

二维瞬态热传导问题的无单元 Galerkin 法分析*

王 红, 李小林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 采用无单元 Galerkin (element-free Galerkin, EFG) 法求解具有混合边界条件的二维瞬态热传导问题. 首先采用二阶向后微分公式离散热传导方程的时间变量, 将该问题转化为与时间无关的混合边值问题; 然后采用罚函数法处理 Dirichlet 边界条件, 建立了二维瞬态热传导问题的无单元 Galerkin 法; 最后基于移动最小二乘近似的误差结果, 详细推导了无单元 Galerkin 法求解二维瞬态热传导问题的误差估计公式. 给出的数值算例表明计算结果与解析解或已有数值解吻合较好, 该方法具有较高的计算精度和较好的收敛性.

关键词: 二维瞬态热传导问题; 无单元 Galerkin 法; 二阶 BDF 格式; 误差估计

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410111

Analysis of 2D Transient Heat Conduction Problems With the Element-Free Galerkin Method

WANG Hong, LI Xiaolin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,
Chongqing 401331, P.R. China)

Abstract: The element-free Galerkin (EFG) method was introduced to solve 2D transient heat conduction problems. Firstly, with the 2nd-order BDF scheme to address the time derivative term, the original problem was transformed into a series of time-independent mixed boundary value problems. Then, the penalty method was adopted to treat the Dirichlet boundary condition, and the element-free Galerkin method was established for 2D transient heat conduction problems. Finally, based on the error results of the moving least squares approximation, the error estimation of the element-free Galerkin method for 2D transient heat conduction problems was derived in detail. Numerical examples show that, the calculation results are in good agreement with the analytical solutions or the existing numerical solutions, and the EFG method has higher calculation accuracy and better convergence.

Key words: 2D transient heat conduction problem; element-free Galerkin method; 2nd-order BDF scheme; error estimation

引 言

瞬态热传导问题是科学和工程中的重要问题之一^[1-2], 研究新兴材料随时间演变的热传导性能对航天

* 收稿日期: 2020-04-20; 修订日期: 2020-07-07

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11971085); 重庆市高校创新研究群体(CXQT19018); 重庆市教委科学技术研究项目(重大项目)(KJZD-M201800501)

作者简介: 王红(1994—), 女, 硕士(E-mail: 1072835817@qq.com);
李小林(1983—), 男, 教授(通讯作者. E-mail: lxmath@163.com).

引用格式: 王红, 李小林. 二维瞬态热传导问题的无单元 Galerkin 法分析[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(5): 460-469.

工程材料的研发有着重要的意义.近年来,有限差分法^[3-4]、有限元法^[5-6]、边界元法^[7-9]、无网格法^[10-11]等数值方法是解决此类问题的常用方法.

无网格方法是一种基于离散节点的计算方法,其中形函数的构造是建立在一系列离散的节点上,它可以解决一些传统计算方法难以处理的科学工程问题^[12-13],并显示出一定的优越性.无单元 Galerkin (EFG) 法^[14-17]是应用最为广泛的无网格方法之一.

本文应用 EFG 法分析具有混合边界条件的二维瞬态热传导问题.首先借鉴文献[18],用二阶向后微分公式(backward difference formula, BDF)离散问题中的时间变量;其次采用罚函数法处理 Dirichlet 边界条件,建立二维瞬态热传导问题的 EFG 法,并给出了计算公式;然后受文献[19-20]的启发,在 Sobolev 空间中推导了求解二维瞬态热传导混合边值问题的 EFG 法的误差估计;最后给出了一些数值算例来验证理论误差结果.

1 问题描述

在直角坐标系下,二维瞬态温度场由如下微分方程控制^[16]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

其中 $T(\mathbf{x}, t) = T(x, y, t)$ 表示 t 时刻的温度, $\rho(\mathbf{x})$ 表示材料密度, $c(\mathbf{x})$ 表示比热容, $Q(\mathbf{x}, t)$ 表示发热率, k_1, k_2 分别表示沿 x, y 方向的热传导系数.

方程(1)的初始温度为

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

混合边界条件

$$T = \bar{T}, \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \bar{q}, \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (4)$$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial T}{\partial y} n_y = m(T_a - T), \quad \text{on } \Gamma_3 \quad (5)$$

分别为 Dirichlet、Neumann 和 Robin 边界条件,其中 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ 为垂直于边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ 向外的单位向量, \bar{T} 和 \bar{q} 分别为相应边界上的规定温度和给定热流, m 为对流换热系数, T_a 为环境温度.

