

# 基于 Udwadia-Kalaba 方法的并联机器人 鲁棒伺服约束控制\*

韩江<sup>1</sup>, 汪鹏<sup>1</sup>, 董方方<sup>1</sup>,  
夏链<sup>1</sup>, 赵晓敏<sup>2</sup>

(1. 合肥工业大学 机械工程学院, 合肥 230009;  
2. 合肥工业大学 汽车与交通工程学院, 合肥 230009)

**摘要:** 针对 2 自由度冗余驱动并联机器人轨迹跟踪控制问题, 提出了一种基于 Udwadia-Kalaba 方程的鲁棒伺服控制方法. 在负载、外部干扰以及制造误差的影响下, 无法得到机器人精确、完整的运动模型, 导致机器人控制性能变差. 为解决这类不确定性带来的影响, 提出了一种鲁棒控制方法. 该方法通过保证系统的一致有界性和一致最终有界性, 使系统能够精确跟踪理想约束轨迹. 此外, 该方法采用 Udwadia-Kalaba 方程, 求解控制过程中满足系统理想约束所需要的约束力. Udwadia-Kalaba 方程不需要 Lagrange 乘子或伪广义速度等辅助变量, 可以同时处理完整约束和非完整约束, 且可以获得满足轨迹约束的约束力解析解. 利用 Lyapunov 函数对该鲁棒控制方法的稳定性进行了理论证明, 并且通过仿真实验, 验证了该鲁棒控制方法能够在非理想条件下实现给定轨迹的高精度跟踪控制.

**关键词:** Udwadia-Kalaba 方法; 鲁棒控制; 不确定性; 并联机器人; 约束控制

**中图分类号:** TH113; TP242      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.410197

## Robust Servo Constrained Control of Parallel Robots Based on the Udwadia-Kalaba Method

HAN Jiang<sup>1</sup>, WANG Peng<sup>1</sup>, DONG Fangfang<sup>1</sup>,  
XIA Lian<sup>1</sup>, ZHAO Xiaomin<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology,  
Hefei 230009, P.R.China;

2. School of Automobile and Transportation Engineering, Hefei University  
of Technology, Hefei 230009, P.R.China)

**Abstract:** For the trajectory tracking control problems of 2-DOF redundant drive parallel robots, a robust servo control method based on the Udwadia-Kalaba equation was proposed. Under the influences of load, external interference and manufacturing errors, it is impossible to obtain the accurate and complete motion model for the robot, and the control performance of the robot is poor. To solve the impacts of this type of uncertainty, a ro-

\* 收稿日期: 2020-07-01; 修订日期: 2021-01-14

**基金项目:** 国家重点研发计划(2018YFB1308400); 国家自然科学基金(51905140); 安徽省高校协同创新项目(GXXT-2019-031)

**作者简介:** 韩江(1963—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: jianghan@hfut.edu.cn);  
董方方(1988—), 男, 副教授, 硕士生导师(通讯作者, E-mail: fangfangdong@hfut.edu.cn).

**引用格式:** 韩江, 汪鹏, 董方方, 夏链, 赵晓敏. 基于 Udwadia-Kalaba 方法的并联机器人鲁棒伺服约束控制[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(3): 264-274.

bust control method was proposed to enable the system to accurately track the ideal trajectory, and ensure the uniform boundedness and the uniform ultimate boundedness of the overall system. In addition, the Udwadia-Kalaba equation was used to solve the constraint force required by the system to meet the ideal constraint in the control process. The Udwadia-Kalaba equation does not require auxiliary variables such as Lagrangian multipliers or pseudo-generalized velocities, and can handle both complete and incomplete constraints, with analytical solutions of constraint forces satisfying the trajectory obtained. The stability of this robust control method was proved theoretically with the Lyapunov function. Simulation experiments show that, the proposed robust control method can achieve high-precision tracking control along a given trajectory under non-ideal conditions.

**Key words:** Udwadia-Kalaba method; robust control; uncertainty; parallel robot; constrained control

## 引 言

并联机器人是由动平台(或称为末端)和静平台(或称为支架)以及连接着它们的若干运动分支(或称为腿)组成的机械系统,具有动力性能好、承载能力强、精度高及刚度大等优点,目前在工业、医疗和航空等领域上得到了广泛应用.并联机器人在实际应用中有自己的优势,但由于并联机器人结构之间的耦合关系十分复杂,通常是一个多参数耦合及高度非线性的复杂系统,这使得对并联机器人实现精确控制十分困难.现有的控制方法大致有基于模型的控制方法、反馈控制法、PID 控制方法、自适应控制法、鲁棒控制方法以及神经网络控制和模糊控制.孟翌<sup>[1]</sup>采用基于模型的机器人控制系统的开发方法,建立了针对机器人控制系统的元模型和领域模型.郭盛等<sup>[2]</sup>为了对结构复杂的并联构型手控器进行力反馈操作,提出了一种基于虚拟仿真的动力学建模与控制方法,完成了根据碰撞信号在碰撞模拟的控制策略下生成准确的反馈力数据,很好地实现了力反馈控制效果.苏玉鑫等<sup>[3]</sup>基于机器人关节位置测量,采用分散控制策略和非线性 PID 控制算法,实现了 6 自由度并联机器人的高精度轨迹跟踪控制.常青等<sup>[4]</sup>提出了一种四足机器人坡面运动自适应控制算法,提高了机器人的运动稳定性.郭伟斌等<sup>[5]</sup>针对机器视觉导航的除草机器人,对导航角和导航距这两个参数选择隶属函数,提出了一种模糊控制方法引导除草机器人沿着农作物行自动行走,验证了模糊控制方法对该机器人有较高的控制精度.孔令文等<sup>[6]</sup>针对未知环境中六足机器人的自主导航问题,设计了一种基于模糊神经网络的自主导航闭环控制算法,并依据该算法设计了六足机器人的导航控制系统.Yu 等<sup>[7]</sup>针对 2 自由度并联机器人提出了一种基于 Udwadia-Kalaba 方程的轨迹跟踪控制方法,该方法将理想轨迹以约束的形式引入,并且可以同时处理完整约束和非完整约束,但这种方法对初始状态要求较为苛刻.并联机器人常为一个复杂的不确定系统,常规的控制方法对并联机器人系统参数的不确定不具备鲁棒性,且应对负载变化导致的动力学特性的改变以及外部干扰的能力不强,因此常规的控制方法难以达到预期的效果.

