

# 基于自由度缩聚的最小秩修正损伤诊断\*

李国庆<sup>1</sup>, 罗帅<sup>1</sup>, 张丽<sup>2</sup>

(1. 绍兴文理学院 土木工程学院, 浙江 绍兴 312000;  
2. 南昌大学共青学院 土木工程系, 江西 九江 332020)

**摘要:** 为了解决实测模态参数与有限元分析模态参数不匹配对损伤诊断精度影响的问题, 推导了基于自由度缩聚法的残余力向量公式及最小秩修正公式. 通过对结构自由度缩聚后的损伤前、后残余力向量的运算, 可以得出相较于损伤前的残余力变化率向量, 将残余力变化率向量元素的绝对值作为改进的残余力向量, 通过运用推导出的改进残余力向量, 能够较好地解决采用最小秩修正法时所选取模态个数必须等于待修正刚度矩阵秩这一矛盾, 并由缩聚后最小秩修正公式计算出损伤程度. 研究表明: 在考虑噪音干扰下, 改进的残余力向量法对自由度缩聚后的受损结构依然具有较高地识别精度. 利用推导的最小秩修正公式进行损伤程度识别其结果是可靠的. 本文所提方法既可以实现对实测自由度不完备结构的损伤定位, 又可进行损伤程度的识别, 具有较高的鲁棒性和损伤诊断性能.

**关键词:** 最小秩修正; 模态缩聚; 残余力向量; 抗噪分析; 损伤诊断

**中图分类号:** TU317      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.410138

## 引 言

由于受到自然环境、人为因素的影响, 建筑结构在服役过程中会有一些的损伤. 为了避免事故的发生, 近年来, 学者们对结构损伤识别做出了大量研究<sup>[1-4]</sup>. 模型修正法是有效的一种损伤识别法, 通过对模型不断地修正, 可得到有限元模型与实测模型之间的修正量, 根据模型间的修正量便可确定损伤位置及损伤程度<sup>[5-6]</sup>. 最小秩修正法是运用广泛的一种模型修正法, 最小秩修正法对于结构发生局部损伤的修正具有较好的实用性. 杨秋伟等通过运用损伤定位向量较好地解决了使用最小秩修正法的一个前提条件: 采用模态个数必须等于待修正刚度矩阵秩<sup>[7]</sup>. 蒋舸等通过运用特征值矩阵, 解决了使用最小秩修正法所采取模态个数的问题, 研究表明此方法具有较好的抗噪性和损伤定位性能<sup>[8]</sup>. 杨秋伟等从矩阵论和模型修正角度深度分析了在使用最小秩修正法前必须采取正确模态个数的原因<sup>[9]</sup>. 而在实际工程中, 模态参数的不完备直接影响着模型修正结果的准确性. 基于此, 本文推导了基于自由度缩聚法的残余力向量公式及最小秩修正公式, 定义了相较于损伤前的残余力变化率向量这一概念, 将残余力变化率向

\* 收稿日期: 2020-05-13; 修订日期: 2020-05-31

基金项目: 广东省自然科学基金(2015A030310168)

作者简介: 李国庆(1993—), 男, 硕士(E-mail: 1731526587@qq.com);

罗帅(1981—), 男, 讲师, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: 839335743@qq.com).

引用格式: 李国庆, 罗帅, 张丽. 基于自由度缩聚的最小秩修正损伤诊断[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(10): 1103-1109.

量中元素取绝对值作为改进的残余力向量.相较于传统残余力向量法,改进的残余力向量能够在结构自由度缩聚下依然具有较高的抗噪性.通过使用改进的残余力向量可以识别出损伤单元位置及损伤个数,再根据损伤个数来确定运用最小秩修正法所选取的模式个数.该方法非常有效地解决了使用最小秩修正法时所采取正确模式个数的这一问题.本文算例的损伤诊断结果证明该方法具有较高的实用性和鲁棒性.

## 1 改进的残余力向量

结构损伤对质量的影响可忽略不计,则自由度为  $n$  的结构损伤后的振动方程为

$$(\mathbf{K}_d - \lambda_{dj} \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_{dj} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_u - \mathbf{K}_d, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{K}_u, \mathbf{K}_d$  分别为结构损伤前、后的刚度矩阵,  $\Delta \mathbf{K}$  为结构损伤前后刚度矩阵的改变量,  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\lambda_{dj}$  和  $\boldsymbol{\phi}_{dj}$  分别为受损结构的第  $i$  阶特征值和振型.

