

# 功能梯度板中 Griffith 裂纹尖端应力场的 三维解析研究\*

孙烨丽, 沈璐璐, 杨博

(浙江理工大学 建筑工程学院 土木工程系, 杭州 310018)

**摘要:** 基于推广后的 England-Spencer 板理论,研究了横观各向同性功能梯度板中 Griffith 裂纹尖端的三维应力场。假定材料参数沿板厚方向可以任意连续变化,利用复变函数解法和保角变换技术分别给出了受无穷远处荷载作用和受均匀内压时裂纹尖端应力的三维解析解。当材料退化为各向同性均匀材料时,将该解答与经典二维解进行了比较,进而验证了该解答的有效性。通过数值算例,进一步讨论了材料梯度因子和荷载条件等因素对裂纹尖端三维应力场的影响。

**关键词:** 功能梯度材料; Griffith 裂纹; 保角变换; 应力场; 三维解析解

**中图分类号:** O343.1      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.410143

## 3D Analytical Solutions of Stress Fields at Griffith Crack Tips in Functionally Graded Plates

SUN Yeli, SHEN Lulu, YANG Bo

(*Department of Civil Engineering, School of Civil Engineering and Architecture,  
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, P.R.China*)

**Abstract:** Based on the generalized England-Spencer plate theory, the 3D stress field at the Griffith crack tip in a transversely isotropic functionally graded plate was investigated. With the material parameters assumed to vary continuously and arbitrarily along the thickness direction, by means of the complex function theory and the conformal mapping technology, the analytical results of the 3D stress field at the Griffith crack tip under loading at infinity and uniform internal pressure were obtained respectively. With the material reduced to an isotropic homogeneous material, the validity of the solution was verified through comparison with the classical 2D solution. Numerical examples were given to demonstrate the effects of material gradient factors and load conditions on the stress field.

**Key words:** functionally graded material; Griffith crack; conformal mapping; stress field; 3D analytical solution

\* 收稿日期: 2020-05-19; 修订日期: 2020-06-05

**基金项目:** 国家自然科学基金(11872336);浙江省自然科学基金(LY18A020009)

**作者简介:** 孙烨丽(1995—),女,硕士生(E-mail: 2692124689@qq.com);

沈璐璐(1990—),女,讲师(E-mail: lulushen@zstu.edu.cn);

杨博(1979—),男,教授,硕士生导师(通讯作者. E-mail: youngbo@zstu.edu.cn).

**引用格式:** 孙烨丽,沈璐璐,杨博. 功能梯度板中 Griffith 裂纹尖端应力场的三维解析研究[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(1): 36-48.

## 引言

功能梯度材料(functionally graded material, FGM)是一种新型的复合材料<sup>[1-3]</sup>,其宏观特性在空间位置上呈梯度连续变化,进而可以避免传统层合材料中界面处容易产生应力集中的现象.但是,由于材料本身属性、制备过程及工作环境等原因,FGM 内部不可避免地会存在裂纹,容易降低材料及结构的强度甚至破坏.因此,研究 FGM 的断裂/裂纹问题具有重要的意义.

裂纹问题自始至终都是功能梯度材料研究的热点之一.与均匀材料相比,FGM 的非均匀性给裂纹问题的研究带来了复杂性.目前,对含裂纹的 FGM 的研究大多局限于二维问题.在数值研究方面,Eskandari<sup>[4]</sup>采用三维有限元方法对受到内压和离心力作用的含有纵向半椭圆内表面缺陷的厚壁 FGM 圆柱进行了分析;Nojumi 等<sup>[5]</sup>采用梯度奇异单元研究了具有空间变化弹性参数的线弹性各向同性 FGM 的动态裂纹问题;Cheng 等<sup>[6]</sup>采用边界配置法研究了压电 FGM 矩形板的断裂问题;Bouchikhi<sup>[7]</sup>利用 ABAQUS 研究了拉伸荷载作用下 FGM 双刃切口板的断裂问题.在解析研究方面,Cheng 等<sup>[8]</sup>研究了含裂纹 FGM 条带的平面弹性问题,分析了几何参数及梯度参数对应力强度因子和应变能释放率的影响;薛雁等<sup>[9]</sup>通过研究含有多个共线 Griffith 裂纹的磁电弹性 FGM 板,最终导出了场强度因子和能量释放率;程站起等<sup>[10]</sup>提出了一种可以处理任意材料梯度的分层模型,并用来研究 FGM 涂层平面裂纹问题;刘俊俏等<sup>[11]</sup>研究了带 FGM 的压电底层中周期裂纹对 SH 波的散射,给出了标准动应力强度因子和电位移强度因子的表达式;蒋正文等<sup>[12]</sup>提出了一种施加温度场建立 FGM 板分层线性离散模型的方法,并进行了断裂力学分析.据笔者了解,目前对含 Griffith 裂纹的 FGM 板的三维解析研究较少.解析解能为理论模型等提供假设依据、验证各种数值解法的精确性,同时有助于更好地理解含裂纹 FGM 板的宏观力学行为.

在前期研究的基础上<sup>[13-16]</sup>,本文进一步针对 FGM 板中 Griffith 裂纹尖端的三维应力场进行研究.基于三维弹性理论,利用 England-Spencer 板理论结合复变函数解法和保角变换技术获得 Griffith 裂纹尖端应力场的三维解析解.

## 1 基本理论

England-Spencer 板理论是一个基于三维弹性理论的各向同性功能梯度平板理论,其三维位移解答由经典薄板方程的二维解答和板厚方向坐标的函数构成,材料参数在厚度方向可以任意连续变化.该板理论采用的唯一假设就是上述三维位移场的假设.笔者将 England-Spencer 板理论从材料的各向异性和不同形状板的边值问题等方面做了推广<sup>[13-16]</sup>.

现考虑一个厚度为  $h$  的横观各向同性 FGM 无限大板,如图 1 所示,取板中面为  $xOy$  平面, $z$  轴垂直于  $xOy$  平面.采用推广后的 England-Spencer 板理论中的如下三维位移场<sup>[14]</sup>:

$$\begin{cases} u + iv = \bar{u} + i\bar{v} + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (R_1 \Delta + R_0 \bar{w} + R_2 \nabla^2 \bar{w}), \\ w = \bar{w} + T_1 \Delta + T_2 \nabla^2 \bar{w}, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\bar{u}, \bar{v}$  和  $\bar{w}$  为板中面的位移分量,均为坐标  $x$  和  $y$  的函数; $R_0, R_1, R_2, T_1$  和  $T_2$  均为坐标  $z$  的函数;

$$\begin{cases} \Delta = \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \zeta = x + iy, \quad \bar{\zeta} = x - iy, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}. \end{cases} \quad (2)$$

当板上下表面无应力作用时,板中面位移的表达式可用 4 个解析函数  $\alpha(\zeta), \beta(\zeta), \phi(\zeta), \psi(\zeta)$  表示为

$$\bar{w} = \alpha(\zeta) + \overline{\alpha(\zeta)} + \bar{\zeta} \beta(\zeta) + \zeta \overline{\beta(\zeta)}, \quad (3)$$

$$D = \bar{u} + i\bar{v} = \frac{\kappa_1 + 1}{\kappa_1 - 1} \phi(\zeta) - \zeta \overline{\phi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} - 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} [\beta(\zeta) + \zeta \overline{\beta'(\zeta)}]. \quad (4)$$

此时,应力分量表达式为

$$\sigma_x + \sigma_y = \left( c_{11} + c_{12} - 2 \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) \left\{ \frac{2}{\kappa_1 - 1} [\phi'(\zeta) + \overline{\phi'(\zeta)}] - 4 \left( z + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) [\beta'(\zeta) + \overline{\beta'(\zeta)}] \right\}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = & 4c_{66} [\bar{\zeta}\phi''(\zeta) + \psi'(\zeta)] - \frac{16c_{66}}{\kappa_1 - 1} R_1 \phi'''(\zeta) + 8c_{66} \left( z + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \bar{\zeta}\beta''(\zeta) + 8c_{66} z \alpha''(\zeta) - \\ & 32c_{66} \left( R_2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1 \right) \beta'''(\zeta), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \frac{4c_{44}}{\kappa_1 - 1} (R'_1 + T_1) \phi''(\zeta) + 8c_{44} \left[ T_2 + R'_2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (T_1 + R'_1) \right] \beta''(\zeta), \quad (7)$$

式中  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  为常数<sup>[15]</sup>. 积分式(5)~(7)可得由4个解析函数表示的内力表达式<sup>[16]</sup>.