针对上述问题,本文提出了一种鲁棒控制方法.该方法通过保证系统的一致有界性和一致最终有界性,使系统能够精确跟踪理想约束轨迹.该鲁棒控制方法需要对满足理想约束轨迹所需要的约束力进行求解.约束力的求解可以利用静力平衡方程和虚功原理等方法.此外彭慧莲等<sup>[8]</sup>采用直角坐标和建立约束方程的局部方法,给出了一种求解多体系统约束力的方法.利用第一类 Lagrange 方程建立多体系统的动力学方程时,系统的约束力是与 Lagrange 乘子有关的函数.冯志友等<sup>[9]</sup>运用 Newton-Euler 法建立了该机构的逆动力学方程,在给定动平台的运动规律和外力后,通过动力学方程求解得出所需驱动力和约束力矩.但这些方法都无法得到约束力的解析解.本文通过 Udwadia-Kalaba<sup>[10]</sup>方程,得到了满足系统理想约束所需要的约束力.Udwadia-Kalaba 方法不需要借助额外辅助变量,最为显著的优点是得到的约束力是解析解的表达式.在实际情况中,由于模型的不确定性和初始约束状态不满足,使得单纯的基于 Udwadia-Kalaba 方法的伺服约束控制结果出现发散现象<sup>[11]</sup>,无法实现期望的轨迹跟踪控制.为了解决这类初始状态不满足以及模型不精确问题,本文在并联机器人系统中引入不确定性,提出了一种鲁棒控制器.该控制方法保证系统的一致有界性和一致最终有界性,并且通过理论证明和仿真验证的方式,说明了该鲁棒控制方法的稳定性和有效性.

## 1 并联机器人系统及约束力模型

一个 2 自由度冗余驱动并联机器人如图 1 所示,其由 3 个子系统组成,单个子系统如图 2 所示.每个子

系统的一端通过旋转关节固定在支座上,3个支座上的旋转关节由3个电机提供驱动力矩,另一端则连接在一个末端执行器上。

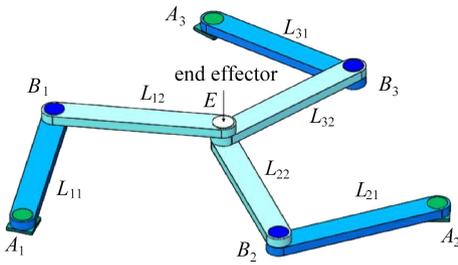


图1 平面2自由度冗余驱动并联机器人

Fig. 1 A planar 2-DOF redundant-drive parallel robot

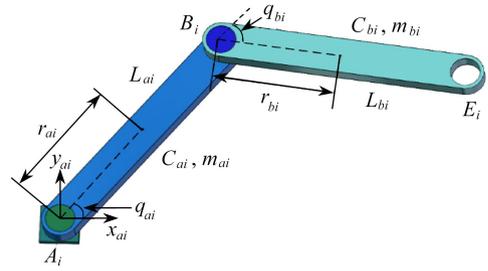


图2 子系统  $i$

Fig. 2 Subsystem  $i$

一般机械系统的动力学方程可以写成如下形式<sup>[12]</sup>:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, t) = \boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

其中  $t \in \mathbf{R}$  是时间变量,  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$  为系统状态变量,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$  是对应的速度向量,  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$  是对应的加速度向量,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^n$  是系统控制输入,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$  代表质量/惯量矩阵,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  代表离心力/科氏力矩阵,  $\mathbf{G}(\mathbf{q}, t)$  代表重力矩阵.  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  和  $\mathbf{G}(\mathbf{q}, t)$  具有适当的维数, 并且假设  $\mathbf{M}(\cdot)$ ,  $\mathbf{C}(\cdot)$  和  $\mathbf{G}(\cdot)$  都是连续的。

针对本文的研究对象——2自由度冗余驱动并联机器人来说, 由于系统水平, 所以重力势能始终不变. 根据式(1)可写出2自由度冗余驱动并联机器人的动力学方程, 进一步将2自由度冗余驱动并联机器人的动力学方程改写成如下无约束形式<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

其中, 选取的状态变量  $\mathbf{q} = [q_{a1}, q_{b1}, x_{a1}, y_{a1}, q_{a2}, q_{b2}, x_{a2}, y_{a2}, q_{a3}, q_{b3}, x_{a3}, y_{a3}]^T$ , 系数矩阵  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  的定义及表达式参见附录A. 假设式(2)的系统存在  $m$  个约束 ( $m \leq n$ ), 即

$$\sum_{i=1}^n A_{li}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i = C_l(\mathbf{q}, t), \quad (3)$$

其中  $l = 1, 2, 3, \dots, m$ . 上述约束被看做是一阶形式, 将一阶形式的约束写成如下矩阵:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{c}(\mathbf{q}, t), \quad (4)$$

其中  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$  为  $m \times n$  阶矩阵 ( $m \leq n$ ),  $\mathbf{c}(\mathbf{q}, t)$  为  $m \times 1$  阶列向量. 将一阶形式的约束对时间求一次导, 可得

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} A_{li}(\mathbf{q}, t) \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n A_{li}(\mathbf{q}, t) \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} C_l(\mathbf{q}, t), \quad (5)$$

其中

$$\frac{d}{dt} A_{li}(\mathbf{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{li}(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial A_{li}(\mathbf{q}, t)}{\partial t},$$

$$\frac{d}{dt} C_l(\mathbf{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial C_l(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial C_l(\mathbf{q}, t)}{\partial t}.$$

在式(5)中, 我们将二阶项  $\ddot{q}_i$  放在等式左边, 其余移项到等式右边, 并设

$$\mathbf{b}_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \frac{d}{dt} C_l(\mathbf{q}, t) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} A_{li}(\mathbf{q}, t) \right) \dot{q}_i. \quad (6)$$

联立式(5)和式(6), 并写成矩阵形式:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (7)$$

其中  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$  为  $m \times 1$  阶列向量. 假设对于每一个  $(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) > \mathbf{0}$ . 根据 Udwadia-Kalaba 方法, 系统模型(2)要满足约束(7)需要额外的约束力  $\mathbf{Q}^c$ :

$$\mathbf{Q}^c = \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{q}, t) (\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{q}, t))^+ [\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}}], \quad (8)$$

其中“+”为广义逆矩阵, 该约束力服从 d'Alembert 原理的 Lagrange 形式, 且约束力为解析解, 同时基于与“非

约束系统”相同的系统状态变量.

