
\end{bmatrix}<\boldsymbol{0}, \tag{6}
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Pi}=(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\varepsilon)+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{N}.
$$

则矩阵不等式(6)基于变量 $\gamma,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{N},\boldsymbol{R},\boldsymbol{P},\boldsymbol{W}$ 以及 $\boldsymbol{Z}(\varepsilon)$ 是线性的,证毕.

4 推　　论

基于定理 1,利用新的交叉项界定方法、以及进行条件有效限定方法,可直接推出推论.例如,对定理 1,引理 2 中的矩阵不等式进行如下限定:

$$2a^{\mathrm T}Xb \leqslant \inf_{I,P,R}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} I & P+X \\ P^{\mathrm T}+X^{\mathrm T} & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

便可推得如下结论.

推论 1　给定正数 $\bar{\varepsilon} > 0$, 系统(1)对 $\forall \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon}]$ 是渐近稳定的.若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{W} > \boldsymbol{0}$, 适当维数的矩阵 $\boldsymbol{P}$, 适当维数的单位阵 $\boldsymbol{I}$, 对称矩阵 $\boldsymbol{R}$, 满足 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm T} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}$, 矩阵 $\boldsymbol{Z}_i(i=1,2,3,4,5)$ 且 $\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{Z}_i^{\mathrm T}(i=1,2,3,4)$, 对于满足条件(3)所具有的不确定性 $\boldsymbol{F}(k)$, 使得在满足引理 1 矩阵不等式条件 1)~3)时,下列矩阵不等式的条件是可行的:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Z}(0)(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}) - \\ \boldsymbol{E}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Z}(0)\boldsymbol{E}(0) + \\ \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I}+(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(0)\end{matrix} & (\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Z}(0)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})+\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \\ & (\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{Z}(0)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{0} \\ * & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(0) \end{bmatrix} < \boldsymbol{0},$$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{Z}(\bar{\varepsilon})(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}) - \\ \boldsymbol{E}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{Z}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{E}(\bar{\varepsilon}) + \\ \boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I}+(d_1-d_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\bar{\varepsilon})\end{matrix} & \begin{matrix}(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{Z}(\bar{\varepsilon}) \times \\ (\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})+\boldsymbol{P}\end{matrix} & \boldsymbol{0} \\ & \begin{matrix}(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})^{\mathrm T}\boldsymbol{Z}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{Z}(\bar{\varepsilon}) \times \\ (\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}\end{matrix} & \boldsymbol{0} \\ * & & -\boldsymbol{E}^{\mathrm T}(\bar{\varepsilon})\boldsymbol{W}\boldsymbol{E}(\bar{\varepsilon}) \end{bmatrix} < \boldsymbol{0}.$$

以上推论是非线性的,可类似于上述定理 1 的方法进行线性化处理,此略.

5　算　　例

给定如下离散时变时滞奇异摄动不确定控制系统,来源于工程系统的远距离传输问题,网络控制系统电子网络问题以及带有惯性环节的电力系统问题:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.82x_1(k) + 0.82x_2(k) - 0.09x_1(k-9) + 0.01x_2(k-9), \\ \varepsilon x_2(k+1) = -0.04x_1(k) + 0.01x_2(k) - 0.195x_1(k-9) - 0.095x_2(k-9), \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 \\ -0.05 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = [0.2 \quad 0.1]^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{E}_a = [0.1 \quad 0.1], \boldsymbol{E}_b = [0.05 \quad 0.05], \boldsymbol{\varphi}(k) = [1 \quad 0]^{\mathrm T}, d(k) = 9, d_1 = 1, d_2 = 20.$$

初始条件: $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$,取 $\bar{\varepsilon} = 5.142\ 8$.由定理 1 得

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.813\ 2 & 0.421\ 3 \\ 0.421\ 3 & 0.635\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0.917\ 4 & -0.249\ 2 \\ -0.249\ 2 & 0.562\ 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -0.154\ 3 & 0.173\ 2 \\ 0.172\ 0 & -0.105\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0.932\ 6 & 0.168\ 3 \\ 0.168\ 3 & 0.641\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.974\ 2 & 0.164\ 9 \\ 0.164\ 9 & 0.653\ 0 \end{bmatrix}, \gamma = 2.718\ 3,$$

$$Z_1 = 0.826\ 3, Z_2 = 0.692\ 4, Z_3 = 0.004\ 8, Z_4 = 0.036\ 2, Z_5 = 0.047\ 5.$$

可知, $\forall \varepsilon \in (0,5.142\ 8]$, $1 \leqslant d(k) \leqslant 20$, 定理 1 的矩阵不等式条件是可行的,系统渐近稳定.

