

一类指定应力问题的变分原理与应用^{*}

王家林, 张俊波, 何琳, 陈卓

(重庆交通大学 土木工程学院, 重庆 400074)

摘要: 针对有限元分析中对应力或内力有指定条件的问题, 引入非弹性应变作为实现指定应力条件的附加未知量, 在小变形条件下描述了指定应力条件应当满足的弹性力学控制方程; 以位移和未知非弹性应变作为独立变量, 建立了具有指定应力条件问题的势能变分原理和虚功方程; 以位移、弹性应变、未知非弹性应变和应力为独立变量, 建立了一个含四类变量的广义变分原理. 在基于变分原理得到的桁架单元和梁单元平衡方程中, 指定轴力和需要的调整量以对偶形式出现, 可实现调整量已知情况下的常规受力分析, 又可在轴力指定条件下获得需要的调整量; 同时考虑了材料刚度和内力对结构的影响, 改进了目前预应力筋模拟的等效荷载法和实体力筋法, 还可用于拉索结构的索力优化和调整算法. 通过拉索结构位移优化和索力调整的数值算例, 验证了该文理论与算法的可行性及精度.

关键词: 指定应力问题; 变分原理; 有限元; 非弹性应变; 预应力筋; 索

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410173

A Variational Principle and Applications for a Class of Specified Stress Problems

WANG Jialin, ZHANG Junbo, HE Lin, CHEN Zhuo

(School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China)

Abstract: To solve some problems in the finite element analysis with specified conditions for stresses or internal forces, the inelastic strain as an additional unknown to meet the specified stress condition was introduced. The elastic mechanics governing equations meeting the specified stress conditions were described under the small deformation assumption. The potential variational principle and the virtual work equation were established with the displacements and unknown inelastic strains as independent variables. Then a generalized variational principle with 4 types of independent variables of the displacement, the elastic strain, the unknown inelastic strain and the stress, was presented. Based on the variational principle, the specified axial forces and the required adjustment quantities were arranged in a dual form in the equations for truss and beam elements. The ordinary stress analysis was realized under the condition with known adjustment quantities, and the required adjustment quantities were obtained with specified axial force conditions. The effects of material stiffness and internal force of a structure were considered in the new method with the prestressing reinforcement simulation improved based on the equivalent load method or the real physical reinforcement method. The method applies to the optimization and adjustment of cable forces in related structures. Numerical simulations of displacement optimization and cable tension adjustment for a cable-stayed structure demonstrate the feasibility and accuracy

* 收稿日期: 2020-06-13; 修订日期: 2020-08-12

作者简介: 王家林(1968—), 男, 教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: 747085700@qq.com).

引用格式: 王家林, 张俊波, 何琳, 陈卓. 一类指定应力问题的变分原理与应用[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(4): 331-341.

of the presented theory and algorithm.

Key words: specified stress problem; variational principle; finite element; inelastic strain; prestressing tendon; cable

引 言

有限元法是工程结构数值分析的常用手段.常规有限元法用数值手段求解控制方程在指定初值条件与边值条件下的解,一般在静力或拟静力问题中仅有位移边界条件和力边界条件.但在一些工程问题中存在一类特殊的非传统边界指定应力问题,如受某些因素影响或经一定措施调控,结构中某些部位的应力或内力需要满足指定的约束条件:① 预应力混凝土结构中的预应力筋应力在张拉锚固后需要达到有效预应力状态;② 斜拉桥的拉索和悬索桥的吊杆等通过长度调整需要具有指定的拉力值,以保证成桥状态的线形平顺和内力均匀;③ 开裂后裂缝界面的应力为零;④ 在某些复杂工程结构中,可以利用经某些测量手段获得的结构当前应力值来反演未知的荷载作用或其他响应量.

指定应力问题与初应力问题不同,两者的差别在于:① 初应力问题中,初始应力为受载前的初值,结构受载变形以后,应力在初值基础上演变发展,但对于应力的最终值并没有指定约束;② 指定应力问题中,存在某些影响因素和调控措施,使得结构承受荷载后的应力具有指定值(已知或需要达到某个目标),要求有限元分析的计算结果中应力等于指定值.

在常规的有限元方法和软件中,应力和内力是计算结果,不便于直接模拟这种问题.

对于预应力筋的模拟,目前普遍采用的方法有等效荷载法和实体力筋法两种^[1].等效荷载法^[2-5]将预应力筋从结构中舍去,用一组等效荷载代替预应力筋对混凝土的作用.这种方法建模简单,可以直接准确模拟考虑各种损失后的有效预应力.其缺点是分析模型中实际上没有预应力筋材料,在结构的后续承载过程中,难以考虑预应力筋的刚度贡献和应力变化.实体力筋法^[6-11]在建模中分别用不同的单元模拟混凝土和预应力筋,通过建立预应力筋节点与混凝土单元的位移约束关系实现两者的连接和共同工作,采用温度变化、初应变或初应力模拟预应力的施加.这种方法既考虑了预应力筋对结构的刚度贡献,也可以考虑预应力筋与结构共同受力后产生的应力变化.实体力筋法的难点是:对于后张预应力筋,无法在计算前根据有效预应力准确设定恰当的温度变化、初应变或初应力幅度,以使得预应力筋与混凝土一起变形后具有指定的有效预应力.要使各预应力筋具有指定的应力,通常需要多次计算进行调整或迭代.