## 2 鲁棒控制器设计

2自由度冗余驱动并联机器人是一个相对复杂的多输入多输出非线性系统,其控制是十分复杂的.由于测量和建模的不精确,再加上负载的变化以及外部扰动的影响,实际上无法得到机器人精确、完整的运动模型,所以我们在机器人动力学模型中引入不确定性概念.包含不确定性的系统模型,可以用下面的方程(9)来描述:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\sigma}, t) \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (9)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \subset R^p$  是不确定参数,  $\Sigma$  是紧凑且有界的, 代表着  $\boldsymbol{\sigma}$  可能的边界.

假设1 对于每一个  $(\mathbf{q}, t) \in R^n \times \mathbf{R}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ , 都有  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, t) > \mathbf{0}$ .

假设2 惯性矩阵  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma})$  是一致正定的, 而且存在常量  $\bar{\rho}, \underline{\rho} > 0$ , 使得

$$\underline{\rho} \leq \|\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma})\| \leq \bar{\rho}, \quad \forall \mathbf{q} \in R^n.$$

由于本文引入了不确定性, 故可以将  $\mathbf{M}(\cdot), \mathbf{C}(\cdot)$  做如下分解:

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{M}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}), \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\sigma}) = \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\sigma}), \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\bar{\mathbf{M}}$  和  $\bar{\mathbf{C}}$  表示已确定的部分,  $\Delta\mathbf{M}$  和  $\Delta\mathbf{C}$  则代表不确定性部分. 为表达方便, 令

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}), \\ \Delta\mathbf{D}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) - \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{E}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{I}, \end{cases} \quad (11)$$

根据式(11)可得  $\Delta\mathbf{D}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma})$ .

假设3 存在一个常量  $\rho_E > -1$  (可能未知), 使得对于所有的  $(\mathbf{q}, t) \in R^n \times \mathbf{R}$ , 都有

$$\frac{1}{2} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma} \lambda_{\min}(\mathbf{E}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, t) + \mathbf{E}^T(\mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}, t)) \geq \rho_E, \quad (12)$$

常量  $\rho_E$  一般是未知的, 因为不确定性边界是未知的. 如果特殊情况下没有不确定度, 那么  $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}$  (无不确定性),  $\mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{W} = \mathbf{0}$ , 在这种情况下我们可以选择  $\rho_E = 0$ .

假设4 对于给定的  $\mathbf{P} \in R^{m \times m}, \mathbf{P} > \mathbf{0}$ ,

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{P}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\mathbf{D}(\mathbf{q}, t)\mathbf{D}(\mathbf{q}, t)\mathbf{A}^T(\mathbf{q}, t)\mathbf{P}, \quad (13)$$

存在一个常数  $\underline{\lambda} > 0$ , 使得

$$\inf_{(\mathbf{q}, t) \in R^n \times \mathbf{R}} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t)) \geq \underline{\lambda}, \quad (14)$$

矩阵  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t)$  被认为是一致正定的, 因此其最小特征值的下界为正.

由于模型的不确定性, 理想的约束力无法实现期望约束轨迹, 即  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{c}(\mathbf{q}, t)$ . 设  $\boldsymbol{\beta}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{c}(\mathbf{q}, t)$ , 同时初始时刻  $t = t_0$  时, 系统有可能不满足理想约束, 即  $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ . 为了在非理想条件下使并联机器人实现理想轨迹, 本文提出了如下控制器设计:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{p}_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (15)$$

根据式(9), 令

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{11} = & \bar{\mathbf{M}}^{1/2}(\mathbf{q}, t) (\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \bar{\mathbf{M}}^{-1/2}(\mathbf{q}, t))^\dagger [\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \\ & \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}, t) \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}}], \end{aligned} \quad (16)$$

$\mathbf{p}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  即为计算出的理想约束力. 在有确定性的情况下,  $\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  可以使控制系统稳定和收敛:

$$\mathbf{p}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\kappa \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^T(\mathbf{q}, t) \mathbf{P} (\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{c}(\mathbf{q}, t)). \quad (17)$$

考虑系统不确定性,为实现理想轨迹,令

$$p_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (18)$$

式中

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{P}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{c})\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

$$\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{cases} \frac{(1 + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))^{-1}}{\|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\|}, & \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\| > \varepsilon, \\ \frac{(1 + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))^{-1}}{\varepsilon}, & \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

其中,  $\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  满足所示自适应律.当系统参数  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  满足  $\|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\| > \varepsilon$  时,  $\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  的大小随  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  改变,但当  $\|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\|$  过小时,  $\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  的大小不至于变得无法控制.

对于任意的  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ , 函数  $\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  定义如下:

$$\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \geq \max_{\sigma \in \Xi} \|\mathbf{P}\mathbf{A}[\Delta\mathbf{D}(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12}) + \mathbf{D}(-\Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}})]\|. \quad (19)$$

通过选择合适的参数  $\kappa, \varepsilon > 0$ , 根据式(15)~(18),可以得到系统输入力矩  $\boldsymbol{\tau}$ .在假设 1~4 的前提下,系统(3)在控制输入力矩  $\boldsymbol{\tau}$  的作用下,可以使得  $\boldsymbol{\beta}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$  满足一致有界性和一致最终有界性.