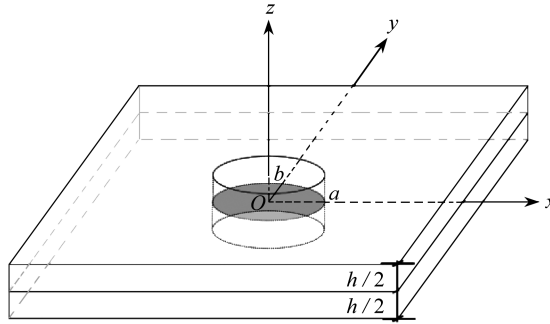


图1 含一个椭圆孔的FGM板示意图

Fig. 1 Schematic diagram of an FGM plate with an elliptical hole

## 2 横观各向同性 FGM 无限大板中含椭圆孔的三维问题

本文从考虑含椭圆孔的 FGM 无限大板的三维问题分析入手,当短半轴长度趋于零时,椭圆孔口便退化为 Griffith 裂纹.当椭圆孔边界  $L$  为自由边界时,其边界条件可以用矩阵形式表示为<sup>[16]</sup>

$$\mathbf{E} \overline{\Phi(t)} + \mathbf{F} i \Phi'(t) + \mathbf{G} \Phi''(t) + \mathbf{H} \Psi(t) = \bar{\mathbf{Q}}, \quad (8)$$

式中  $t = x(s) + iy(s)$  是孔边界  $L$  上的点,  $x(s)$  和  $y(s)$  是边界点坐标,  $s$  是从  $L$  上某点开始按指定方向计算的弧长,显然,  $t$  与  $s$  是一一对应的关系,且

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \bar{f} \\ \bar{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - if_2 \\ f_3 - if_4 \end{Bmatrix} = -2i \int \left\{ \begin{array}{l} N_{xn}^b(s) - iN_{yn}^b(s) \\ M_{xn}^b(s) - iM_{yn}^b(s) - iZ^b(s) e^{-i\psi} \end{array} \right\} ds, \quad (9)$$

其中  $\psi$  是边界  $L$  的外法线  $n$  与  $x$  轴的夹角,  $(N_{xn}, N_{yn}, Q_n) = \int_{-h/2}^{h/2} (X_n, Y_n, Z_n) dz$ ,  $(M_{xn}, M_{yn}) = \int_{-h/2}^{h/2} (X_n, Y_n) z dz$ ,

$Z^b(s) = \int Q_n^b(s) ds$ ,  $X_n, Y_n, Z_n$  为板柱面上一点  $(x, y, z)$  处的应力,以及

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_1 & 4a_2 \\ -2b_1 - a_6 & 8b_2 - b_6 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} a_1 & 4a_2 \\ a_6 & b_6 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -a_5 & -a_7 \\ -b_5 & -b_8 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 2a_6 \\ a_6 & b_7 \end{bmatrix}, \\ \Phi(t) = \begin{Bmatrix} \phi(t) \\ \beta(t) \end{Bmatrix}, \Psi(t) = \begin{Bmatrix} \psi(t) \\ A(t) \end{Bmatrix}, A(t) = \alpha'(t), \end{cases} \quad (10)$$

式中  $a_1, a_2, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_5, b_6, b_7, b_8$  为与材料有关的常数,参见附录.

式(8)的共轭式为

$$\mathbf{E} \Phi(t) + \mathbf{F} t \overline{\Phi'(t)} + \mathbf{G} \overline{\Phi''(t)} + \mathbf{H} \overline{\Psi(t)} = \mathbf{Q}. \quad (11)$$

引入如下保角变换函数:

$$\zeta = \omega(\eta) = R \left( \eta + \frac{m}{\eta} \right), \quad R = \frac{a+b}{2} > 0, \quad 0 \leq m = \frac{a-b}{a+b} < 1, \quad (12)$$

式中  $a$  和  $b$  分别为椭圆的长半轴和短半轴。

该保角变换函数将椭圆孔的外部变成单位圆  $\gamma$  的外部,即  $\zeta = \infty$  对应  $\eta = \infty$ 。用  $\zeta = t$  表示孔边界  $L$  上的点,  $\eta = \sigma = e^{i\theta}$  表示单位圆  $\gamma$  上的点,  $L$  对应于  $\eta$  平面上的中心单位圆  $\gamma$ ,  $\theta$  表示  $\gamma$  上任一点  $\sigma$  与原点的连线与  $x$  轴的夹角。

将函数  $\Phi(t)$  和  $\Psi(t)$  保角变换,可得

$$\Phi(\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \phi(\eta) \\ \beta(\eta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} C \\ B \end{array} \right\} \ln \eta + R \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 \\ \beta_1 \end{array} \right\} \eta + \Phi_0(\eta), \quad (13)$$

$$\Psi(\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \psi(\eta) \\ A(\eta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} B_1 \\ \bar{B} \end{array} \right\} \ln \eta + R \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \\ 2\alpha_2 \end{array} \right\} \eta + \Psi_0(\eta), \quad (14)$$

式中上标“ $\cdot$ ”表示实部;  $C, B, B_1$  为与裂纹边界力和力矩有关的量,表达式为

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \kappa_5(X + iY), \\ B = \kappa_6(M_Y - iM_X) + \kappa_7(X + iY), \\ B_1 = \kappa_8(M_Y + iM_X) + \kappa_9(X - iY); \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\Phi_0(\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_0(\eta) \\ \beta_0(\eta) \end{array} \right\}, \quad \Psi_0(\eta) = \left\{ \begin{array}{l} \psi_0(\eta) \\ A_0(\eta) \end{array} \right\}. \quad (16)$$

经保角变换后,式(8)和式(11)变换为

$$E \overline{\Phi(\sigma)} + F \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} + G \frac{1}{(\omega'(\sigma))^2} \overline{\Phi''(\sigma)} - G \frac{\overline{\omega''(\sigma)}}{(\omega'(\sigma))^3} \overline{\Phi'(\sigma)} + H \overline{\Psi(\sigma)} = \bar{Q}, \quad (17)$$

$$E \Phi(\sigma) + F \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \Phi'(\sigma) + G \frac{1}{(\omega'(\sigma))^2} \Phi''(\sigma) - G \frac{\omega''(\sigma)}{(\omega'(\sigma))^3} \Phi'(\sigma) + H \Psi(\sigma) = Q. \quad (18)$$