对于斜拉桥拉索的索力模拟,目前主要的方法有生死单元技术、基于初应变或温度荷载的循环迭代法^[12-15],以及影响矩阵法^[16-18].单元生死法先“杀死”拉索单元,用一对集中力施加到斜拉索两端的节点上,结构计算完成后再激活拉索单元,移去施加的节点荷载,设置拉索单元的应力、应变和位移状态,以便后续计算.这种方法对小位移问题可以得到准确解.其不足之处在于:① 杀死拉索时施加在拉索两端的集中力始终沿两节点连线方向,无法考虑拉索的垂度效应,也无法考虑结构几何非线性引起的拉索两端节点的变位^[18];② 使用了两个计算模型,无拉索的模型和有拉索的模型,需要根据计算要求进行模型切换,不便于多次调索的模拟分析.基于温度荷载、初应变或初应力的迭代法首先针对单根索建立索力和其温度荷载、初应变或初应力之间的关系,再根据结构的变形来修改各拉索的温度荷载、初应变或初应力,形成迭代算法.这种方法不便于考虑多个索力对结构变形和结构变形对各索力的相互影响,迭代法的计算量大,还涉及收敛问题.影响矩阵法基于结构的线弹性特点,通过对逐个拉索施加非弹性变形影响(如温度荷载、初应变或初应力),建立各拉索的非弹性变形影响对全部拉索索力的影响矩阵,再根据目标索力求解影响矩阵方程得到与目标索力对应的各拉索非弹性变形影响.影响矩阵法的优点是:① 考虑了多个索力对结构变形和结构变形对各索力的相互影响;② 对于不考虑几何非线性的线弹性结构,不存在收敛问题.其不足之处在于:① 影响矩阵的建立需要大量的准备计算工作;② 将基于线弹性结构建立的影响矩阵用于结构的几何非线性分析,影响矩阵本身存在准确性问题,需要通过迭代算法来获取各拉索的近似非弹性变形影响.

在上述问题中,预应力筋和拉索都需要满足指定的应力条件,在实际工程中通常采用张拉、松弛等技术措施对预应力筋和拉索的拉力进行调整,在常规的有限元分析中,一般通过初应变或温度变化等手段去改变

结果应力,以使结果应力满足指定条件。

近年来的一些研究成果表明,将非弹性应变作为独立自由度建立的有限元列式具有一些独特的优势。文献[19]引入非弹性收缩量作为调整桁架单元应力(轴力)的影响因素,将其作为独立自由度,利用虚功原理建立了一种含非弹性收缩量的桁架单元,能同时模拟预应力筋的刚度和指定的有效预应力。文献[20]应用该单元模拟斜拉桥的拉索,能准确模拟斜拉桥当前状态的索力并实现目标索力的精确调整。文献[21-23]针对纤维梁单元的材料非线性问题,将塑性应变分量作为独立自由度,提高了非线性迭代的效率。文献[24]针对平面弹塑性问题,将塑性应变分量作为独立自由度,利用虚功原理结合等参元 Gauss 积分方案,建立了一种高效的弹塑性问题分析方法。

变分原理是建立有限元列式的理论基础,文献[25]详细论述了小位移情况下的各种弹性力学变分原理及有限元方法,并指出(P53):Hu-Washizu 变分原理^[26-27]是弹性力学中最一般的变分原理,其他的变分原理(包括 Hellinger-Reissner 变分原理在内)是 Hu-Washizu 变分原理的特殊情况。对于有限位移几何非线性问题,钱伟长首先建立了大位移非线性弹性理论的变分原理和广义变分原理^[28];付宝连论述了有限变形非线性的变形能原理及功的互等定理与变分原理的关系^[29],并提出了有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理^[30];樊涛等建立了几何非线性非保守系统弹性力学的广义拟变分原理^[31]。在各种小位移和有限位移的弹性力学变分原理中,最多将位移、应变、应力三类变量作为独立变量,没有把对应力状态具有调整效应的非弹性应变作为独立变量。

本文把对应力有调整效应的非弹性应变作为独立自由度,研究了前述指定应力问题的弹性力学控制方程和变分原理。

1 指定应力问题的控制方程

在实际工程和有限元分析中,有多种措施和影响因素可用来调整应力结果以实现指定条件的满足。为简单起见,本文在小变形假设下讨论一种通过引入未知非弹性应变实现指定应力条件的方法。