**定理 1** 一致有界性:对于任意的  $r > 0$ , 有  $d(r) < \infty$  使得如果  $\boldsymbol{\beta}(\cdot)$  是任意解,对于  $\|\boldsymbol{\beta}(t_0)\| \leq r$  所有的  $t \geq t_0$ , 都有  $\|\boldsymbol{\beta}(t)\| \leq d(r)$ .

一致最终有界性:对于任意的  $r > 0$ , 其中  $\|\boldsymbol{\beta}(t_0)\| \leq r$ , 存在  $\bar{d} > 0$  使得  $\|\boldsymbol{\beta}(t)\| \leq \bar{d}$  对于任意的  $\bar{d} > \underline{d}$  并且  $t \geq t_0 + T(\bar{d}, r)$  成立,其中  $T(\bar{d}, r) < \infty$ .

### 3 控制器稳定性分析

稳定性分析采用 Lyapunov 方法,选取合适的 Lyapunov 函数  $V(\boldsymbol{\beta})$ :

$$V(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\beta}, \quad (20)$$

证明  $V(\boldsymbol{\beta})$  为合法的 Lyapunov 函数.根据假设 4 可知,  $\mathbf{P}$  为给定正定矩阵,设其最大特征值和最小特征值分别为  $\lambda_{p_{\max}}, \lambda_{p_{\min}}, \lambda_{p_{\max}} \geq \lambda_{p_{\min}} > 0$ , 故

$$\lambda_{p_{\min}} \|\boldsymbol{\beta}\|^2 \leq V(\boldsymbol{\beta}) \leq \lambda_{p_{\max}} \|\boldsymbol{\beta}\|^2. \quad (21)$$

对于控制系统期望的相应轨迹  $\boldsymbol{\beta}$  和系统存在的不确定度  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ,  $V(\boldsymbol{\beta})$  的一阶导数如下:

$$\dot{V} = 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\dot{\boldsymbol{\beta}} = 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{b}) = 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\{\mathbf{A}[\mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12} + \mathbf{p}_{13})] - \mathbf{b}\}. \quad (22)$$

联立式(11)和式(22),可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\{\mathbf{A}[(\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} - \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})(\mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12} + \mathbf{p}_{13})] - \mathbf{b}\} = \\ &= 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\{\mathbf{A}[\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11}) + \mathbf{D}\mathbf{p}_{12} + \mathbf{D}(-\Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + \\ &= \Delta\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12}) + (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})\mathbf{p}_{13}] - \mathbf{b}\}. \end{aligned} \quad (23)$$

根据式(8)可知

$$\mathbf{A}[\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D}\mathbf{p}_{11}] - \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

联立式(23)和式(24)可得

$$\dot{V} = 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\mathbf{A}[\mathbf{D}(-\Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12}) + \mathbf{D}\mathbf{p}_{12} + (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})\mathbf{p}_{13}], \quad (25)$$

$$\dot{V} = 2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\mathbf{A}[\mathbf{D}(-\Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12}) + \mathbf{D}\mathbf{p}_{12} + (\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D})\mathbf{p}_{13}]. \quad (26)$$

式(25)可以拆分为 3 部分,根据式(19)可得

$$\begin{aligned} &2\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{P}\mathbf{A}[\mathbf{D}(-\Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12})] \leq \\ &2\|\boldsymbol{\beta}\| \|\mathbf{P}\mathbf{A}[\mathbf{D}(-\Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{D}(-\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{12})]\| \leq 2\|\boldsymbol{\beta}\| \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \end{aligned} \quad (27)$$

根据式(17),将  $\mathbf{p}_{12}$  内参数全部展开可得

$$2\beta^T PADp_{12} = 2\beta^T PAD[-\kappa\bar{M}^{-1}A^T P(A\dot{q} - c)] = -2\kappa\beta^T PAD\bar{M}^{-1}A^T P\beta = -2\kappa(DA^T P\beta)^T(DA^T P\beta) = -2\kappa\eta^T \eta = -2\kappa \|\eta\|^2, \quad (28)$$

式中  $\eta = DA^T P\beta$ . 由于  $\Delta D = DE$ , 根据式(18)可得

$$2\beta^T PA(D + \Delta D)p_{13} = 2\beta^T PA(D + DE)(-\gamma(q, \dot{q}, t)\mu(q, \dot{q}, t)\rho(q, \dot{q}, t)) = 2(DA^T P\beta\rho)^T(I + E)(-\gamma\mu) = -2\gamma\mu^T \mu - 2\gamma\mu^T E\mu \leq -2\gamma \|\mu\|^2 - \gamma\mu^T \lambda_{\min}(E + E^T)\mu \leq -2\gamma(1 + \rho_E) \|\mu\|^2. \quad (29)$$

当  $\|\mu(q, \dot{q}, t)\| > \varepsilon$  时,

$$-2\gamma(1 + \rho_E) \|\mu\|^2 = -2 \frac{(1 + \rho(q, \dot{q}, t))^{-1}}{\|\mu(q, \dot{q}, t)\|} (1 + \rho_E) \|\mu\|^2 = -2 \|\mu\|; \quad (30)$$

当  $\|\mu(q, \dot{q}, t)\| \leq \varepsilon$  时,

$$-2\gamma(1 + \rho_E) \|\mu\|^2 = -2 \frac{(1 + \rho(q, \dot{q}, t))^{-1}}{\varepsilon} (1 + \rho_E) \|\mu\|^2 = -2 \frac{\|\mu\|^2}{\varepsilon}. \quad (31)$$