### 3 三维 Griffith 裂纹问题

令短半轴  $b = 0$ , 此时椭圆孔口便退化为一个沿厚度方向贯穿板结构的长度为  $2a$  的 Griffith 裂纹,如图 2 所示。

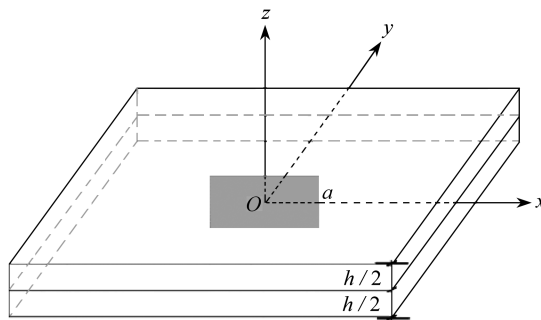


图 2 含 Griffith 裂纹的 FGM 板示意图

Fig. 2 Schematic diagram of an FGM plate with a Griffith crack

此时保角变换函数为

$$\zeta = \omega(\eta) = \frac{a}{2} \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right). \quad (19)$$

此时式(17)为

$$E \overline{\Phi_0(\sigma)} + F \sigma \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2 - 1} \overline{\Phi_0'(\sigma)} + G \frac{\sigma^4}{R^2(\sigma^2 - 1)^2} \overline{\Phi_0''(\sigma)} - G \frac{2\sigma^3}{R^2(\sigma^2 - 1)^3} \overline{\Phi_0'(\sigma)} + H \overline{\Psi_0(\sigma)} = \bar{Q}^0, \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{Q}^0 = & \bar{Q} + E \left\{ \begin{matrix} \bar{C} \\ \bar{B} \end{matrix} \right\} \ln \sigma - RE \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sigma} - F \left\{ \begin{matrix} C \\ B \end{matrix} \right\} \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2 - 1} - RF \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \sigma \frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2 - 1} + G \left\{ \begin{matrix} C \\ B \end{matrix} \right\} \frac{\sigma^2}{R^2(\sigma^2 - 1)^2} + \\ & G \left\{ \begin{matrix} C \\ B \end{matrix} \right\} \frac{2\sigma^2}{R^2(\sigma^2 - 1)^3} + RG \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \frac{2\sigma^3}{R^2(\sigma^2 - 1)^3} - H \left\{ \begin{matrix} B_1 \\ \bar{B} \end{matrix} \right\} \ln \sigma - RH \left\{ \begin{matrix} \psi_1 \\ 2\alpha_2 \end{matrix} \right\} \sigma. \end{aligned} \quad (21)$$

对式(20)和式(21)求共轭,可得

$$\begin{aligned} E\Phi_0(\sigma) + F \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma(1 - \sigma^2)} \overline{\Phi_0'(\sigma)} + G \frac{1}{R^2(1 - \sigma^2)^2} \overline{\Phi_0'(\sigma)} - \\ G \frac{2\sigma^3}{R^2(1 - \sigma^2)^3} \overline{\Phi_0'(\sigma)} + H \overline{\Psi_0(\sigma)} = Q^0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Q^0 = & Q - E \left\{ \begin{matrix} C \\ B \end{matrix} \right\} \ln \sigma - RE \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \sigma - F \left\{ \begin{matrix} \bar{C} \\ \bar{B} \end{matrix} \right\} \frac{\sigma^2 + 1}{1 - \sigma^2} - RF \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma(1 - \sigma^2)} + \\ & G \left\{ \begin{matrix} \bar{C} \\ \bar{B} \end{matrix} \right\} \frac{\sigma^2}{R^2(1 - \sigma^2)^2} + G \left\{ \begin{matrix} \bar{C} \\ \bar{B} \end{matrix} \right\} \frac{2\sigma^4}{R^2(1 - \sigma^2)^3} + RG \left\{ \begin{matrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{matrix} \right\} \frac{2\sigma^3}{R^2(1 - \sigma^2)^3} + \\ & H \left\{ \begin{matrix} \bar{B}_1 \\ B \end{matrix} \right\} \ln \sigma - RH \left\{ \begin{matrix} \bar{\psi}_1 \\ 2\bar{\alpha}_2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sigma}. \end{aligned} \quad (23)$$

将式(22)与式(20)均写成 Cauchy 积分的形式,分别可得

$$-E\Phi_0(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{Q^0 d\sigma}{\sigma - \eta}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -F\eta \frac{1 + \eta^2}{\eta^2 - 1} \Phi_0'(\eta) - G \frac{\eta^4}{R^2(\eta^2 - 1)^2} \Phi_0'(\eta) + G \frac{2\eta^3}{R^2(\eta^2 - 1)^3} \Phi_0'(\eta) - \\ H\Psi_0(\eta) + H\Psi_0(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{Q}^0 d\sigma}{\sigma - \eta}. \end{aligned} \quad (25)$$

如果式(24)中  $Q^0$  的 Cauchy 积分已知,则可求得  $\Phi_0(\eta)$ ,再由式(25)即可求得  $\Psi_0(\eta)$ ,其中  $\Psi_0(\infty)$  不影响应力,故可以略去。

由式(5)~(7)可得应力分量的矩阵形式:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left( c_{11} + c_{12} - 2 \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) \left\{ \begin{matrix} \frac{2}{\kappa_1 - 1} \\ -4 \left( z + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \end{matrix} \right\}^T \text{Re } \Phi'(\zeta), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = \\ \left\{ \begin{matrix} 4c_{66} \\ 8c_{66} \left( z + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \end{matrix} \right\}^T \bar{\zeta} \Phi''(\zeta) + \left\{ \begin{matrix} \frac{-16c_{66}}{\kappa_1 - 1} R_1 \\ -32c_{66} \left( R_2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1 \right) \end{matrix} \right\}^T \Phi'''(\zeta) + \left\{ \begin{matrix} 4c_{66} \\ 8c_{66}z \end{matrix} \right\}^T \Psi'(\zeta), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \left\{ \begin{matrix} \frac{4c_{44}}{\kappa_1 - 1} (R_1' + T_1) \\ 8c_{44} \left[ T_2 + R_2' - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (T_1 + R_1') \right] \end{matrix} \right\}^T \Phi''(\zeta). \quad (28)$$

## 4 受无穷远处荷载作用时裂纹尖端应力场

当三维 Griffith 裂纹受无穷远处荷载  $N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}$  作用时, 假设  $\theta$  为荷载  $N_1$  与  $x$  轴的夹角, 且  $N_2$  与  $N_1$  垂直, 此时  $\Phi(\eta)$  和  $\Psi(\eta)$  的表达式为

$$\Phi(\eta) = R \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} \eta + R\gamma^0 \frac{1}{\eta}, \quad (29)$$

$$\Psi(\eta) = R \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ 2\alpha_2 \end{Bmatrix} \eta + RH^{-1}F\gamma^0 \frac{1 + \eta^2}{\eta(\eta^2 - 1)} - \frac{2}{R} H^{-1}G\gamma^0 \frac{\eta^3}{(\eta^2 - 1)^3} - \left( RH^{-1}E \frac{1}{\eta} + 2RH^{-1}F \frac{\eta}{\eta^2 - 1} - \frac{2}{R} H^{-1}G \frac{\eta^3}{(\eta^2 - 1)^3} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