根据弹性力学理论,指定应力问题的控制方程与约束条件可描述如下。

在弹性体域 V 内,有

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^0; \quad (4)$$

在指定位移边界 S_u 上,有

$$u_i = \bar{u}_i; \quad (5)$$

在指定应力边界 S_σ 上,有

$$\sigma_{ij}n_j = p_i; \quad (6)$$

在指定应力的域 V_σ 内,有

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0; \quad (7)$$

无指定应力的域 $V_u = V - V_\sigma$ 内,有

$$\varepsilon_{ij}^0 = 0, \quad (8)$$

式中 σ_{ij} 为应力, u_i 为位移, ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^p , ε_{ij}^0 分别为总应变、弹性应变、已知的非弹性应变和未知的非弹性应变, $A(\varepsilon_{ij}^e)$ 为用弹性应变 ε_{ij}^e 表示的弹性势函数, f_i 和 p_i 分别为体力与面力集度, \bar{u}_i 为边界指定位移, σ_{ij}^0 为指定应力值,弹性体问题求解域记为 $V = V_\sigma + V_u$, 求解域的边界记为 $S = S_u + S_\sigma$, n_i 为边界的外法线方向单位向量,下标 $i, j = 1, 2, 3$ 。

与经典的弹性体控制方程与边界条件相比,指定应力问题中增加了方程(4)和(7)。方程(7)即为指定的

应力约束条件,此约束条件仅在域 V_σ 上满足.方程(4)表明总应变 ε_{ij} 可分解为弹性应变 ε_{ij}^e 、已知非弹性应变 ε_{ij}^p 和未知非弹性应变 ε_{ij}^0 , ε_{ij}^p 表示由温度等因素引起的已知的非弹性应变, ε_{ij}^0 表示由应力约束条件引起的附加非弹性应变.一般而言,在弹性体作用外因已知的情况下,域内应力场具有唯一解,若指定应力约束值与真实解间有差异时,满足指定应力约束条件需要有一定的“诱因”,比如在斜拉桥中通过调整拉索的无应力长度来改变整体结构的几何模型.由于在有限元数值方法中考虑几何模型的改变相对比较困难,在本文介绍的算法中引入一个虚拟的非弹性应变场 ε_{ij}^0 ,使得指定应力问题成为适定的.另根据局部化原理可假定非弹性应变场 ε_{ij}^0 仅在指定应力约束条件的域 V_σ 内非零,在其他区域 V_u 内取零值.

2 指定应力问题的势能变分原理和虚功方程

根据弹性力学的定解条件,只要不引入未知的影响因素,弹性体的应力就只能是确定的计算结果,难以在计算结果中实现指定的应力条件.因此,针对前述指定应力问题,本文引入未知非弹性应变对应力进行调整,并作为独立变量,构造泛函如下:

$$\Pi(u, \varepsilon^0) = \int_V A(\varepsilon_{ij}^e) dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_V f_i u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i u_i dS. \quad (9)$$

指定应力问题的变分原理可表述为:在满足应变位移关系式(2)、材料本构关系式(3)~(5)和(8)的所有允许位移 u_i 和非弹性应变 ε_{ij}^0 中,真实的 u_i 和 ε_{ij}^0 必使弹性体的泛函 Π 取驻值,也即使泛函 Π 取驻值的 u_i 和 ε_{ij}^0 必满足弹性体内的平衡微分方程式(1)、面力边界条件式(6)和指定应力条件式(7).

证明如下:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_V \delta A(\varepsilon_{ij}^e) dV + \int_{V_\sigma} \delta(\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV - \int_V \delta(f_i u_i) dV - \int_{S_\sigma} \delta(p_i u_i) dS = \\ &= \int_V \frac{\partial A(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \delta \varepsilon_{ij}^e dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = \\ &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = \\ &= \int_V \sigma_{ij} \delta(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^0) dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = \\ &= \int_V \sigma_{ij} (\delta \varepsilon_{ij} - \delta \varepsilon_{ij}^0) dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = \\ &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_\sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_V f_i \delta u_i dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (10)$$

上式推导的最后两个等式中运用了如下结论:

$$\delta \varepsilon_{ij}^p = 0, \quad \text{in } V, \quad (11)$$

$$\delta \varepsilon_{ij}^0 = 0, \quad \text{in } V_u. \quad (12)$$

由于

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV &= \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \delta(u_{i,j} + u_{j,i}) dV = \\ &= \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \\ &= \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \\ &= \int_S \sigma_{ij} \delta u_i n_j dS - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \\ &= \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (13)$$

将式(13)代入式(10)并整理后可得

$$\delta\Pi = - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV + \int_{V_\sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^0 dV + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - p_i) \delta u_i dS. \quad (14)$$

考虑到 δu_i 和 $\delta \varepsilon_{ij}^0$ 的任意性,由 $\delta \Pi = 0$ 可得

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0, & \text{in } V, \\ \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij} = 0, & \text{in } V_\sigma, \\ \sigma_{ij} n_j - p_i = 0, & \text{in } S_\sigma. \end{cases}$$

即可得证平衡方程式(1)、应力边界条件(6)和指定应力条件(7).以上过程的逆推也可由平衡微分方程、应力边界条件和指定应力条件获得该类问题的泛函.