将方程(2)代入方程(1),可得

$$(\mathbf{K}_u - \lambda_{dj} \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_{dj} = \Delta \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_{dj}, \quad (3)$$

令

$$\mathbf{b}_j = (\mathbf{K}_u - \lambda_{dj} \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_{dj}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{b}_j$  为  $j$  阶残余力向量.在实际工程中实测振型通常是不完备的,需要对结构模型的自由度进行缩聚<sup>[10-12]</sup>.结构的振动方程可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_j^m \\ \boldsymbol{\phi}_j^s \end{Bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_j^m \\ \boldsymbol{\phi}_j^s \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

其中  $\boldsymbol{\phi}_j^m$  为实测振型向量,  $\boldsymbol{\phi}_j^s$  为不可测振型向量.

由文献[13]可知,实测振型向量与完整振型向量之间的关系可表示为

$$\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{T} \boldsymbol{\phi}_i^m, \quad (6)$$

其中转换矩阵  $\mathbf{T}$  为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -(\mathbf{I} + \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \mathbf{M}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{ms})^{-1} \cdot (\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \mathbf{M}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{mm}) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

将式(6)代入式(4),可得自由度缩聚后受损结构在全自由度下的残余力向量表达式:

$$\mathbf{b}_{dj}^r = (\mathbf{K}_u - \lambda_{dj}^m \mathbf{M}) \mathbf{T} \boldsymbol{\phi}_{dj}^m. \quad (8)$$

由于受实测自由度不完备、测量误差、噪音干扰因素的影响,没有发生损伤结构的残余力向量通常情况下不等于零.为了降低自由度缩聚后受损结构在噪音干扰下残余力向量的误差,本文通过对自由度缩聚后结构的损伤前、后残余力向量的运算,得出了相较于损伤前的残余力变化率向量,将残余力变化率向量元素的绝对值作为改进的残余力向量.推导过程如下文所示.

结构自由度缩聚后的残余力向量差表达式为

$$\Delta \mathbf{b}_j^r = \mathbf{b}_{dj}^r - \mathbf{b}_{dj}^r, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{b}_{dj}^r$  为自由度缩聚后结构损伤后的残余力向量;  $\mathbf{b}_{dj}^r$  为自由度缩聚后结构损伤前的残余力向量.

自由度缩聚后结构的残余力变化率向量表达式为

$$\mathbf{B}_j^r = \Delta \mathbf{b}_j^r / \mathbf{b}_{dj}^r = [\mathbf{a}_1^r \cdots \mathbf{a}_n^r]_{1 \times n}^T. \quad (10)$$

将残余力变化率向量元素的绝对值作为改进的残余力向量,有

$$\mathbf{Z}_{n \times 1}^r = [|\mathbf{a}_1^r| \ \cdots \ |\mathbf{a}_n^r|]_{1 \times n}. \tag{11}$$

结构发生损伤时,残余力变化率向量元素  $\mathbf{a}_i^r$  会有明显的突变.本文的算例研究表明:相较于传统残余力向量,改进的残余力向量能够在结构自由度缩聚后依然具有较高的抗噪性,损伤诊断结果非常直观,未损伤单元节点的残余力变化率值较低,引起误判的可能性较小.

## 2 自由度缩聚后的最小秩修正法

刚度矩阵的分解是求出单元损伤程度的前提条件,刚度矩阵变化量的分解式可表示为

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T, \tag{12}$$

其中  $\Delta \mathbf{P}$  为归一化对角形式的刚度矩阵变化量,即  $\text{diag}(\Delta \mathbf{P}) = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_i \ \cdots \ \alpha_N]$ ,  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $\alpha_i$  表示第  $i$  个单元的刚度损伤参数,当  $\alpha_i$  等于 1 时说明该单元完全损伤,当  $\alpha_i$  等于 0 时,说明该单元没有损伤;  $\mathbf{A}$  为直角坐标系与模态坐标系的转换矩阵,故结构损伤不会影响  $\mathbf{A}$  的变化<sup>[14]</sup>.