式中

$$\begin{cases} \gamma^0 = -E^{-1}F \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} - E^{-1}H \begin{Bmatrix} \bar{\psi}_1 \\ 2\bar{\alpha}_2 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} D^{-1} \begin{Bmatrix} N_1 + N_2 \\ M_1 + M_2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ 2\alpha_2 \end{Bmatrix} = H^{-1} \begin{Bmatrix} N_2 - N_1 + 2iN_{12} \\ M_2 - M_1 + 2iM_{12} \end{Bmatrix} e^{-2i\theta}, & D = \begin{bmatrix} a_1 & 4a_2 \\ -b_1 & 4b_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (31)$$

对式(19)反变换, 可得

$$\eta = \omega^{-1}(\zeta) = \frac{1}{a}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - a^2}). \quad (32)$$

现考虑一个三维张开型裂纹, 即  $N_1 = N_{12} = 0, M_1 = M_2 = M_{12} = 0, N_2$  作用方向垂直于  $x$  轴(即  $\theta = 0$ ), 将式(31)和式(32)代入式(29), 可得

$$\Phi(\zeta) = \frac{N_2}{4J} \begin{Bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ 4 \end{Bmatrix} \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - a^2} \right) - \frac{N_2}{2} \begin{Bmatrix} \frac{2W_1}{Q_1} - \frac{b_2}{2J} \\ \frac{2W_2}{Q_1} - \frac{b_1}{8J} \end{Bmatrix} \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2} \right), \quad (33)$$

式中

$$\begin{cases} J = a_1b_2 + a_2b_1, & W_1 = 8b_2 - b_6, \\ W_2 = a_6 + 2b_1, & Q_1 = a_1W_1 + 4a_2W_2. \end{cases} \quad (34)$$

将式(10)、(31)和式(32)代入式(30)可得

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) = & \frac{N_2}{2Q_2} \begin{Bmatrix} b_7 \\ -a_6 \end{Bmatrix} \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - a^2} \right) - \frac{N_2}{2Q_2} \begin{Bmatrix} Q_2Q_4 + 2Q_5Q_6 \\ Q_3Q_5 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} - \zeta \right\} - \\ & \frac{a^2N_2}{2Q_2} \begin{Bmatrix} Q_4Q_7 + Q_5Q_8 \\ Q_4Q_9 + Q_5Q_{10} \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)^3}} - \\ & \frac{N_2}{4JQ_2} \begin{Bmatrix} b_2(a_1b_7 + 2a_6W_2) + \frac{b_1}{2}(2a_2b_7 - a_6W_1) \\ -b_2(a_1a_6 + a_1W_2) + \frac{b_1}{4}(a_1W_1 - 4a_2a_6) \end{Bmatrix} \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2} \right) - \\ & \frac{a^2N_2}{4JQ_2} \begin{Bmatrix} b_2Q_2 + \frac{1}{2}b_1Q_6 \\ \frac{1}{4}b_1Q_3 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} - \frac{a^2N_2}{4JQ_2} \begin{Bmatrix} b_2Q_7 + \frac{1}{4}b_1Q_8 \\ b_2Q_9 + \frac{1}{4}b_1Q_{10} \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)^3}} \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

式中

$$\begin{cases} Q_2 = a_1 b_7 - 2a_6^2, Q_3 = a_1 b_6 - 4a_2 b_6, Q_4 = \frac{2W_1}{Q_1} - \frac{b_2}{2J}, Q_5 = \frac{2W_2}{Q_1} - \frac{b_1}{8J}, \\ Q_6 = 2a_2 b_7 - a_6 b_6, Q_7 = a_5 b_7 - 2a_6 b_5, Q_8 = a_7 b_7 - 2a_6 b_8, \\ Q_9 = a_1 b_5 - a_5 a_6, Q_{10} = a_1 b_8 - a_6 a_7. \end{cases} \quad (36)$$

裂纹尖端附近的点可用极坐标表示为  $\zeta = a + r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $r_1$  表示裂纹尖端(最右端)附近的圆周半径, 有  $r_1/a \ll 1$ , 如图3所示。

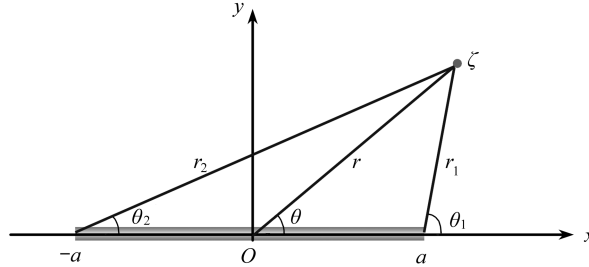


图3 极坐标示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the polar coordinates

将裂纹尖端附近的  $r_1/a$  进行幂次展开, 只保留其中随着  $r_1$  的减小而增大的主项; 为了便于与已有二维解析解比较, 这里特别取板中面进行分析, 即令  $z = 0$ , 此时有

$$R_0 = R_1 = R_2 = T_1 = T_2 = 0. \quad (37)$$

若材料由横观各向同性功能梯度材料退化为各向同性均匀材料, 则有

$$\begin{cases} a_2 = a_6 = a_7 = b_1 = b_5 = \kappa_2 = 0, a_1 = \frac{2Eh}{1+\nu}, b_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}, a_5 = \frac{E\nu h^3}{3(1+\nu)^2}, \\ b_6 = b_7 = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)}, b_8 = -\frac{(8+\nu)Eh^5}{30(1+\nu)(1-\nu)}, \\ \frac{c_{13}}{c_{33}} = \frac{\nu}{1-\nu}, c_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \kappa_1 = \frac{2}{1-\nu}, \end{cases} \quad (38)$$

式中  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为 Poisson 比, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{N_2}{h} \sqrt{\frac{2a}{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2}, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} &= \frac{N_2}{h} \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \sin \frac{3\theta_1}{2} + \\ &\quad \frac{\nu h N_2}{8a^2(1+\nu)} \left[ 4 \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^5} \cos \frac{5\theta_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^3} \cos \frac{3\theta_1}{2} - \frac{5}{32} \sqrt{\frac{a}{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} \right] + \\ &\quad i \left\{ \frac{N_2}{h} \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \cos \frac{3\theta_1}{2} - \frac{\nu h N_2}{8a^2(1+\nu)} \left[ 4 \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^5} \sin \frac{5\theta_1}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^3} \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{5}{32} \sqrt{\frac{a}{r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (40)$$

式中  $N_2/h$  表示荷载集度。

该问题的二维弹性力学解为<sup>[17]</sup>

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = q \sqrt{\frac{2a}{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2}, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = q \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \sin \frac{3\theta_1}{2} + iq \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \cos \frac{3\theta_1}{2}, \end{cases} \quad (41)$$

式中  $q$  表示荷载集度。

可以发现,式(39)与式(41)<sub>1</sub>完全一致;式(40)与式(41)<sub>2</sub>相比,式(40)多了与 Poisson 比  $\nu$  有关的项以及  $r_1^{-1/2}$  的高阶项.