由式(10)可得到与指定应力变分原理等价的虚功方程为

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV + \int_{V_\sigma} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 dV = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS. \quad (15)$$

对式(15)应用有限元的分片插值方法可得到各种单元的含应力条件的有限元列式,限于篇幅,本文中仅涉及桁架单元和梁单元的应用,平面问题和空间问题的有限元列式另文发表.

3 指定应力问题的广义变分原理

根据 Hu-Washizu 三类变量的广义变分原理,可构造一个含四类变量的泛函:

$$\begin{aligned} \Pi^*(u_i, \varepsilon_{ij}^e, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^0) &= \int_V A(\varepsilon_{ij}^e) dV + \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^p \right) dV - \\ &\int_V f_i u_i dV + \int_{V_\sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_{S_\sigma} p_i u_i dS + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) dS. \end{aligned} \quad (16)$$

对上述方程中等式右端几项分别变分可得

$$\delta \int_V A(\varepsilon_{ij}^e) dV = \int_V \frac{\partial A(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \delta \varepsilon_{ij}^e dV, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^p \right) dV &= \int_V \delta \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^p \right) dV - \\ &\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV + \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta \int_{V_\sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij}^0 dV = \int_{V_\sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^0 dV - \int_{V_\sigma} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dV, \quad (19)$$

$$\delta \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) dS = \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS. \quad (20)$$

对式(16)求变分,再代入式(17)~(20)并整理可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi^*(u_i, \varepsilon_{ij}^e, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^0) &= \int_V \left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}^e)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij}^e dV - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV + \\ &\int_{V_u} \delta \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^p \right) dV + \int_{V_\sigma} \delta \sigma_{ij} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{j,i} - \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}^p \right) dV + \\ &\int_{V_\sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^0 dV + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - p_i) \delta u_i dV + \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) dS. \end{aligned} \quad (21)$$

由 $\delta u_i, \delta \varepsilon_{ij}^e, \delta \sigma_{ij}, \delta \varepsilon_{ij}^0$ 的任意性,即可得指定应力问题的控制方程与相应的边界条件.

指定应力问题的广义变分原理表述为:指定应力问题的控制方程和边界条件等价于 $\delta \Pi^* = 0$.

4 指定应力桁架单元与梁单元

对于如图 1 所示的桁架单元,设长度为 l , 截面积为 A , 材料弹性模量为 E .两节点沿轴向的位移分别表示为 u_1 和 u_2 , 在两节点处受到的轴向等效节点力分别表示 Q_1 和 Q_2 .

单元内任一点的位移可表示为

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2, \quad (22)$$

式中 N_1 和 N_2 为两个节点的位移插值形函数,定义为

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l}, N_2 = \frac{x}{l}. \quad (23)$$

由几何方程可知桁架单元轴向线应变为

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 = \frac{1}{l}(u_2 - u_1). \quad (24)$$

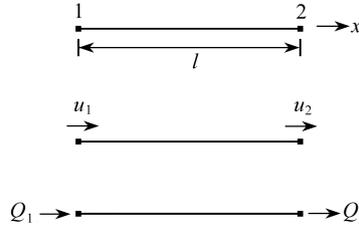


图1 轴线坐标系下的桁架单元

Fig. 1 A truss element in the axial coordinate system

若模拟预应力筋的指定应力桁架单元(后文中简称指定应力单元)中指定应力为 σ^0 ,相应的轴力为 $F_N = A\sigma^0$.设单元沿轴向的非弹性应变为 ε^0 (为后文公式推导简洁起见,约定非弹性应变压为正、拉为负),对应的单元非弹性变形量为 $\Delta l^0 = l\varepsilon^0$ (缩短为正、伸长为负,称为非弹性收缩量).

由于非弹性应变 ε^0 压正拉负,总应变为(无温度等其他外因作用时)

$$\varepsilon = \varepsilon^e - \varepsilon^0, \quad (25)$$

弹性应变为

$$\varepsilon^e = \varepsilon + \varepsilon^0 = \frac{1}{l}(u_2 - u_1) + \frac{\Delta l^0}{l} = \mathbf{B}d_e, \quad (26)$$

式中, d_e 为指定应力单元的广义位移向量, \mathbf{B} 为与广义位移向量对应的应变位移向量,

$$d_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \Delta l^0 \end{Bmatrix}, \mathbf{B} = \frac{1}{l}[-1 \quad 1 \quad 1]. \quad (27)$$

根据线弹性应力应变关系,有

$$\sigma = E\varepsilon^e = E\mathbf{B}d_e. \quad (28)$$

指定应力单元的弹性变形能可表示为

$$\int_V A(\varepsilon_{ij}^e) dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma \varepsilon^e dV = \frac{1}{2} \int_V d_e^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B} d_e dV = \frac{1}{2} d_e^T \mathbf{K}_e d_e, \quad (29)$$