本例与文献[11]中相应的稳定性指标进行比较.可见,所选取的奇异摄动参数上界 $\bar{\varepsilon} = 5.142\ 8$ 比文献[11]的 3.752 4 大,稳定区间(0,5.142 8]也比文献[11]的(0,3.752 4]大.

由图 1 中所展示的系统状态响应曲线可知,针对时滞依赖情况下,能更快地趋近于渐近稳定的状态.

以上针对离散时滞奇异摄动不确定控制系统,在求解稳定性判据时,综合运用了分布时滞法与插项法,

给出了在时滞依赖情形下新的充分性稳定性判据,在证明过程中做了进一步的条件限定,展示了交叉项界定法的具体应用,得到的定理具有可行性.同时,伴随不同定理证明过程中给出不同的 Lyapunov-Krasovskii 泛函构造方式,充分体现出不同的交叉项界定技术将推得不同的充分性条件[11-13].

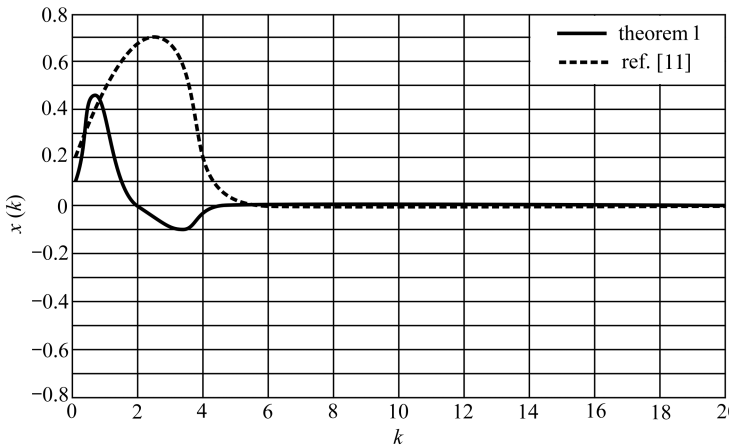

图 1 系统状态响应曲线

Fig. 1 System state response curves

6 结 语

1) 本文基于新的具有不确定性结构的时滞离散奇异摄动控制系统,进行稳定性研究.通过设计新的 Lyapunov 泛函,以及重要的不等式、线性矩阵不等式方法,借助于 Lyapunov 稳定性理论以及新的差分不等式等交叉项界定技术,针对时滞依赖情形,推出了新的保守性更小的稳定性判据.

2) 本文所得的相关系统稳定性判定定理在理论上具有可行性,方法有效,具有形式上的简便、易操作性,适用于标准和非标准情形.进一步丰富了稳定性理论基础,扩大了稳定区间,降低了方法结果的保守性,相比较而言显示了该方法具有一定的优越性.

3) 本文对所得定理进行了理论加深和推广,该定理也可推广到多时滞离散系统,Lurie 系统以及非标准系统当中,具有重要的理论和实践意义,如对智能控制系统的研发、生物智能研究以及大数据系统程控等领域均具有重要的应用价值.

今后需要进一步解决的问题:

本文对同时含有时滞、奇异摄动、不确定性的新的离散控制系统的稳定性做了一些初步探讨,推出了时滞依赖的稳定性判据,对于时滞独立情形,将在下一步深入研究.此外,本文所提方法和所得定理充分性结论,在控制效果上仍具有一定的局限性.基于对同时含有时滞、奇异摄动、不确定性的离散控制系统讨论其稳定性问题时,拟用在 Lyapunov 泛函和交叉项界定技术的不同形式将得到不同的定理结果.为此,怎样提出崭新的 Lyapunov 函数以及如何发现新的交叉项界定技术将值得更深一步的探讨.

若进一步加深理论高度,将时滞扩展到多时滞的系统理论中,能够在现代工程技术领域中产生重要的理论指导作用.为此,基于该系统在多时滞方面的稳定性研究将是很有价值的研究方向[14-16].

参考文献(References):

[1] 康卫, 陈昊, 郝云力. 时滞离散系统的有限时间稳定性分析[J]. 阜阳师范学院学报, 2017, **34**(3): 1-4.(KANG Wei, CHEN Hao, HAO Yunli. Finite time stability analysis of discrete time delay systems[J]. *Journal of Fuyang Normal University*, 2017, **34**(3): 1-4.(in Chinese))

[2] SHANG Wanzhen, ZHANG Xian. Exponential stability analysis of discrete linear time delay systems: method based on weighted discrete orthogonal polynomials[J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2017, **34**(4): 397-403.

[3] 贾晓瑞. 时滞饱和离散广义 Markov 跳变系统的有限时间控制[D]. 硕士学位论文. 秦皇岛: 燕山大学, 2016.