## 5 受均匀内压作用时裂纹尖端应力场

当三维 Griffith 裂纹在裂纹面内受均匀荷载  $N_n^b, N_{nt}^b, M_n^b$  和  $M_{nt}^b$  作用时,  $\Phi(\eta)$  和  $\Psi(\eta)$  的表达式为

$$\Phi(\eta) = R\gamma^1 \frac{1}{\eta}, \quad (42)$$

$$\Psi(\eta) = 2 \frac{R}{\eta} \mathbf{H}^{-1} \begin{Bmatrix} N_n^b - iN_{nt}^b \\ M_n^b - iM_{nt}^b \end{Bmatrix} + R\mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}\gamma^1 \frac{1 + \eta^2}{\eta(\eta^2 - 1)} - \frac{2}{R} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}\gamma^1 \frac{\eta}{(\eta^2 - 1)^3} - \frac{2}{R} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}\gamma^1 \frac{\eta}{(\eta^2 - 1)^2}, \quad (43)$$

式中

$$\gamma^1 = 2\mathbf{E}^{-1} \{N_n^b + iN_{nt}^b, M_n^b + iM_{nt}^b\}^T. \quad (44)$$

现考虑一个三维张开型裂纹,有  $N_{nt}^b = 0, M_n^b = M_{nt}^b = 0$ ,将式(32)和式(44)代入式(42)可得

$$\Phi(\zeta) = \frac{N_n^b}{Q_1} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2}). \quad (45)$$

将式(45)代入式(26),并将裂纹尖端附近的  $r_1/a$  项幂次展开,只保留其中随着  $r_1$  的减小而增大的主项;令  $z = 0$ ,并退化至各向同性均匀材料,可得

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{N_n^b}{h} \sqrt{\frac{2a}{r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2}. \quad (46)$$

该式与二维弹性力学解<sup>[17]</sup>完全一致.

将式(10)、(32)、(44)代入式(43)可得

$$\Psi(\zeta) = \frac{N_n^b}{Q_2} \begin{Bmatrix} b_7 \\ -a_6 \end{Bmatrix} (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2}) + \frac{N_n^b}{Q_1 Q_2} \begin{Bmatrix} W_1 Q_2 + 2W_2 Q_6 \\ W_2 Q_3 \end{Bmatrix} \left( \frac{\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} - \zeta \right) + \frac{a^2 N_n^b}{Q_1 Q_2} \begin{Bmatrix} W_1 Q_7 + W_2 Q_8 \\ W_1 Q_9 + W_2 Q_{10} \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)^3}}. \quad (47)$$

将式(45)和式(47)及  $\zeta = a + r_1 e^{i\theta_1}$  代入式(27),退化后可得各向同性均匀材料板中面处的应力分量表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = & -\frac{N_n^b}{h} \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{\nu h N_n^b}{8a^2(1+\nu)} \left[ 4 \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^5} \cos \frac{5\theta_1}{2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^3} \cos \frac{3\theta_1}{2} - \frac{5}{32} \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \cos \frac{\theta_1}{2} \right] - i \left[ \frac{N_n^b}{h} \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \cos \frac{3\theta_1}{2} - \right. \\ & \left. \frac{\nu h N_n^b}{8a^2(1+\nu)} \left[ 4 \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^5} \sin \frac{5\theta_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2r_1}\right)^3} \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{5}{32} \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \frac{\theta_1}{2} \right] \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

对应的二维弹性力学解为<sup>[17]</sup>

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = -q \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \sin \frac{3\theta_1}{2} - iq \sqrt{\frac{a}{2r_1}} \sin \theta_1 \cos \frac{3\theta_1}{2}, \quad (49)$$

可以发现式(48)同样多了与 Poisson 比  $\nu$  有关的项以及  $r_1^{-1/2}$  的高阶项.

## 6 数值算例

现考虑一个含 Griffith 裂纹的无限大 FGM 板,假设无限大板的材料参数形式为<sup>[15]</sup>



$$c_{ij} = c_{ij}^0 e^{(z+h/2)\lambda/h}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (50)$$

式中  $c_{ij}^0$  为板底面处的材料参数, 如表 1 所示. 参数  $\lambda$  为梯度指数, 反映材料的不均匀程度. 显然, 当  $\lambda = 0$  时, 对应均匀材料.

表 1  $Al_2O_3$  的弹性常数 (单位: GPa)

Table 1 Elastic constants of  $Al_2O_3$  (unit: GPa)

$c_{11}^0$	$c_{12}^0$	$c_{13}^0$	$c_{33}^0$	$c_{55}^0$
460.2	174.7	127.4	509.5	126.9

除非另行说明, 一般取裂纹长度  $a = 1 \text{ m}$ , 板厚  $h = 0.2 \text{ m}$ ,  $N_2 = 1 \text{ N}$ ,  $N_n^b = -1 \text{ N}$ ,  $z = 0$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $r_1 = 0.1a$ .

### 6.1 算例验证

为了进一步验证本文解答的有效性, 现将本文三维解析解与已有二维解析解进行数值比较, 假设仅在裂纹面受均匀内压  $N_n^b$  作用.

表 2 给出了均匀材料时, 裂纹右尖端附近的无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$ , 其中  $\sigma = N_n^b/h$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $z = 0$ . 可以发现, 距裂纹尖端越远, 本文解答与二维解吻合较好; 当距裂纹越近时, 差异会逐渐增大, 这是由于本文解答中含有  $r_1^{-1/2}$  的高阶项的原因.

表 2 Griffith 裂纹内受均匀内压作用时的无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$

Table 2 Dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  under uniform internal pressure in the Griffith crack

$r_1/a$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	1	$10^1$	$10^2$	$10^3$
present solution	-28.162 6	-1.468 4	-0.154 9	-0.004 2	$-4.901 8 \times 10^{-5}$	$-4.990 0 \times 10^{-7}$
2D solution <sup>[17]</sup>	-6.124 0	-1.400 4	-0.154 7	-0.004 2	$-4.901 8 \times 10^{-5}$	$-4.990 0 \times 10^{-7}$

### 6.2 参数分析

#### 6.2.1 Griffith 裂纹在无穷远处受单向拉伸作用

图 4 与图 5 分别给出了  $N_2$  作用下, 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  与  $\sigma_y/\sigma$  沿  $r_1$  方向的分布情况,  $\theta_1 = 0$ ,  $\lambda = 5$ . 可以看到, 图 4 与图 5 中三条曲线均在  $r_1/a = 0.5$  附近有一个明显的拐点. 当  $r_1 \rightarrow 0$  时, 板底面 ( $z = -h/2$ )、板中面 ( $z = 0$ ) 和板顶面 ( $z = h/2$ ) 的应力值均急剧增大, 且板顶面处应力值最大, 此时, 板的三个面在  $x$  方向受压应力作用, 在  $y$  方向受拉应力作用.

图 6 和图 7 分别给出了  $N_2$  作用下, 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  与  $\sigma_y/\sigma$  随  $\theta$  的变化. 可以发现, 图 6 与图 7 中的三条曲线均关于  $\theta = 0$  对称, 应力最大值均发在  $\theta = -\pi, 0, \pi$  时, 且均匀材料的应力最大值要高于功能梯度材料的应力最大值.

图 8 和图 9 分别给出了  $N_2$  作用下, 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  与  $\sigma_y/\sigma$  随  $\theta_1$  的变化,  $\theta = 0$ . 可以看到, 图中三条曲线均关于  $\theta_1 = 0$  对称, 且均匀材料的应力峰值最大.