式中 \mathbf{K}_e 为单元刚度阵,对于等截面单元有

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

指定应力单元的泛函可表示为

$$\Pi = \int_V A(\varepsilon^e) dV - \int_{V_\sigma} \sigma^0 \varepsilon^0 dV - Q_1 u_1 - Q_2 u_2, \quad (31)$$

上式中第二项负号是因为非弹性应变约定压正拉负,方程进一步可以简化为

$$\Pi = \frac{1}{2} d_e^T \mathbf{K}_e d_e - F_N \Delta l^0 - Q_1 u_1 - Q_2 u_2, \quad (32)$$

或矩阵向量形式为

$$\Pi(d_e) = \frac{1}{2} d_e^T \mathbf{K}_e d_e - d_e^T \mathbf{F}_e, \quad (33)$$

式中 \mathbf{F}_e 为广义单元荷载向量,

$$\mathbf{F}_e^T = [Q_1 \quad Q_2 \quad F_N] = [Q_1 \quad Q_2 \quad A\sigma^0]. \quad (34)$$

考虑到 $\delta \mathbf{d}_e$ 的任意性,由 $\delta \Pi = 0$ 可得

$$\mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{F}_e, \quad (35)$$

具体形式为

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \Delta l^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ F_N \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

上式与文献[19]基于虚功原理直接得到的预应力单元平衡方程相同,平面和空间坐标系中指定应力单元平衡方程的具体形式可通过坐标变换得到,本文不再赘述.

对梁单元引入非弹性收缩量,可得到如下形式的单元平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \\ \Delta l^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \\ F_N \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

从式(36)和(37)中可以发现,在指定应力变分原理得到的单元平衡方程中,非弹性应变(或变形)与对应的应力(或内力)处于对偶的位置.这样的单元平衡方程有两种用法:

1) 在指定应力或内力时,非弹性应变作为未知量,求得的结果值表示需要张拉的长度或等效温度变化等调整措施.

2) 在已知或求出非弹性应变的情况下,将非弹性应变(或者换算为温度变化)作为已知量通过常规的约束条件处理方法进行处理,则对应的应力成为未知量,此时与常规有限元法的计算方法相同.

5 在位移优化中的应用

在实际工程中,有的问题表面上看起来不是一个指定应力问题,比如斜拉桥在成桥状态下的索力合理取值问题:斜拉桥是一种高次超静定结构,各拉索的无应力长度可以调整,从而改变各拉索的索力,使桥面梁体和桥塔的线形和内力更加合理.在这个问题中,各拉索的内力并没有直接的指定值,需要通过优化分析获得其合理值.此时,可将各拉索相对于建模坐标的无应力长度减少量作为前述的非弹性收缩量,按照指定应力问题的有限元方法,引入到结构的整体平衡方程,并将其作为设计变量,根据目标和要求建立一个优化方法.下面以位移优化为例,说明按指定应力问题建立优化方法的措施.

对选定单元引入非弹性收缩量自由度后,结构的整体有限元平衡方程可表示为下面分块矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{d}}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{R}_4 \end{Bmatrix}, \quad (38)$$

其中 \mathbf{d}_1 为常规节点自由度中不是约束、无需优化的分量,为未知量; \mathbf{d}_2 为常规节点自由度中不是约束、需要优化的分量,为未知量; \mathbf{x} 为不是约束、可调整的自由度分量,也即引入的可变非弹性收缩量; $\bar{\mathbf{d}}_4$ 为受到约束的自由度,在方程中为已知量,反映了结构的位移边界条件; \mathbf{F}_1 为与 \mathbf{d}_1 对应的等效节点荷载,为已知量; \mathbf{F}_2 为与 \mathbf{d}_2 对应的等效节点荷载,为已知量; \mathbf{T} 为与 \mathbf{x} 对应的右端项; \mathbf{R}_4 为约束自由度的约束反力,在方程中为未知量.通过矩阵变换,可得到

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{d}}_2, \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{K}}_{22}^{-1}(\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{13} - \mathbf{K}_{23}), \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{d}}_2 = \bar{\mathbf{K}}_{22}^{-1}[\mathbf{F}_2 - \mathbf{K}_{24}\bar{\mathbf{d}}_4 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{K}_{14}\bar{\mathbf{d}}_4)], \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{22} = \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12}, \quad (42)$$

\mathbf{A} 为可调非弹性收缩量 \mathbf{x} 对位移分量 \mathbf{d}_2 的影响矩阵, $\bar{\mathbf{d}}_2$ 为荷载、约束引起的目标位移分量的值.利用式(39),将可变非弹性收缩量作为设计变量,可实现对目标位移分量的优化分析.

6 算例

将式(36)应用于预应力筋模拟时,预应力筋的刚度和有效预应力均可得到准确模拟,文献[19]提供了对于预应力筋模拟的多个算例.