联立式(25)~(30)可得, 当  $\|\mu(q, \dot{q}, t)\| > \varepsilon$  时,

$$\dot{V} \leq -2\kappa \|\eta\|^2 - 2 \|\mu\| + 2 \|\beta\| \rho. \quad (32)$$

因为  $\eta = DA^T P\beta$ ,  $\inf_{(q,t) \in R^n \times \mathbb{R}} \lambda_{\min}(\Psi(q,t)) \geq \lambda_{\underline{}}$ , 所以

$$\begin{cases} \|\eta\|^2 = \eta^T \eta = \beta^T PADD^T AP\beta^3 \geq \lambda_{\underline{}} \beta^T \beta^3 \geq \lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2, \\ \|\mu\|^2 = \mu^T \mu = \beta^T PAD\rho D^T AP\beta\rho^3 \geq \lambda_{\underline{}} \rho^2 \beta^T \beta^3 \geq \lambda_{\underline{}} \rho^2 \|\beta\|^2, \\ \|\mu\|^3 \geq \rho \sqrt{\lambda_{\underline{}}} \|\beta\|. \end{cases} \quad (33)$$

联立式(31)~(32)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\kappa \|\eta\|^2 - 2 \|\mu\| + 2 \|\beta\| \rho \leq \\ &-2\kappa\lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2 - 2\rho\sqrt{\lambda_{\underline{}}} \|\beta\| + 2 \|\beta\| \rho \leq -2\kappa\lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2 + 2\rho(1 - \sqrt{\lambda_{\underline{}}}) \|\beta\|. \end{aligned} \quad (34)$$

当  $\|\mu(q, \dot{q}, t)\| \leq \varepsilon$  时,

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\kappa \|\eta\|^2 - 2 \frac{\|\mu\|^2}{\varepsilon} + 2 \|\beta\| \rho \leq \\ &-2\kappa\lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2 - 2 \frac{\lambda_{\underline{}} \rho^2 \|\beta\|^2}{\varepsilon} + 2 \|\beta\| \rho \leq -2\kappa\lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2 + \frac{\varepsilon}{2\lambda_{\underline{}}}. \end{aligned} \quad (35)$$

设  $\delta = \max\{2\rho(1 - \sqrt{\lambda_{\underline{}}}) \|\beta\|, \varepsilon/(2\lambda_{\underline{}})\}$ , 则对于所有的  $\varepsilon > 0$  都有

$$\dot{V} \leq -2\kappa\lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2 + \delta. \quad (36)$$

在假设 1~4 的前提下, 选择合适的  $\varepsilon, \rho$  和  $P$ , 使得

$$-2\kappa\lambda_{\underline{}} \|\beta\|^2 + \delta \leq 0, \quad \|\beta\|^2 \geq \frac{\delta}{2\kappa\lambda_{\underline{}}}, \quad (37)$$

故  $V$  为合法的 Lyapunov 函数. 根据文献[13]的一致有界性,  $d(r)$  表示如下:

$$d(r) = \begin{cases} R \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, & r \leq R, \\ r \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, & r > R, \end{cases} \quad R = \sqrt{\frac{\delta}{2\kappa\lambda_{\underline{}}}}. \quad (38)$$

此外, 一致最终有界性表示如下:

$$\underline{d} = R \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad (39)$$

给定任意  $\bar{d}$ , 满足  $\bar{d} > \underline{d}$ ,

$$T(\bar{d}, r) = \begin{cases} 0, & r \leq \bar{R}, \\ \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})r^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{P})\bar{R}^2}{2\kappa\lambda\bar{R}^2 - \delta}, & \text{others, } \bar{R} = \bar{d} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}}. \end{cases} \quad (40)$$

根据式(38)、(39)可知,  $\bar{d}$  决定了一致最终有界性的半径, 在选定了矩阵  $\mathbf{P}$  后, 当  $R \rightarrow 0$  时  $\bar{d} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ , 因此在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $\bar{d} \rightarrow 0$ , 所以系统是稳定的。

上述证明, 利用合理的 Lyapunov 函数从理论上推导了所提控制器的稳定性. 同时保证了系统的一致有界性和一致最终有界性。

## 4 数值仿真分析

本节通过 MATLAB 数值模拟的方法来验证所提出的鲁棒控制方法的有效性. 当然, 单个子系统的一些动力学参数, 例如连杆长度、连杆质量、质心位置、连杆相对质心的惯性矩等都是已知的, 如表 1 所示。

表 1 连杆的动力学参数

Table 1 Link dynamics parameters

	length $L/\text{m}$	distance from the barycenter to the rotating joint $r/\text{m}$	mass $m/\text{kg}$	moment of inertia relative to the barycenter $I/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
$L_{a1}$	0.244	0.115 0	1.252 5	0.012 4
$L_{b1}$	0.244	0.162 1	1.077 1	0.009 8
$L_{a2}$	0.244	0.065 7	1.366 3	0.012 2
$L_{b2}$	0.244	0.109 6	0.413 2	0.003 6
$L_{a3}$	0.244	0.065 7	1.366 3	0.012 2
$L_{b3}$	0.244	0.109 6	0.413 2	0.003 6

另外, 还需要知道每个子系统各个连杆之间的初始角度值和三个基座的位置坐标, 在这里我们假设速度/角速度和加速度/角加速度在初始时刻为 0, 并选择合适的机器人初始位置/角度状态变量  $\mathbf{q}_0 = [1.301\ 5, 2.175\ 2, 0, 0.25, 2.910\ 5, 1.459\ 3, 0.43, 0, 2.981\ 0, 1.877\ 6, 0.426\ 9, 0.500\ 5]^T$ . 系统模型(2)的参数根据文献[14]可得。

我们期望末端执行器  $E$  的  $x$  坐标和  $y$  坐标分别为时间  $t$  的函数  $f_x(t)$  和  $f_y(t)$ , 设理想的轨迹为  $f_x(t) = x_{e1} + 0.01\cos(t)$ ,  $f_y(t) = y_{e1} - 0.01\sin(t)$ , 其中理想  $x$  坐标变化曲线为余弦函数, 理想  $y$  坐标变化曲线为正弦函数, 合成理想的末端运动轨迹为平面内的圆. 根据式(7)可得约束方程为

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_1(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (41)$$