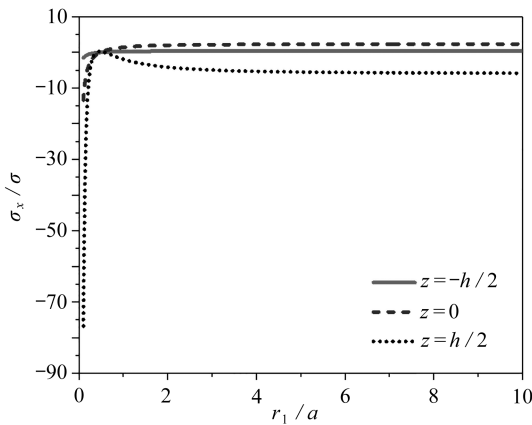


图 4 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  沿  $r_1$  方向的分布

Fig. 4 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_x/\sigma$  in the  $r_1$ -direction

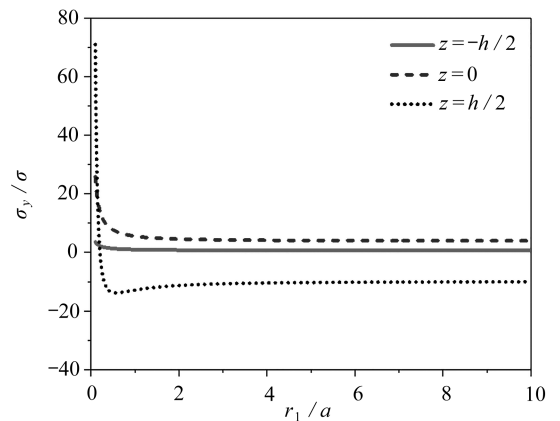


图 5 无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$  沿  $r_1$  方向的分布

Fig. 5 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  in the  $r_1$ -direction

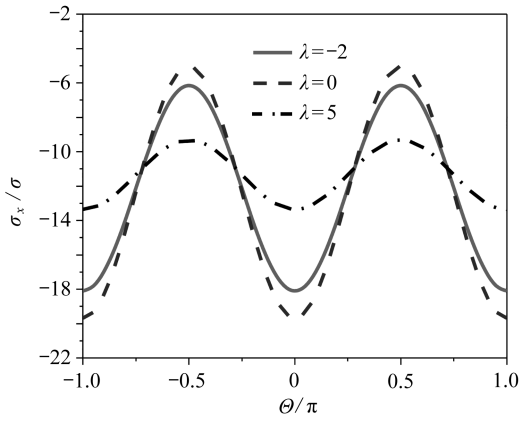


图 6 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  随  $\theta$  的变化

Fig. 6 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_x/\sigma$  with  $\theta$

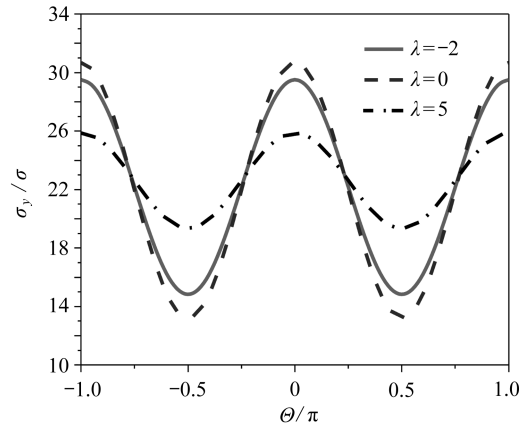


图 7 无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$  随  $\theta$  的变化

Fig. 7 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  with  $\theta$

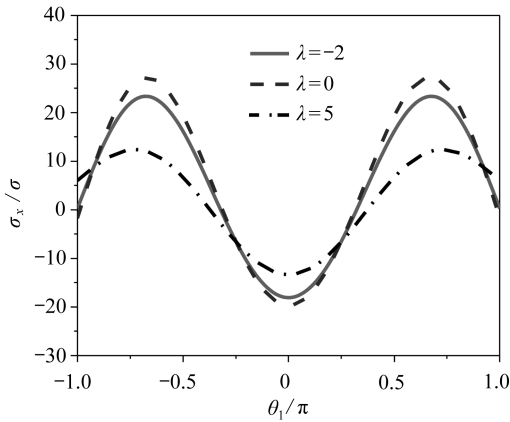


图 8 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  随  $\theta_1$  的变化

Fig. 8 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_x/\sigma$  with  $\theta_1$

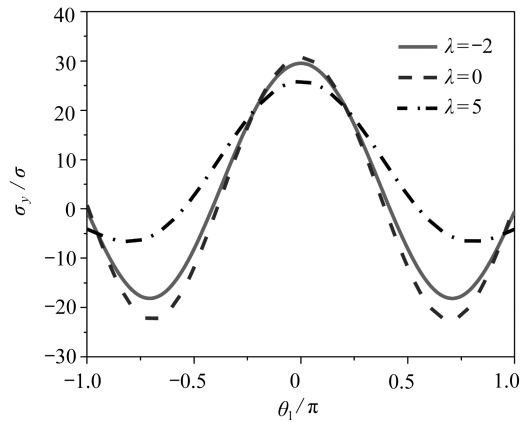


图 9 无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$  随  $\theta_1$  的变化

Fig. 9 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  with  $\theta_1$

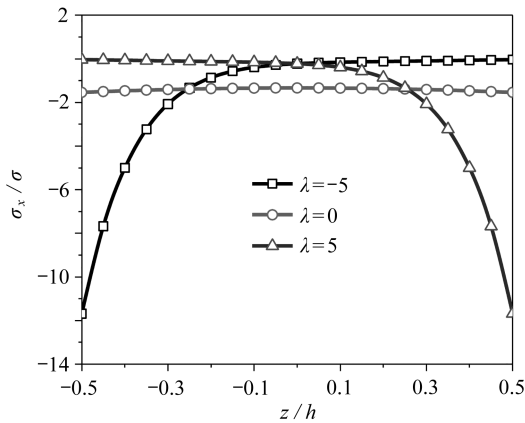


图 10 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  沿  $z$  方向的分布

Fig. 10 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_x/\sigma$  in the  $z$ -direction

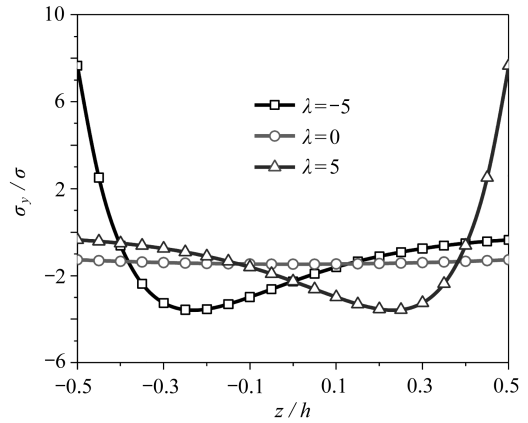


图 11 无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$  沿  $z$  方向的分布

Fig. 11 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  in the  $z$ -direction

6.2.2 Griffith 裂纹仅在裂纹面受均匀内压作用

图 10 与图 11 分别给出了  $N_n^b$  作用下,无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  与  $\sigma_y/\sigma$  沿  $z$  方向的分布情况.当  $\lambda = 0$  时,由于问题的对称性,该曲线关于  $z/h = 0$  对称.当  $\lambda = 5$  和  $\lambda = -5$  时,无量纲应力的分布呈现镜面对称关系;当  $\lambda$

$= -5$  时,在板下表面处 ( $z = -h/2$ ) 有无穷大最大压应力 ( $x$  方向) 和无穷大最大拉应力 ( $y$  方向); 当  $\lambda = 5$  时,在板上表面处 ( $z = h/2$ ) 有无穷大最大压应力 ( $x$  方向) 和无穷大最大拉应力 ( $y$  方向). 这一现象与沿厚度方向弹性常数的变化有关. 由式(50) 可得, 当  $\lambda = -5$  时, 材料的弹性常数在板底面处最大, 从板底至板顶逐渐减至最小; 当  $\lambda = 5$  时, 材料的弹性常数在板顶面处最大, 从板顶至板底逐渐减至最小. 从而说明, 沿着 FGM 板的厚度方向, 弹性常数越大处承受的应力就越大.