下面以一个平面拉索结构为例来说明:①如何设计各拉索索力,使水平梁的竖向位移达到指定要求;②在当前索力和目标索力有差距时,作为指定应力问题求解,可得到各拉索的调索量.

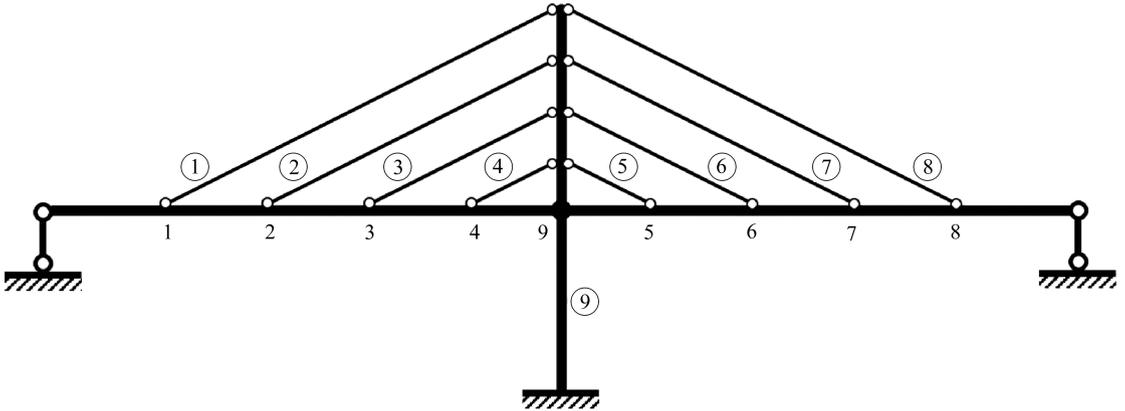


图2 平面拉索结构算例示意图

Fig. 2 The diagram of a plane cable-stayed structure

图2所示的平面拉索结构,跨度 2×30 m,梁上塔高 12 m,梁下塔高 10 m,水平梁上索距为 6 m,塔上索距为 3 m.塔、梁的材料弹性模量为 30 GPa,截面积为 3 m^2 ,轴惯性矩为 0.24 m^4 ,塔、梁连接处为刚接;8根拉索的弹性模量为 200 GPa,截面积为 0.04 m^2 .对塔和梁施加竖向分布荷载模拟其重力,集度为 100 kN/m .

图2中标出了考虑非弹性收缩量的单元编号与考虑位移优化的节点编号,用含非弹性收缩量的桁架单元模拟拉索(单元①~⑧),用含非弹性收缩量的梁单元模拟桥墩单元⑨.这里的非弹性收缩量表示相对于坐标长度的减少量,坐标长度减去非弹性收缩量就是拉索的无应力长度.为保证恒载作用下主梁的平顺度,将引入的9个非弹性收缩量自由度作为设计变量,将主梁上节点1~9的竖向位移作为优化目标(位移为零),由 $\mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{d}}_2 = \mathbf{0}$ 解得,桥墩单元⑨的非弹性收缩量为 -0.803 mm ,表示其无应力长度需要比坐标长度长 0.803 mm ;各拉索的非弹性收缩量 \mathbf{x} 及索力见表1.表1的结果表明,要使节点1~9的竖向位移为0,各拉索的无应力长度需要相应减少,以使得在荷载作用下各拉索能提供相应大小的索力.

表1 主梁指定节点竖向位移为零时拉索的非弹性收缩量及索力

Table 1 Inelastic contractions and tensions of cables for specified main beam nodes with fixed vertical displacements

element	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
x_i / mm	6.073	4.120	2.944	1.505	1.505	2.944	4.120	6.073
F_N / kN	1 521.4	1 293.5	1 354.6	1 337.93	1 337.93	1 354.6	1 293.5	1 521.4

在上述模型中,设桥墩单元⑨的非弹性收缩量为 -0.803 mm 不再变化,各拉索的当前索力为已知量,利用结构整体平衡方程,可识别出各拉索当前的非弹性收缩量,见表2.表1、表2中拉索非弹性收缩量的差值,即为各拉索由当前索力调到目标索力的调索长度。

表2 指定索力状态的拉索非弹性收缩量

Table 2 Inelastic contractions of cables based on specified cable tensions

element	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
F_N / kN	1 400	1 200	1 300	1 350	1 350	1 300	1 200	1 400
x_i / mm	4.471	2.265	1.629	1.077	1.077	1.629	2.268	4.471

7 结 论

本文针对工程实践中的指定应力问题,提出了一种新的有限元分析思路及计算流程.利用非弹性应变阐述了指定应力问题的弹性力学控制方程,以位移和未知非弹性应变作为独立变量建立了具有指定应力条件的势能变分原理和虚功方程,以位移、弹性应变、未知非弹性应变和应力为独立变量,建立了一个含四类变量的广义变分原理,为指定应力问题的数值算法提供了理论基础,扩展了现有变分原理和有限元方法的应用范围和能力。