由式(3)、(8)和(12)可得自由度缩聚后的受损结构在全自由度下的振动方程:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T (\mathbf{T} \boldsymbol{\phi}_{ij}^m) = \mathbf{b}_{ij}^r. \tag{13}$$

由式(13)可得

$$\Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T (\mathbf{T} \boldsymbol{\phi}_{ij}^m) = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_{ij}^r, \tag{14}$$

其中上标“+”表示广义逆.

使用  $i$  组模态参数修正时,式(14)可表示为

$$\Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{B}, \tag{15}$$

其中  $\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{T} \boldsymbol{\phi}_{d1}^m \ \cdots \ \mathbf{T} \boldsymbol{\phi}_{di}^m]$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{A}^+ \mathbf{b}_{d1}^r \ \cdots \ \mathbf{A}^+ \mathbf{b}_{di}^r]$ .

由式(15)可得  $\Delta \mathbf{P}$  在自由度缩聚后的最小秩修正解为

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \mathbf{B}^T. \tag{16}$$

## 3 算 例

以平面桁架算例来探讨及验证本文所提方法的优越性和可行性. 桁架杆单元的密度  $\rho = 7\ 850 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ , 水平和竖直杆长  $L = 1 \text{ m}$ , 杆单元截面积  $S = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , Poisson 比  $\gamma = 0.3$ . 模型如图 1 所示,为验证上述方法在模型自由度缩聚后的鲁棒性及准确性,假设桁架节点 2,3,4,5,6 的自由度为可实测自由度,其他节点自由度均为缩聚自由度.通常结构损伤对质量影响较小,所以桁架杆单元的损伤通过降低弹性模量来模拟<sup>[15]</sup>.为了使理论分析和实际环境相匹配,将模态分析得出的频率和振型引入随机噪音干扰<sup>[16-17]</sup>.

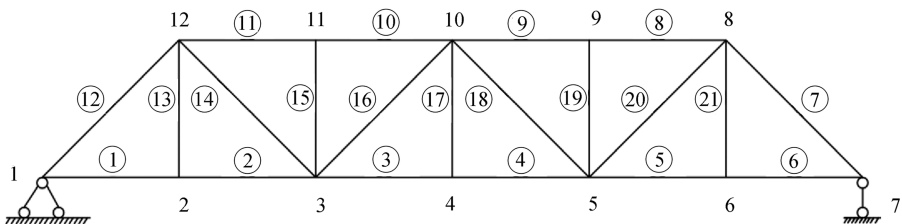


图 1 平面桁架

Fig. 1 A plane truss structure

$$\lambda'_{dj} = \lambda^m_{dj}(1 + \varepsilon \text{rand}(-1, 1)), \quad (17)$$

$$\phi'_{dj} = \phi^m_{dj}(1 + \zeta \text{rand}(-1, 1)), \quad (18)$$

其中  $\lambda'_{dj}$  和  $\phi'_{dj}$  为加入随机噪声处理后的频率和振型;  $\varepsilon$  表示频率引入的噪声水平;  $\zeta$  表示振型引入的噪声水平;  $\text{rand}(-1, 1)$  表示在 -1 和 1 之间均匀分布的随机数。

## 4 损伤定位识别

假设⑤号杆单元损伤 10%, 记为损伤工况 1. 在频率中引入 15% 的随机噪音干扰, 振型中引入 20% 的随机噪音干扰. 以自由度缩聚后受损结构的第一阶模态参数为基本量, 利用传统的残余力向量法的损伤识别结果如图 2 所示. 从图 2 中可以看出, 节点 5, 6 的残余力值发生明显突变, 可以判断单元⑤为损伤单元, 但节点 3, 8 的残余力值也较高, 很容易误认为单元⑩也是损伤单元, 该方法检测结果的未损伤单元节点残余力值较高, 引起误判的可能性高. 采用本文改进的残余力向量法的损伤识别结果如图 3 所示. 从图 3 中可以看出, 节点 5, 6 的残余力值发生明显突变, 说明单元⑤为损伤单元, 未损伤单元节点的残余力值较小, 非常接近于零, 引起误判的概率非常小. 由此可见, 在模型自由度缩聚下, 相较于传统的残余力向量法, 本文提出的改进的残余力向量更具有抗噪性.