2 二维瞬态热传导问题的 EFG 法

2.1 时间离散

在时间方向上,借鉴文献[18],用二阶 BDF 格式来离散方程(1)的时间变量,可得

$$c\rho \frac{\partial \tilde{T}^{(k+2)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial y} \right) + Q^{(k+2)} + R^{(k+2)}, \quad (6)$$

其中

$$\frac{\partial \tilde{T}^{(k+2)}}{\partial t} = \frac{3}{2} \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial T^{(k+1)}}{\partial t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (T^{(k+2)} - T^{(k+1)}), \quad \frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}, \quad (8)$$

$R^{(k+2)}$ 为该方程进行时间离散前后的误差, $Q^{(k+2)}$ 表示 $t = (k+2)\tau$ 时所产生的热量, τ 为时间变量 t 的步长且

$$T^{(k)}(x, y) = T(x, y, k\tau), \quad |R^{(k+2)}| \leq C\tau^2. \quad (9)$$

令

$$\lambda = \frac{c\rho}{2\tau}, \quad f^{(k)} = 4\lambda T^{(k+1)} - \lambda T^{(k)} + Q^{(k+2)} + R^{(k+2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

将式(7)和(8)代入式(6),则问题(1)~(5)转化为与时间无关的混合边值问题:

$$\begin{cases} 3\lambda T^{(k+2)} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial y} \right) = f^{(k)}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ T^{(k+2)} = \bar{T}^{(k+2)}, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ k_1 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial y} n_y = \bar{q}^{(k+2)}, & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \\ k_1 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial y} n_y = m(T_a^{(k+2)} - T^{(k+2)}), & \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (10)$$

2.2 二维瞬态热传导问题的 EFG 公式

混合边值问题(10)可用 EFG 法迭代求解,接下来将给出详细的 EFG 公式.

由于移动最小二乘近似的形函数不满足 Kronecker δ 函数特性,求解该问题时 Dirichlet 边界条件不易施加. Lagrange 乘子法和罚函数法是处理 Dirichlet 边界条件的两种基本方法,但 Lagrange 乘子法会使得系数矩阵不正定,导致计算量增大,故本文采用罚函数法^[21].

以 $v(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$ 乘微分方程(10)的两端,并在 Ω 上积分得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 3\lambda T_{\alpha}^{(k+2)} v d\Omega - \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial T_{\alpha}^{(k+2)}}{\partial x} \right) v d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial T_{\alpha}^{(k+2)}}{\partial y} \right) v d\Omega \right] = \\ & \int_{\Omega} 4\lambda T^{(k+1)} v d\Omega - \int_{\Omega} \lambda T^{(k)} v d\Omega + \int_{\Omega} Q^{(k+2)} v d\Omega + \int_{\Omega} R^{(k+2)} v d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

接下来,根据 Gauss 公式化简式(11),于是得与混合边值问题(10)等价的变分问题:求 $T_{\alpha}^{(k+2)}(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$,使得 $\forall v(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$,有

$$\begin{aligned} a_{\alpha}(T_{\alpha}^{(k+2)}, v) &= \int_{\Omega} 4\lambda T^{(k+1)} v d\Omega - \int_{\Omega} \lambda T^{(k)} v d\Omega + \int_{\Omega} v Q^{(k+2)} d\Omega + \int_{\Omega} R^{(k+2)} v d\Omega + \\ & \alpha \int_{\Gamma_1} v \bar{T}^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} v \bar{q}^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m v T_a^{(k+2)} d\Gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

其中双线性形式 $a_{\alpha}(\cdot, \cdot)$ 被定义为

$$\begin{aligned} a_{\alpha}(T_{\alpha}^{(k+2)}, v) &\triangleq \int_{\Omega} 3\lambda v T_{\alpha}^{(k+2)} d\Omega + \int_{\Omega} k_1 \frac{\partial T_{\alpha}^{(k+2)}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} k_2 \frac{\partial T_{\alpha}^{(k+2)}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \\ & \alpha \int_{\Gamma_1} v T_{\alpha}^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m v T_{\alpha}^{(k+2)} d\Gamma, \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)和(13)中, α 是罚函数法中的罚因子.

2.3 数值离散

为了得到二维瞬态热传导问题的 EFG 法的数值解,设 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 为域 $\Omega \cup \Gamma$ 中的一组节点, h 为节点间距, φ_i 为基于节点 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 构造的移动最小二乘(moving least squares, MLS)近似形函数^[19]. 在无网格近似解空间 $V_h(\Omega) = \text{span}\{\varphi_i, 1 \leq i \leq N\}$ 中,变分问题式(14)可近似为:求 $T_h^{(k+2)}(\mathbf{x}) \in V_h(\Omega)$,使得 $\forall v(\mathbf{x}) \in V_h(\Omega)$,有

$$\begin{aligned} a_{\alpha}(T_h^{(k+2)}, v) &= \int_{\Omega} 4\lambda v T^{(k+1)} d\Omega - \int_{\Omega} \lambda v T^{(k)} d\Omega + \int_{\Omega} v Q^{(k+2)} d\Omega + \\ & \alpha \int_{\Gamma_1} v \bar{T}^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} v \bar{q}^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m v T_a^{(k+2)} d\Gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $T_h^{(k+2)}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{M}T^{(k+2)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i T_i^{(k+2)}$, \mathcal{M} 为逼近算子. 由 $v(\mathbf{x})$ 的任意性,将 $v(\mathbf{x})$ 依次取为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, 则式(14)可以离散为如下方程组:

$$(K_{\alpha} + 3\lambda G)T^{(k+2)} = 4\lambda GT^{(k+1)} - \lambda GT^{(k)} + \mathbf{b}^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