在基于变分原理得到的桁架、梁单元平衡方程中,指定轴力和需要的调整量以对偶形式出现,可实现调整量已知情况下的常规有限元分析,又可在轴力指定条件下获得相应的非弹性收缩量.由于在结构整体平衡方程中引入了非弹性因素和应力(内力),还可方便地建立以非弹性因素为设计变量的优化方法.本文方法可用于预应力筋的模拟、拉索结构的索力优化和调整问题。

参考文献(References):

- [1] AALAMI B O. Structural modeling of posttensioned members[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2000, **126**(2): 157-162.
- [2] KENNETH W S. Simplified equivalent loads of prestressing[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1991, **117**(11): 3538-3542.
- [3] OH B H, JEON S J. Limitations and realistic application of equivalent load methods in pre-stressed concrete structures[J]. *Magazine of Concrete Research*, 2002, **54**(3): 223-231.
- [4] 张道明, 梁力, 尹新生, 等. 预应力内荷载的新计算方法: 直接内载法[J]. 工程力学, 2007, **24**(3): 103-109. (ZHANG Daoming, LIANG Li, YIN Xinsheng, et al. New approach to calculate prestressed internal load: direct internal load method[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(3): 103-109. (in Chinese))
- [5] 熊欢, 李鹏辉, 李庆斌, 等. PCCP 受载响应分析中三种预应力施加方法的比较研究[J]. 水力发电学报, 2010, **29**(6): 178-186. (XIONG Huan, LI Penghui, LI Qingbin, et al. Comparative study of three methods for the prestressing simulation in the analysis of load-bearing response of a PCCP[J]. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2010, **29**(6): 178-186. (in Chinese))
- [6] 袁明, 颜东煌. PC 箱梁竖向预应力张拉锚固阶段应力损失研究[J]. 公路交通科技, 2010, **27**(10): 53-57. (YUAN Ming, YAN Donghuang. Study on vertical prestress loss of PC box girder during stretching and anchoring stage[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2010, **27**(10): 53-57. (in Chinese))
- [7] 黄侨, 杨大伟, 李忠龙. 预应力混凝土梁桥的 NURBS 预应力束模型研究[J]. 公路交通科技, 2007, **27**(1): 51-54. (HUANG Qiao, YANG Dawei, LI Zhonglong. NURBS strand model for prestressed concrete girder bridges [J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2007, **27**(1): 51-54. (in Chinese))