图 12 与图 13 分别给出了  $N_n^b$  作用下, 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  与  $\sigma_y/\sigma$  沿  $r_1$  方向的分布情况. 可以发现, 随着  $r_1$  的增大, 即距裂纹右尖端越远, 本文所得三维解析解与二维弹性力学解吻合程度越好; 距裂纹右尖端越近, 如  $r_1 = 0.01a$  时, 二者差别较明显, 这是因为本文解答中含有  $r_1^{-1/2}$  的高阶项的原因. 随着梯度因子  $\lambda$  逐渐增大, 无量纲应力最大值均逐渐减小. 另外, 与预期的一致, 无量纲应力均在无穷远处趋向于零.

图 14 与图 15 分别给出了  $N_n^b$  作用下, 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  与  $\sigma_y/\sigma$  随  $\theta_1$  的变化. 可以看出, 均匀材料时,  $x$  方向的无量纲应力峰值最大; 与受单向拉伸时不同,  $\lambda = 5$  时,  $y$  方向的无量纲应力峰值最大.

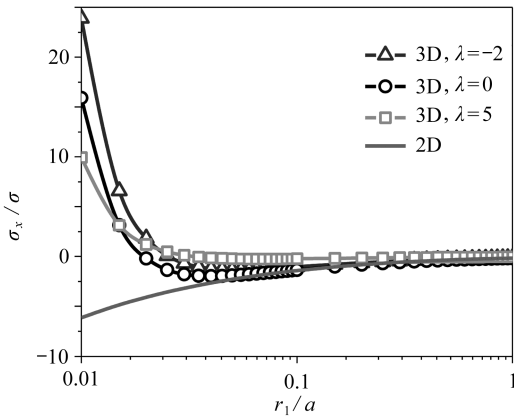


图 12 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  沿  $r_1$  方向的分布

Fig. 12 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_x/\sigma$  in the  $r_1$ -direction

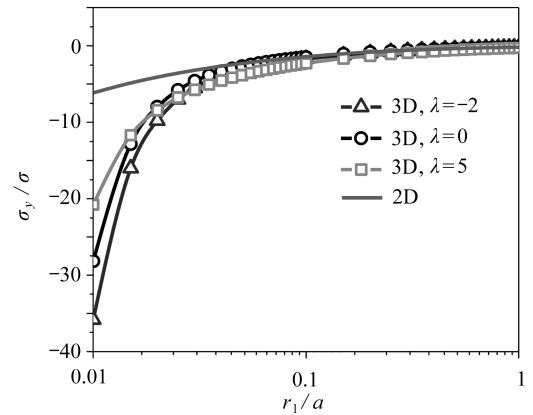


图 13 无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$  沿  $r_1$  方向的分布

Fig. 13 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  in the  $r_1$ -direction

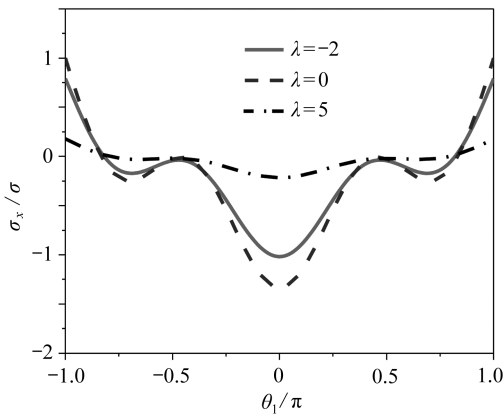


图 14 无量纲应力  $\sigma_x/\sigma$  随  $\theta_1$  的变化

Fig. 14 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_x/\sigma$  with  $\theta_1$

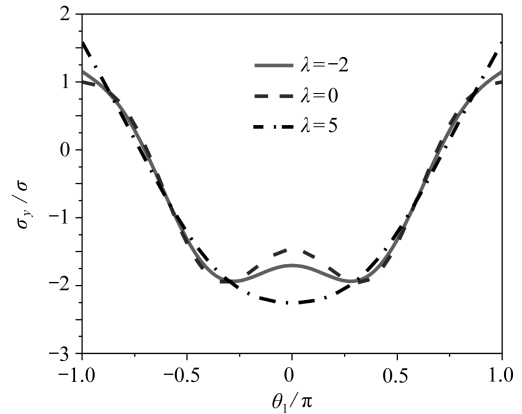


图 15 无量纲应力  $\sigma_y/\sigma$  随  $\theta_1$  的变化

Fig. 15 Distribution of dimensionless stress  $\sigma_y/\sigma$  with  $\theta_1$

## 7 结 论

本文利用 England-Spencer 板理论研究了横观各向同性 FGM 板中 Griffith 裂纹尖端的三维应力场. 假定材料参数沿板厚方向可以任意连续变化, 利用复变函数解法和保角变换技术, 分别获得了受无穷远处荷载作用和受均匀内压时裂纹尖端应力的三维解析解. 当材料退化为各向同性均匀材料时, 通过与已有二维解答比

较,发现本文解答还包含了二维解答没有包含的与材料 Poisson 比  $\nu$  有关的项以及  $r_1^{-1/2}$  的高阶项.通过数值算例进一步讨论了材料梯度因子、荷载作用位置及加载方向等因素对 Griffith 裂纹尖端三维应力场的影响.结果表明,这些因素对 FGM 板中 Griffith 裂纹尖端应力场分布有重要的影响.因此,在工程应用中,可通过适当调整这些参数来缓解 FGM 板中裂纹尖端的应力集中现象,从而优化其宏观力学性能.

本文获得的 Griffith 裂纹尖端三维应力场解析解完全满足弹性理论中的平衡方程及板上下表面的边界条件,只在板柱面边界处采用 Saint-Venant 原理对应力条件进行了放松.根据已有分析表明<sup>[16]</sup>,在裂纹附近大约一个板厚范围内,本文解答会存在一定误差;当远离该区域后本文获得的解析解便具有足够高的精度,可以作为基准解用于评价基于各种简化板理论或数值方法对于本文问题解答的有效性.