假设单元⑤和单元⑨分别损伤 10%, 20%, 记为损伤工况 2. 在频率和振型中分别考虑 5%, 10% 的随机噪音干扰. 仍然以自由度缩聚后受损结构的第一阶模态参数为基本量, 使用改进的残余力向量法进行损伤诊断, 其损伤识别结果如图 4 所示. 从图 4 可以看出, 单元⑤和单元⑨的杆端节点编号 5, 6 和 9, 10 均发生明显突变, 未损伤杆单元节点的残余力变化率值较低, 损伤诊断结果非常直观, 损伤诊断结果跟假设损伤工况 2 相符. 证明了改进的残余力向量法对结构发生单损伤和多损伤都是可行的, 且具有较高的鲁棒性.

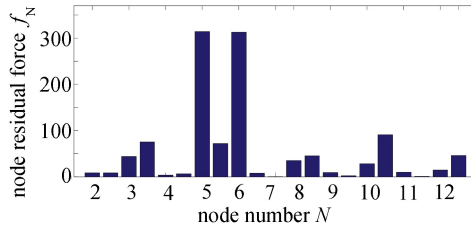


图 2 传统残余力向量法识别结果(工况 1)

Fig. 2 Identification results of the traditional residual force vector method(case 1)

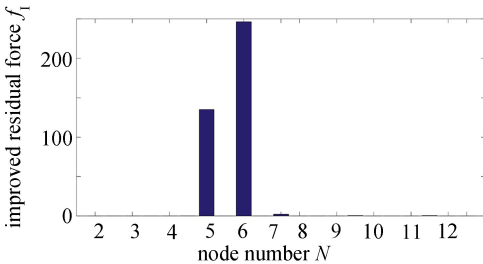


图 3 改进残余力向量法识别结果(工况 1)

Fig. 3 Identification results of the improved residual force vector method(case 1)

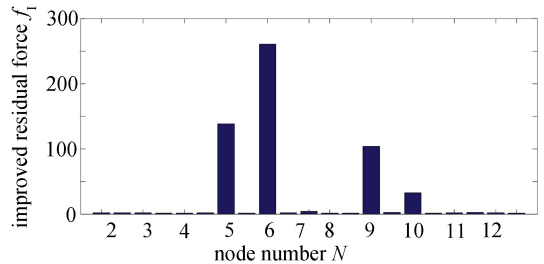


图 4 识别结果(工况 2)

Fig. 4 Identification results(case 2)

## 5 损伤程度识别

由文献[8]可知,结构发生损伤的个数等于待修正刚度矩阵的秩,也就是使用最小秩修正法来计算损伤程度时所采取的模态个数等于结构发生损伤的个数.由图3可知,结构仅发生一处损伤,其损伤个数为1,在使用最小秩修正公式时,仅需要一组模态参数便可计算出受损结构的修正量(即损伤程度).由分析可知受损结构的第一阶模态参数对损伤最为敏感,故在计算损伤工况1的损伤程度时采用第一阶模态参数,在频率和振型中分别考虑1%,3%的随机噪音干扰,利用式(16)对其进行修正,修正结果如图5所示.利用自由度缩聚后的最小秩修正公式计算出的⑤号杆单元损伤程度为9.7%,真实损伤程度为10%,该方法的识别误差为3%,满足实际工程的精度要求.该结果验证了本文推导出的基于自由度缩聚法的最小秩修正公式的可行性,而且具有良好的抗噪性和实用性.

由图4可知(损伤工况2),结构发生了两处损伤,其损伤个数为2,使用最小秩修正公式时需要两组模态参数计算其损伤程度,这里采用受损结构的前两阶模态参数进行最小秩修正.同样在频率和振型中分别考虑1%,3%的随机噪音干扰,利用自由度缩聚后的最小秩修正公式(16)对其进行修正,修正结果如图6所示,可以得出修正结果:单元⑤和单元⑨分别损伤11%,21%,工况2的真实损伤程度分别为10%和20%,该方法的识别误差为10%和5%,其识别误差满足实际工程的要求及精度.该结果也进一步说明了利用本文推导的最小秩修正法进行损伤程度识别其结果是可靠的.