- [8] NIHAL A, AMIN G. Prestressing with unbonded internal or external tendons: analysis and computer model [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2002, **128**(12): 1493-1501.
- [9] 王家林, 陈山林. 非节点连接有限元及其在加筋结构中的应用[J]. 应用力学学报, 2010, **27**(2): 418-422. (WANG Jialin, CHEN Shanlin. Theory of non-nodal connection finite element methods and its application in reinforced structures[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2010, **27**(2): 418-422. (in Chinese))
- [10] ASHRAF A, FILIP C F. Finite-element model for pretensioned concrete Girders[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2010, **136**(4): 401-409.
- [11] MOREIRA L S, SOUSA J B M, PARENTE E. Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams[J]. *Engineering Structures*, 2018, **170**: 167-177.
- [12] 李义强, 张彦兵, 杨丽. ANSYS 中准确施加斜拉桥索力方法的研究[J]. 国防交通工程与技术, 2006, **4**(1): 23-25. (LI Yiqiang, ZHANG Yanbing, YANG Li. A study of the accurate exertion of cable forces of cable stayed bridges by ANSYS[J]. *Traffic Engineering & Technology for National Defence*, 2006, **4**(1): 23-25. (in Chinese))
- [13] 叶梅新, 韩衍群, 张敏. 基于 ANSYS 平台的斜拉桥调索方法研究[J]. 铁道学报, 2006, **28**(4): 128-131. (YE Meixin, HAN Yanqun, ZHANG Min. Research on adjusting cable forces of cable-stayed bridges based on ANSYS[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2006, **28**(4): 128-131. (in Chinese))
- [14] 程进, 江见鲸, 肖汝诚, 等. ANSYS 二次开发技术及在确定斜拉桥成桥初始恒载索力中的应用[J]. 公路交通科技, 2002, **19**(3): 50-52. (CHENG Jin, JIANG Jianjing, XIAO Rucheng, et al. ANSYS software and its application in determination of initial cable forces in cable-stayed bridges under dead loads[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2002, **19**(3): 50-52. (in Chinese))
- [15] 叶梅新, 韩衍群, 张敏. ANSYS 二次开发技术在确定斜拉桥初始恒载索力中的应用[J]. 铁道科学与工程学报, 2005, **2**(5): 56-59. (YE Meixin, HAN Yanqun, ZHANG Min. Development and application of ANSYS in long-span cable-stayed bridge[J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2005, **2**(5): 56-59. (in Chinese))
- [16] 张杨永, 周云岗, 姜海西. 基于 ANSYS 的超大跨度斜拉桥的索力模拟[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2009, **25**(5): 909-913. (ZHANG Yangyong, ZHOU Yungang, JIANG Haixi. Cable force simulation for super long-span cable-stayed bridges based on ANSYS[J]. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science)*, 2009, **25**(5): 909-913. (in Chinese))
- [17] 梁鹏, 肖汝诚, 张雪松. 斜拉桥索力优化实用方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2003, **31**(11): 1270-1274. (LIANG Peng, XIAO Rucheng, ZHANG Xuesong. Practical method of optimized of cable tensions for cable-stayed bridges[J]. *Journal of Tongji University (Natural Science Edition)*, 2003, **31**(11): 1270-1274. (in Chinese))
- [18] 张杨永, 吴万忠, 周云岗. 斜拉桥索力精确模拟的矩阵分析法[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2009, **28**(6): 979-981, 1078. (ZHANG Yangyong, WU Wanzhong, ZHOU Yungang. Matrix analysis method for precise simulation of cable force of cable-stayed bridge[J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)*, 2009, **28**(6): 979-981, 1078. (in Chinese))
- [19] 王家林, 何琳. 一种含非弹性收缩量的预应力筋单元: CN201410116301.0[P]. 2014-06-18. (WANG Jialin, HE Lin. A prestressing tendon element with inelastic shrinkage: CN201410116301.0[P]. 2014-06-18. (in Chinese))
- [20] 王家林, 曹珂瑞. 一种基于指定应力的斜拉桥成桥索力调整方法[J]. 公路交通科技, 2020, **37**(6): 18-25. (WANG Jialin, CAO Kerui. Cable force adjustment method of cable-stayed bridge in finished state based on specified stress[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2020, **37**(6): 18-25. (in Chinese))
- [21] LI G, YU D H, LI H N. Seismic response analysis of reinforced concrete frames using inelasticity-separated fiber beam-column model[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2018, **47**(5): 1291-1308.
- [22] 李钢, 余丁浩, 李宏男. 基于拟力法的纤维梁有限元非线性分析方法[J]. 建筑结构学报, 2016, **37**(9): 61-68. (LI Gang, YU Dinghao, LI Hongnan. Nonlinear fiber beam element analysis based on force analogy method [J]. *Journal of Building Structures*, 2016, **37**(9): 61-68. (in Chinese))
- [23] 李钢, 靳永强, 董志骞, 等. 基于混合近似法的纤维梁单元非线性求解方法[J]. 土木工程学报, 2019, **52**(6): 81-91. (LI Gang, JIN Yongqiang, DONG Zhiqian, et al. Nonlinear solution method for fiber beam element

- based on the hybrid approximations method[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2019, **52**(6): 81-91. (in Chinese))
- [24] LI G, YU D H. Efficient inelasticity-separated finite-element method for material nonlinearity analysis[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2018, **144**(4): 04018008.
- [25] 田宗漱, 卞学镞. 多变量变分原理与多变量有限元方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011. (TIAN Zongshu, BIAN Xuehuang. *Multivariable Variational Principles and Multivariable Finite Element Methods*[M]. Beijing: Science Press, 2011. (in Chinese))
- [26] 胡海昌. 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理[J]. 物理学报, 1954, **10**(3): 259-290. (HU Haichang. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity[J]. *Acta Physica Sinica*, 1954, **10**(3): 259-290. (in Chinese))
- [27] WASHIZU K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*[M]. 3rd ed. Oxford: Pergamon Press, 1982.
- [28] 钱伟长. 大位移非线性弹性理论的变分原理和广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(1): 1-11. (CHIEN Weizang. Variational principles and generalized variational principles for nonlinear elasticity with finite displacement[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, **9**(1): 1-11. (in Chinese))
- [29] 付宝连. 有限变形非线性的变形能原理及功的互等定理与变分原理的关系[J]. 燕山大学学报, 2002, **26**(1): 4-6, 19. (FU Baolian. Relations between deformation energy theorem and reciprocal theorem and variational principles in non-linear elasticity with finite displacements[J]. *Journal of Yanshan University*, 2002, **26**(1): 4-6, 19. (in Chinese))
- [30] 付宝连. 有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(11): 1251-1268. (FU Baolian. Variational principles for dual and triple mixed variables of linear elasticity with finite displacements and the application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1251-1268. (in Chinese))
- [31] 樊涛, 梁立孚, 周利剑. 几何非线性非保守系统弹性力学广义拟变分原理[J]. 大庆石油学院学报, 2007, **31**(1): 120-125. (FAN Tao, LIANG Lifu, ZHOU Lijian. Generalized quasi-variational principles in geometric non-linear non-conservative elasticity[J]. *Journal of Daqing Petroleum Institute*, 2007, **31**(1): 120-125. (in Chinese))