其中

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} -L\sin(q_{a1}) - L\sin(q_{a1} + q_{b1}) & -L\sin(q_{a1} + q_{b1}) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L\cos(q_{a1}) + L\cos(q_{a1} + q_{b1}) & L\cos(q_{a1} + q_{b1}) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} L\cos(q_{a1})\dot{q}_{a1}^2 + L\cos(q_{a1} + q_{b1})(\dot{q}_{a1} + \dot{q}_{b1})^2 - 0.01\cos(t) \\ L\sin(q_{a1})\dot{q}_{a1}^2 + L\sin(q_{a1} + q_{b1})(\dot{q}_{a1} + \dot{q}_{b1})^2 + 0.01\sin(t) \end{pmatrix},$$

( $x_{e1}, y_{e1}$ ) 是选取的初始基准点的位置坐标, 根据初始位置而定, 为常数。

在上述参数条件下, 虽然初始条件没有完全符合理想约束, 例如初始基座位置和初始连杆角度都不一定完全精确, 同时加速度/角加速度在初始时刻也不一定都为 0. 但所提鲁棒控制方法对这类初始状态不确定的情况有一定鲁棒性和适应性. 利用 MATLAB 数值模拟, 比较利用所提鲁棒控制方法和常规 PID 控制方法的控制效果, 以下为仿真验证结果。

图 3 为机器人末端的  $x$  轴坐标轨迹. 从约束  $f_x(t) = x_{e1} + 0.01\cos(t)$  可知, 末端期望  $x$  轴轨迹为余弦函

数.图 4 为机器人末端的  $y$  轴坐标轨迹,从约束  $f_y(t) = y_{e1} - 0.01\sin(t)$  可知,末端期望  $y$  轴轨迹为正弦函数.从仿真结果可以看出,传统 PID 控制与理想轨迹有一定偏差,而所提的鲁棒控制则基本完全和理想轨迹重合,具有很好的鲁棒性,在非理想初始条件下,也能实现对理想轨迹的准确跟踪.

按照给定理想轨迹约束,合成的实际轨迹为平面内的圆形.图 5 为实际末端轨迹,从图 5 可以明显看出,本文所提鲁棒控制与传统 PID 控制相比有更好的控制性能.传统 PID 控制轨迹跟踪性能较弱,而鲁棒控制则能够较为精确地跟踪理想约束轨迹.

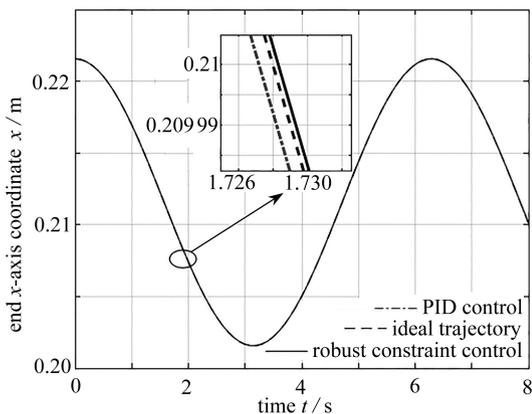


图 3 x 轴坐标轨迹图

Fig. 3 The x-axis coordinate trajectory

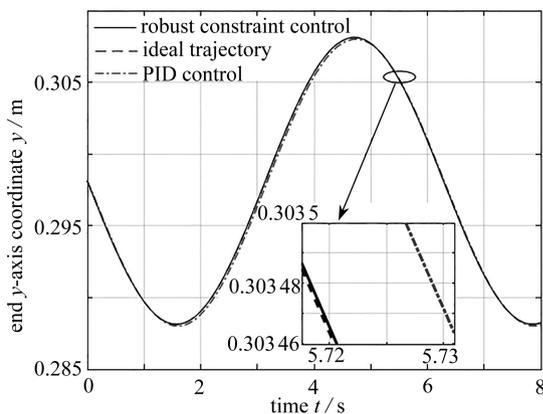


图 4 y 轴坐标轨迹图

Fig. 4 The y-axis coordinate trajectory

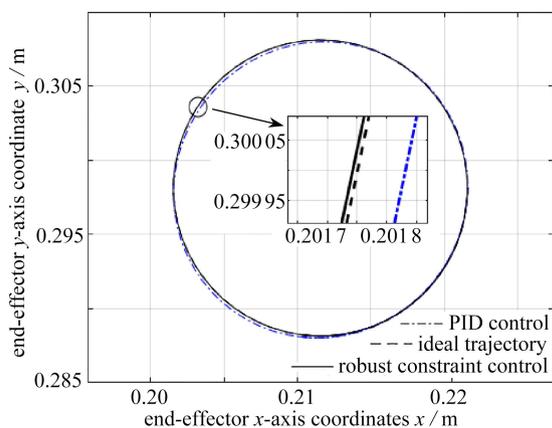


图 5 末端执行器轨迹图

Fig. 5 The trajectory of the end effector

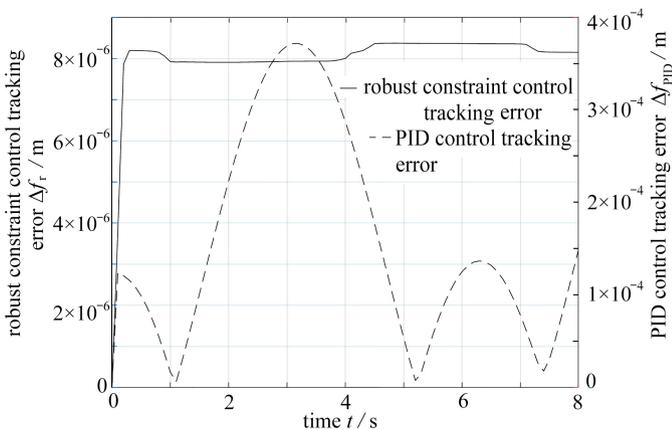


图 6 轨迹跟踪误差图

Fig. 6 The trajectory tracking error

表 2 为鲁棒控制器的跟踪误差与传统 PID 控制器的跟踪误差数据,图 6 为鲁棒控制器的跟踪误差与传统 PID 控制器的跟踪误差对比图.从表 2 和图 6 左侧坐标轴可以看出,鲁棒控制器的跟踪误差最大不超过  $8.4 \times 10^{-6}$  m,具有良好的轨迹跟踪性能.从表 2 和图 6 右侧坐标轴可以看出,传统 PID 控制器的跟踪误差最大已经达到  $3.71 \times 10^{-4}$  m,可知 PID 控制的轨迹跟踪性能相比鲁棒控制较弱.