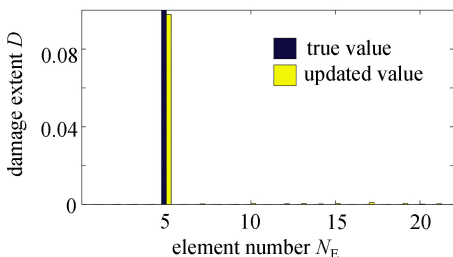


图5 损伤程度识别(工况1)

Fig. 5 Damage extent identification(case 1)

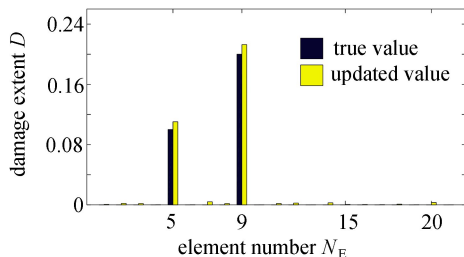


图6 损伤程度识别(工况2)

Fig. 6 Damage extent identification(case 2)

## 6 总 结

1) 通过推导基于自由度缩聚法的残余力向量公式,并引入残余力变化率这一概念,有效地解决了采用最小秩修正法时所选取正确模态个数这一问题.经算例研究表明:相较于传统残余力向量法,改进的残余力向量法在模型自由度缩聚后依然具有较高的识别定位性能和抗噪性,损伤识别结果非常直观,且引起误判的可能性较低.

2) 通过运用推导出的受损结构在自由度缩聚后的最小秩修正公式,仅仅需要利用受损结构的低阶模态参数就能够较好地识别出损伤程度,其误差也较小,满足了实际工程的精度要求,而且具有一定的抗噪性.

3) 本文所提方法对实测自由度不完整结构的损伤识别提供了新思路,具有一定的实际应用价值.

4) 本文桁架算例中杆单元的损伤是通过降低整根杆单元的弹性模量来实现的,若将桁架杆划分为多个单元进行分析,该方法的可行性还有待于研究.

## 参考文献(References):

- [1] 何绪飞, 艾剑良, 宋智桃. 多元数据融合在无人机结构健康监测中的应用[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 395-402. (HE Xufei, AI Jianliang, SONG Zhitao. Multi-source data fusion for health monitoring of unmanned aerial vehicle structures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 395-402. (in Chinese))
- [2] CUI H Y, DU H Y, ZHAO F Y, et al. Damage identification in a plate structure based on a cross-direction strain measurement method[J]. *Measurement*, 2020, **158**: 107714. DOI: 10.1016/j.measurement.2020.107714.
- [3] HUANG X Y, LIU Z L, ZHANG X Y, et al. Surface damage detection for steel wire ropes using deep learning and computer vision techniques[J]. *Measurement*, 2020, **161**: 107843. DOI: 10.1016/j.measurement.2020.107843.
- [4] KANKANAMGE Y, HU Y F, SHAO X Y. Application of wavelet transform in structural health monitoring[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2020, **19**(3): 515-532.
- [5] YU L, CHENG L, YAM L H, et al. Application of eigenvalue perturbation theory for detecting small structural damage using dynamic responses[J]. *Composite Structures*, 2007, **78**: 402-409.
- [6] YANG Q W. A new damage identification method based on structural flexibility disassembly [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2011, **17**(7): 1000-1008.
- [7] 杨秋伟, 刘济科. 基于最小秩修正的结构损伤识别方法[J]. 机械强度, 2007, **29**(6): 891-893. (YANG Qiuwei, LIU Jike. Structural damage identification based on the minimum rank update method[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2007, **29**(6): 891-893. (in Chinese))
- [8] 蒋舸, 冯晓东. 空间桁架结构残余力最小秩修正法损伤识别[J]. 机械强度, 2019, **41**(6): 1480-1485. (JIANG Ge, FENG Xiaodong. Residual force minimum rank update method for damage identification of space truss structures [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2019, **41**(6): 1480-1485. (in Chinese))
- [9] 杨秋伟, 刘济科. 结构损伤检测的最小秩修正方法[J]. 振动与冲击, 2008, **27**(4): 7-9. (YANG Qiuwei, LIU Jike. Structural damage detection with minimum-rank update method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, **27**(4): 7-9. (in Chinese))
- [10] 罗虹, 李军, 曹友强, 等. 有限元模型动力缩聚中主副自由度选取方法[J]. 机械设计, 2010, **27**(12): 11-14. (LUO Hong, LI Jun, CAO Youqiang, et al. Methods for selecting the master and slave degrees of freedom in dynamic condensation technique of finite element models[J]. *Journal of Machine Design*, 2010, **27**(12): 11-14. (in Chinese))
- [11] 刘伟, 高维成, 孙毅. 自由度匹配技术在网壳结构损伤识别应用中的比较研究[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(2): 107-111, 179-180. (LIU Wei, GAO Weicheng, SUN Yi. Comparative study of model match techniques used in damage detection on reticulated shell[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, **26**(2): 107-111, 179-180. (in Chinese))
- [12] 伊廷华, 李宏男, 顾明. 基于模型缩聚的广州新电视塔传感器优化布置研究[J]. 工程力学, 2012, **29**(3): 55-61. (YI Tinghua, LI Hongnan, GU Ming. Reserach on optimal sensor placement of Guangzhou new TV tower based on model reduction[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(3): 55-61. (in Chinese))
- [13] 杨秋伟, 刘济科. 一种改进的模型缩聚方法[J]. 力学与实践, 2006, **28**(2): 70-72. (YANG Qiuwei, LIU Jike. An improved method for structural finite element modal reduction[J]. *Mechanics in Engineering*, 2006, **28**(2): 70-72. (in Chinese))