(JIA Xiaorui. Finite time control of discrete-time generalized Markov jump systems with time delay saturation [D]. Master Thesis. Qinghuangdao: Yanshan University, 2016.(in Chinese))

[4] 朱彪. 几种离散脉冲切换系统的稳定性分析[D]. 硕士学位论文. 株洲: 湖南工业大学, 2014.(ZHU Biao. Stability analysis of several discrete impulsive switched systems[D]. Master Thesis. Zhuzhou: Hunan University of Technology, 2014.(in Chinese))

[5] 赵磊, 孙福权, 任俊超, 等. 不确定奇异分布参数系统的鲁棒 *D* 稳定[J]. 控制工程, 2018, **25**(6): 985-992. (ZHAO Lei, SUN Fuquan, REN Junchao, et al. Robust *D*-stability for singular distributed parameter systems subjected to uncertainties[J]. *Control Engineering*, 2018, **25**(6): 985-992.(in Chinese))

[6] 孙凤琪. 若干类时滞奇异摄动系统的稳定性分析与控制[D]. 博士学位论文. 沈阳: 东北大学, 2012.(SUN Fengqi. Stability analysis and control of several classes of singularly perturbed systems with time delay[D]. PhD Thesis. Shenyang: Northeast University, 2012.(in Chinese))

[7] 李笑波. 线性反馈控制驱动下的一类非线性离散系统的渐近稳定性[D]. 硕士学位论文. 南京: 南京师范大学, 2019.(LI Xiaobo. Asymptotic stability of a class of nonlinear discrete systems driven by linear feedback control [D]. Master Thesis. Nanjing: Nanjing Normal University, 2019.(in Chinese))

[8] 毛莉, 赵东霞. 双时滞单摆系统的稳定性分析[J]. 云南师范大学学报, 2020, **40**(2): 38-43.(MAO Li, ZHAO Dongxia. Stability analysis of double delay simple pendulum system[J]. *Journal of Yunnan Normal University*, 2020, **40**(2): 38-43.(in Chinese))

[9] 尹宗明, 张宁, 雷蔓, 等. 一种改进的区间时变时滞系统稳定性准则[J]. 控制工程, 2020, **27**(3): 462-468.(YIN Zongming, ZHANG Ning, LEI Man, et al. An improved stability criterion for interval time-varying delay systems[J]. *Control Engineering*, 2020, **27**(3): 462-468.(in Chinese))

[10] SUN P, HUANG Q Z, YANG J X. Diagonal stability analysis of discrete-time nonlinear positive switched systems with delays: a homogeneous polynomial diagonal Lyapunov function method[C]//*Proceedings of the 38th Chinese Control Conference*. Guangzhou, China, 2019.

[11] ZHANG T L, DENG F Q, ZHANG W H. Study on stability in probability of general discrete-time stochastic systems[J]. *Science China (Information Sciences)*, 2020, **63**(5): 215-217.

[12] 田恩刚, 岳东, 张益军, 等. 改进的含有区间变时滞的离散系统的稳定性分析[C]//自动化学会, 控制理论专业委员会. 第二十七届中国控制会议. 中国, 昆明, 2008.(TIAN Engang, YUE Dong, ZHANG Yijun, et al. Stability analysis of improved discrete-time systems with interval time-varying delay[C]//Control Theory Committee, Society of Automation. *Proceedings of the 27th China Control Conference*. Kunming, China, 2008.(in Chinese))

[13] 曹璐. 基于最小模型误差准则的非线性滤波及控制理论与应用研究[D]. 博士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2014.(CAO Lu. Theory and application of nonlinear filtering and control based on minimum model error criterion[D]. PhD Thesis. Changsha: University of Defense Science and Technology, 2014.(in Chinese))

[14] 戴德宣, 王少伟. 趋旋性微生物在幂律流体饱和水平多孔层中的热-生物对流稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(8): 856-865.(DAI Dexuan, WANG Shaowei. Linear Stability analysis on thermo-bioconvection of gyrotactic microorganisms in a horizontal porous layer saturated by a power-law fluid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(8): 856-865.(in Chinese))

[15] 芦泽阳, 李树江, 王向东. 采用 RBF 网络的喷雾机喷杆自适应动态面跟踪控制[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(7): 801-809.(LU Zeyang, LI Shujiang, WANG Xiangdong. Adaptive RBF-network dynamic surface tracking control of sprayer boom systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(7): 801-809.(in Chinese))

[16] 赵晨, 戈新生. 基于虚拟完整约束的欠驱动起重机控制方法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(3): 302-310. (ZHAO Chen, GE Xinsheng. A control method for underactuated cranes based on virtual holonomic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(3): 302-310.(in Chinese))