表 2 鲁棒控制与 PID 控制下的跟踪误差对比

Table 2 The comparison of tracking errors under the proposed robust control and the PID control

	tracking error of the x-axis			tracking error of the y-axis			tracking error of the end effector		
	MIN	AVG	MAX	MIN	AVG	MAX	MIN	AVG	MAX
robust control $\Delta f_r / m$	0	$6.28 \times 10^{-6}$	$8.15 \times 10^{-6}$	0	$1.5 \times 10^{-6}$	$1.95 \times 10^{-6}$	0	$7.98 \times 10^{-6}$	$8.37 \times 10^{-6}$
PID control $\Delta f_{PID} / m$	0	$8 \times 10^{-6}$	$7.7 \times 10^{-5}$	0	$8.8 \times 10^{-5}$	$3.71 \times 10^{-4}$	0	$1.57 \times 10^{-4}$	$3.71 \times 10^{-4}$

综上仿真结果可知,本文提出的鲁棒控制,可以有效地在非理想初始条件下,准确地跟踪理想轨迹.

## 5 结 论

由于机器人测量和建模的不精确,再加上负载的变化以及外部扰动的影响,实际上无法得到机器人精确、完整的运动模型.对于这样一个复杂的不确定系统,常规的控制方法对并联机器人系统参数的不确定不具备鲁棒性,且应对负载变化导致的动力学特性的改变以及外部干扰的能力不强,因此常规的控制方法难以达到预期的效果.为解决这类问题,本文在并联机器人系统中引入不确定性,将系统拆分为已知部分和不确定部分,并且提出一种鲁棒伺服约束控制.为解决鲁棒控制中约束力求解问题,采用 Udwadia-Kalaba 方法得到系统约束力解析解.通过理论证明和仿真验证的方式,说明了该鲁棒控制方法的稳定性和有效性.同时,对比传统 PID 控制,本文所提鲁棒控制具有较好的控制性能,轨迹跟踪能力更强,具有较好的鲁棒性.综上所述,使用本文所提出的鲁棒约束控制方法,在非理想条件下,能够实现给定轨迹的高精度跟踪控制,具有良好的控制性能.

## 附 录 A

文中并联机器人状态变量选为  $\mathbf{q} = [q_{a1}, q_{b1}, x_{a1}, y_{a1}, q_{a2}, q_{b2}, x_{a2}, y_{a2}, q_{a3}, q_{b3}, x_{a3}, y_{a3}]^T$ , 向量中各组成元素及并联机器人基本参数如表 A1 所示.

表 A1 第  $i$  个子系统的参数 ( $i = 1, 2, 3$ )

Table A1 Parameters of the  $i$ -th subsystem ( $i = 1, 2, 3$ )

parameter name	actual physical meaning
$x_{ai}, y_{ai}$	$x$ -axis and $y$ -axis coordinates of point $A_i$
$x_{mai}, y_{mai}$	$x$ -axis and $y$ -axis coordinates of centroid $C_{ai}$
$x_{mbi}, y_{mbi}$	$x$ -axis and $y$ -axis coordinates of centroid $C_{bi}$
$q_{ai}$	angle of connecting rod $A_i B_i$ with respect to the horizontal line
$q_{bi}$	angle of connecting rod $B_i E_i$ with respect to the horizontal line
$r_{ai}$	barycenter $C_{ai}$ relative to active joint $A_i$
$r_{bi}$	barycenter $C_{bi}$ relative to active joint $B_i$
$L$	length of link $A_i B_i$
$m_{ai}, m_{bi}$	masses of links $A_i B_i, B_i E_i$
$I_{ai}, I_{bi}$	moments of inertia of links $A_i B_i, B_i E_i$ relative to the barycenter

并联机器人的动力学方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \boldsymbol{\tau}_3 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

式(A1)中  $i(i = 1, 2, 3)$  表示第  $i$  个子系统,第  $i$  个机械臂子系统的运动方程的矩阵形式如下:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i, t) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_i, t) \dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\tau}_i, \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} M_{i11} & M_{i12} & M_{i13} & M_{i14} \\ M_{i21} & M_{i22} & M_{i23} & M_{i24} \\ M_{i31} & M_{i32} & M_{i33} & M_{i34} \\ M_{i41} & M_{i42} & M_{i43} & M_{i44} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} C_{i11} & C_{i12} & C_{i13} & C_{i14} \\ C_{i21} & C_{i22} & C_{i23} & C_{i24} \\ C_{i31} & C_{i32} & C_{i33} & C_{i34} \\ C_{i41} & C_{i42} & C_{i43} & C_{i44} \end{pmatrix}, \quad (\text{A3})$$