- [14] 孙增寿, 王冉. 基于残余力向量的桁架梁损伤识别研究[J]. 力学与实践, 2016, **38**(5): 526-530. (SUN Zengshou, WANG Ran. Damage recognition of truss structure based on residual force vector[J]. *Mechanics in Engineering*, 2016, **38**(5): 526-530. (in Chinese))
- [15] 孟凡豪, 于靖军, 马文硕. 基于动态测量柔度矩阵的弦索桥吊索损伤检测[J]. 振动与冲击, 2019, **38**(14): 267-275. (MENG Fanhao, YU Jingjun, MA Wenshuo. Damage detection of suspension bridge sling based on dynamic measurement flexibility matrix[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38**(14): 267-275. (in Chinese))
- [16] 刘春城, 侯尚雨, 侯立群. 基于多尺度模型的输电塔裂纹损伤识别及抗噪性能分析[J]. 水电能源科学, 2016, **34**(2): 177-181, 216. (LIU Chuncheng, HOU Shangyu, HOU Liqun. Transmission tower crack damage identification and analysis of anti-noise performance based on multi-scale model[J]. *International Journal Hydroelectric Energy*, 2016, **34**(2): 177-181, 216. (in Chinese))
- [17] 黄立新, 岳世燕, 胡中明, 等. 功能梯度经典梁损伤识别模态应变能变化率法的抗噪音性能研究[J]. 玻璃钢/复合材料, 2016(2): 35-39. (HUANG Lixin, YUE Shiyan, HU Zhongming, et al. A study of anti-noise properties of modal strain energy change ratio method for the damage identification of functionally graded classical beam[J]. *Fiber Reinforced Plastics/Composites*, 2016(2): 35-39. (in Chinese))

## Minimum Rank Correction Damage Identification Based on Modal Reduction

LI Guoqing<sup>1</sup>, LUO Shuai<sup>1</sup>, ZHANG Li<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Shaoxing University,  
Shaoxing, Zhejiang 312000, P.R.China;

2. Department of Civil Engineering, Gongqing College of Nanchang University,  
Jiujiang, Jiangxi 332020, P.R.China)

**Abstract:** To solve the problem that the measured modal parameters and the finite element analysis modal parameters do not match in damage identification, the residual force vector formula and the minimum rank update formula based on the modal reduction method were derived. Through the calculation of the residual force vectors of damaged and undamaged structures, the change rate of the residual force vector was obtained, and the absolute values of the residual force change rate vector elements were defined as the improved residual force vector. With the improved residual force vector, the correct number of modes used in the minimum rank update method was determined, and the minimum rank update formula based on modal reduction was used to calculate the damage extent. The results show that, under noise interference, the presented method could well locate the damage with incomplete modal data. The damage extent identification based on the derived minimum rank update formula is reliable. The method is robust and accurate in structural damage identification for measured incomplete-DOF structures.

**Key words:** minimum rank update method; modal reduction; residual force vector; noise immunity; damage identification