**致谢** 本文作者衷心感谢机械结构强度与振动国家重点实验室开放课题项目(SV2020-KF-13)对本文的资助.

## 附 录

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 4g_6(h/2), \quad a_2 = \frac{2}{\kappa_1} [\kappa_2 g_6(h/2) + \kappa_1 g_7(h/2)], \quad a_5 = \frac{16}{\kappa_1 - 1} R_1^1, \quad a_3 = 2 \left[ R_2^1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1^1 - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} g_6(h/2) \right], \\
 a_4 &= 2 \left[ R_3^1 - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} R_1^1 - \frac{\kappa_4}{\kappa_1} g_6(h/2) \right], \quad a_6 = 4g_7(h/2), \quad a_7 = 32 \left( R_2^1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1^1 \right), \\
 a_8 &= 2 \left( R_4^1 - \frac{\kappa_4}{\kappa_1} R_1^1 \right), \quad a_9 = 8 \left( R_4^2 - \frac{\kappa_4}{\kappa_1} R_1^2 \right), \quad b_0 = 8 \left[ R_3^2 - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} R_1^2 - \frac{\kappa_4}{\kappa_1} g_7(h/2) \right], \quad b_7 = 8g_8(h/2), \\
 b_1 &= \frac{4}{\kappa_1 - 1} [\kappa_2 g_6(h/2) + g_7(h/2)], \quad b_6 = \frac{8}{\kappa_1} [\kappa_1 g_8(h/2) + \kappa_2 g_7(h/2)], \\
 b_2 &= 2 \left[ \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} g_6(h/2) + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} g_7(h/2) - h_2^0(h/2) + g_8(h/2) \right], \quad b_5 = \frac{16}{\kappa_1 - 1} R_1^2, \\
 b_3 &= 2 \left\{ M_2 + \frac{\kappa_3}{\kappa_1} [\kappa_2 g_6(h/2) + g_7(h/2)] \right\}, \quad b_8 = 32 \left( R_2^2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1^2 \right), \\
 b_4 &= 2 \left\{ M_3 + \frac{\kappa_4}{\kappa_1} [\kappa_2 g_6(h/2) + g_7(h/2)] \right\}, \quad b_9 = 8 \left[ R_2^2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1^2 - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} g_7(h/2) \right], \\
 2a_2 &= a_6 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} a_1, \quad a_7 = 16a_3 + 8 \frac{\kappa_3}{\kappa_1} a_1, \quad b_6 = b_7 + 2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} a_6, \quad b_8 = 4b_9 + 8 \frac{\kappa_3}{\kappa_1} a_6, \\
 Q_{z1} &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{44}(z) (R_1' + T_1) dz, \quad Q_{z2} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{44}(z) \left[ T_2 + R_2' - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (T_1 + R_1') \right] dz, \\
 Q_{z3} &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{44}(z) \left[ T_3 + R_3' - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} (T_1 + R_1') \right] dz, \quad Q_{z4} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{44}(z) \left[ T_4 + R_4' - \frac{\kappa_4}{\kappa_1} (T_1 + R_1') \right] dz,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_6(z) &= \int_{-h/2}^z c_{66}(\xi) d\xi, \quad g_7(z) = \int_{-h/2}^z c_{66}(\xi) \xi d\xi, \quad g_8(z) = \int_{-h/2}^z c_{66}(\xi) \xi^2 d\xi, \\
 R_k^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{66}(z) R_k(z) dz, \quad R_k^2 = \int_{-h/2}^{h/2} z c_{66}(z) R_k(z) dz, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \\
 T_k^1 &= \int_{-h/2}^{h/2} c_{66}(z) T_k(z) dz, \quad T_k^2 = \int_{-h/2}^{h/2} z c_{66}(z) T_k(z) dz, \quad k = 1, 2, 3, 4, \\
 M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \left( R_2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} R_1 \right) + c_{13} T_3' \right] z dz, \\
 M_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \left( R_3 - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} R_1 \right) + c_{13} T_4' \right] z dz.
 \end{aligned}$$

## 参考文献 (References):

- [1] 仲政, 吴林志, 陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528-541.  
(ZHONG Zheng, WU Linzhi, CHEN Weiqiu. Research progress on some mechanical problems of functionally

- graded materials and structures[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, **40**(5): 528-541.(in Chinese))
- [2] 柯燎亮, 汪越胜. 功能梯度材料接触力学若干基本问题的研究进展[J]. 科学通报, 2015, **60**(17): 1565-1573. (KE Liaoliang, WANG Yuesheng. Research progress on some basic problems of contact mechanics of functionally graded materials[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2015, **60**(17): 1565-1573.(in Chinese))
- [3] 张冠军, 李文栋, 刘哲, 等. 介电功能梯度材料在电气绝缘领域的研究进展[J]. 中国电机工程学报, 2017, **37**(14): 4232-4245.(ZHANG Guanjun, LI Wendong, LIU Zhe, et al. Research progress of dielectric functional gradient materials in the field of electrical insulation[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2017, **37**(14): 4232-4245. (in Chinese))
- [4] ESKANDARI H. Three-dimensional investigations of stress intensity factors in a rotating thick-walled FGM cylinder[J]. *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, 2016, **10**(2): 105-113.
- [5] NOJUMI M M, WANG X D. Dynamic analysis of crack problems in functionally graded materials using a new graded singular finite element[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2018, **93**: 183-194.
- [6] CHENG J X, SUN B, WANG M Y, et al. Analysis of III crack in a finite plate of functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials using boundary collocation method[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, **89**(2): 231-243.
- [7] BOUCHIKHI A S. Numerical investigation of fracture in double-edge notched FGM plates under tension load [J]. *International Journal of Structural Integrity*, 2019, **10**(6): 838-849.
- [8] CHENG Z Q, ZHONG Z. Fracture analysis of a functionally graded strip under plane deformation[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2006, **19**(2): 114-121.
- [9] 薛雁, 聂辉, 冯文杰. 磁电弹性功能梯度板共线 Griffith 裂纹断裂行为[J]. 工程力学, 2008, **25**(4): 70-74. (XUE Yan, NIE Hui, FENG Wenjie. Fracture behaviors of collinear Griffith cracks in a functionally gradient magneto-electro-elastic strip[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(4): 70-74.(in Chinese))
- [10] 程站起, 高丹盈, 仲政. 任意梯度分布功能梯度涂层平面裂纹分析[J]. 固体力学学报, 2011, **32**(4): 426-432. (CHENG Zhanqi, GAO Danying, ZHONG Zheng. Plane crack problem for functionally graded strip with arbitrarily distributed material properties[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(4): 426-432.(in Chinese))
- [11] 刘俊俏, 苗福生, 李星. 带功能梯度材料的压电底层中周期裂纹对 SH 波的散射[J]. 固体力学学报, 2014, **35**(1): 15-20.(LIU Junqiao, MIAO Fusheng, LI Xing. The scattering of SH wave on the array of periodic cracks in a piezoelectric substrate bonded a half-plane of functionally graded materials[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2014, **35**(1): 15-20.(in Chinese))
- [12] 蒋正文, 沈孔健, 万水. 基于分层线性离散模型的 FGM 板断裂力学分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2014, **42**(4): 77-84. (JIANG Zhengwen, SHEN Kongjian, WAN Shui. Fracture mechanics analysis of FGM plate based on layered linear discrete model[J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2014, **42**(4): 77-84.(in Chinese))
- [13] 杨博. 横观各向同性功能梯度板弯曲问题的弹性力学解[D]. 博士学位论文. 杭州: 浙江大学, 2011.(YANG Bo. Elasticity solutions for bending problems of functionally graded plates with transverse isotropy[D]. PhD Thesis. Hangzhou: Zhejiang University, 2011.(in Chinese))
- [14] YANG B, CHEN W Q, DING H J. 3D elasticity solutions for equilibrium problems of transversely isotropic FGM plates with holes[J]. *Acta Mechanica*, 2015, **226**(5): 1571-1590.
- [15] YANG B, DING H J, CHEN W Q. Elasticity solutions for functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, **36**(1): 488-503.
- [16] YANG B, CHEN W Q, DING H J. Equilibrium of transversely isotropic FGM plates with an elliptical hole: 3D elasticity solutions[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, **86**(8): 1391-1414.
- [17] 范天佑. 固体与软物质缺陷与断裂理论基础(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 2014.(FAN Tianyou. *Theoretical Basis for Defects and Fracture of Solid and Soft Materials(Vol 1)*[M]. Beijing: Science Press, 2014.(in Chinese))