其中

$$\begin{aligned} M_{i11} &= I_{ai} + I_{bi} + m_{ai} r_{ai}^2 + m_{bi} (L^2 + r_{bi}^2 + 2Lr_{bi} \cos q_{bi}), \\ M_{i12} &= M_{i21} = I_{bi} + m_{bi} (r_{bi}^2 + Lr_{bi} \cos q_{bi}), \\ M_{i13} &= M_{i31} = - [ (m_{ai} r_{ai} + m_{bi} L) \sin q_{ai} + m_{bi} r_{bi} \sin(q_{ai} + q_{bi}) ], \\ M_{i14} &= M_{i41} = (m_{ai} r_{ai} + m_{bi} L) \cos q_{ai} + m_{bi} r_{bi} \cos(q_{ai} + q_{bi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{i22} &= I_{bi} + m_{bi}r_{bi}^2, \\
M_{i23} &= M_{i32} = -m_{bi}r_{bi}\sin(q_{ai} + q_{bi}), \\
M_{i24} &= M_{i42} = -m_{bi}r_{bi}\cos(q_{ai} + q_{bi}), \\
M_{i33} &= M_{i44} = m_{ai} + m_{bi}, \\
M_{i34} &= M_{i43} = 0, \\
C_{i11} &= -m_{bi}Lr_{bi}\dot{q}_{bi}\sin q_{bi}, \\
C_{i12} &= -m_{bi}Lr_{bi}(\dot{q}_{ai} + \dot{q}_{bi})\sin q_{bi}, \\
C_{i21} &= m_{bi}Lr_{bi}\dot{q}_{ai}\sin q_{bi}, \\
C_{i31} &= \dot{q}_{ai}[(m_{ai}r_{ai} + m_{bi}L)\cos q_{ai} + m_{bi}r_{bi}\cos(q_{ai} + q_{bi})], \\
C_{i32} &= -m_{bi}r_{bi}\cos(q_{ai} + q_{bi})(2\dot{q}_{ai} + \dot{q}_{bi}), \\
C_{i41} &= -\dot{q}_{ai}[(m_{ai}r_{ai} + m_{bi}L)\sin q_{ai} + m_{bi}r_{bi}\sin(q_{ai} + q_{bi})], \\
C_{i42} &= -m_{bi}r_{bi}\sin(q_{ai} + q_{bi})(2\dot{q}_{ai} + \dot{q}_{bi}), \\
C_{i13} &= C_{i14} = C_{i22} = C_{i23} = C_{i24} = C_{i33} = C_{i34} = C_{i43} = C_{i44} = 0.
\end{aligned}$$

### 参考文献(References):

- [1] 孟昱. 基于模型的机器人控制系统集成仿真验证平台[D]. 硕士学位论文. 广州: 华南理工大学, 2015. (MENG Zhao. Model-based integrated simulation and verification platform for robot control system[D]. Master Thesis. Guangzhou: South China University of Technology, 2015. (in Chinese))
- [2] 郭盛, 梁艺瀚, 王志群, 等. 基于虚拟仿真的并联构型手控器动力学建模与力反馈控制[J]. 机器人, 2015, **37**(2): 224-230. (GUO Sheng, LIANG Yihan, WANG Zhiqun, et al. Dynamic modeling and force-feedback control of haptic device with parallel structure based on virtual simulation[J]. *Robot*, 2015, **37**(2): 224-230. (in Chinese))
- [3] 苏玉鑫, 段宝岩, 张永芳, 等. 并联机器人的非线性 PID 控制[J]. 控制与决策, 2003, **18**(4): 490-493. (SU Yuxing, DUAN Baoyan, ZHANG Yongfang, et al. Nonlinear PID control of a parallel manipulator[J]. *Control and Decision*, 2003, **18**(4): 490-493. (in Chinese))
- [4] 常青, 韩宝玲, 乔志霞, 等. 四足机器人斜坡运动的自适应控制算法[J]. 北京理工大学学报, 2019, **39**(9): 900-906. (CHANG Qing, HAN Baoling, QIAO Zhixia, et al. An adaptive control algorithm for quadruped robot trotting on a slope[J]. *Transaction of Beijing Institute of Technology*, 2019, **39**(9): 900-906. (in Chinese))
- [5] 郭伟斌, 陈勇. 基于模糊控制的除草机器人自主导航[J]. 机器人, 2010, **32**(2): 204-209. (GUO Weibin, CHEN Yong. Fuzzy control based autonomous navigation for a weeding robot[J]. *Robot*, 2010, **32**(2): 204-209. (in Chinese))
- [6] 孔令文, 李鹏永, 杜巧玲. 基于模糊神经网络的六足机器人自主导航闭环控制系统设计[J]. 机器人, 2018, **40**(1): 16-23. (KONG Lingwen, LI Pengyong, DU Qiaoling. The closed-loop control system design of hexapod robot autonomous navigation based on fuzzy neural network[J]. *Robot*, 2018, **40**(1): 16-23. (in Chinese))
- [7] YU R R, ZHAO H, ZHEN S C, et al. A novel approach for 2-degrees of freedom redundant parallel manipulator dynamics[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2017, **9**(6): 371-386.
- [8] 彭慧莲, 郭易圆, 王琪. 用第一类 Lagrange 方程求解平面多体系统约束力的方法[J]. 工程力学, 2008, **25**(12): 65-71. (PENG Huilian, GUO Yiyuan, WANG Qi. A method for solving constrained force of planar multibody system via the first kind of Lagrange's equations[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(12): 65-71. (in Chinese))
- [9] 冯志友, 张燕, 杨廷力, 等. 基于牛顿欧拉法的 2UPS-2RPS 并联机构逆动力学分析[J]. 农业机械学报, 2009, **40**(4): 193-197. (FENG Zhiyou, ZHANG Yan, YANG Tingli, et al. Inverse dynamics of a 2UPS-2RPS parallel mechanism by Newton-Euler formulation[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2009, **40**(4): 193-197. (in Chinese))
- [10] UDWADIA F E, KALABA R E. *Analytical Dynamics: a New Approach*[M]. New York: Cambridge University Press, 1996.

- [11] 张新荣, CHEN Yehwa, 平昭琪. 基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的机械臂轨迹跟踪控制[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2014, **34**(1): 115-119. (ZHANG Xinrong, CHEN Yehwa, PING Zhaoqi. Mechanical manipulator tracking control based on Udwadia and Kalaba equation[J]. *Journal of Chang'an University(Natural Science Edition)*, 2014, **34**(1): 115-119.(in Chinese))
- [12] ROSENBERG R. *Analytical Dynamics of Discrete Systems*[M]. New York: Plenum Press, 1977.
- [13] CORLESS M J, LEITMANN G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(5): 1139-1144.
- [14] CHENG H, YIU Y K, LI Z X. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2003, **8**(4): 483-491.
- [15] HUI J Z, PAN M X, ZHAO R Y, et al. The closed-form motion equation of redundant actuation parallel robot with joint friction: an application of the Udwadia-Kalaba approach[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **93**: 689-703.