其中

$$(K_\alpha)_{ij} = \int_\Omega k_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega k_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \varphi_i \varphi_j d\Gamma + m \int_{\Gamma_3} \varphi_i \varphi_j d\Gamma,$$

$$(G)_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$(b^{(k+1)})_i = \int_\Omega Q^{(k+2)} \varphi_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \varphi_i \bar{T}^{(k+2)} d\Gamma + m \int_{\Gamma_3} \varphi_i T_a^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \varphi_i \bar{q}^{(k+2)} d\Gamma.$$

同理可得,当方程(6)中 $k=0$ 时,该问题可以离散为方程组

$$(K_\alpha + \lambda G)T^{(2)} = b^{(1)}, \quad (16)$$

式中

$$(b^{(1)})_i = \int_\Omega \lambda \varphi_i T_0 d\Omega + \int_\Omega Q^{(2)} \varphi_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} \bar{T}^{(2)} \varphi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}^{(2)} \varphi_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m T_a^{(2)} \varphi_i d\Gamma.$$

3 误差估计

定理 1 设 $T^{(k+2)} \in H^{(r+1)}(\Omega)$ 为混合边值问题(10)的解析解, $T_h^{(k+2)} \in V_h(\Omega)$ 为近似变分问题(14)的数值解,则二维瞬态热传导问题的 EFG 法有如下误差:

$$\|T^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\tau^2 + h^{\tilde{p}-1}), \quad \Gamma_1 = \emptyset, \quad (17)$$

$$\|T^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\tau^2 + h^{\tilde{p}-1} + \alpha^{-1} + \alpha^{1/2} h^{\tilde{p}}), \quad \Gamma_1 \neq \emptyset, \quad (18)$$

其中 $\tilde{p} = \min(r, \hat{m}) + 1$, \hat{m} 为 MLS 近似中基函数的最大次数, C 是一个与 h 无关的常数.

证明 根据式(13)定义的双线性形式,令

$$\begin{aligned} \|v_\alpha\| &:= \sqrt{a_\alpha(v, v)} = \\ &\sqrt{\int_\Omega \left[k_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 3\lambda v^2 \right] d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} v^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m v^2 d\Gamma} \leq \\ &\sqrt{C_1 (\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

因此

$$C_* \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_\alpha \leq C_\# (\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha^{1/2} \|v\|_{L^2(\Gamma)}). \quad (19)$$

令 $\mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)}$ 是 $T_\alpha^{(k+2)}$ 的移动最小二乘近似,由 $\mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)} \in V_h(\Omega)$ 得

$$\begin{aligned} a_\alpha(T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}, \mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}) &= \int_\Omega R^{(k+2)} (\mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}) d\Omega \leq \\ &C\tau^2 (\|\mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)} - T_\alpha^{(k+2)}\|_{L^2(\Omega)} + \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

再应用双线性形式 $a_\alpha(\cdot, \cdot)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} \|(T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)})_\alpha\|^2 &\leq \\ &C_1 (\|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\alpha \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{L^2(\Gamma)}^2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_\alpha(T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}, T_\alpha^{(k+2)} - \mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)}) &\leq \\ &C_2 \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{L^2(\Omega)} \|T_\alpha^{(k+2)} - \mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)}\|_{L^2(\Omega)} + \\ &C_2 \|\nabla(T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)})\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(T_\alpha^{(k+2)} - \mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)})\|_{L^2(\Omega)} + \\ &C_2 \alpha \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{L^2(\Gamma)} \|T_\alpha^{(k+2)} - \mathcal{M}T_\alpha^{(k+2)}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

联立上面三个式子,并由文献[15, 19]可得

$$\|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_\alpha^2 \leq C_4(\tau^2 + h^{\tilde{p}-1} + \alpha^{1/2} h^{\tilde{p}}) \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_\alpha + C_5 \tau^2 h^{\tilde{p}}.$$

根据式(19)得

$$\|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_*^{-1} \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_\alpha \leq C(\tau^2 + h^{\tilde{p}-1} + \alpha^{1/2} h^{\tilde{p}}). \quad (20)$$

当二维瞬态热传导问题不存在 Dirichlet 边界条件时,即 $T_\alpha^{(k+2)} \equiv T^{(k+2)}$, 则存在一个与 h 无关的常数 C 使式

(17) 成立.

当 $\Gamma_1 \neq \emptyset$ 时, 令 $\omega \in H^1(\Omega)$ 是下列问题的解:

$$\begin{cases} 3\lambda\omega - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial\omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \omega = k_1 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial y} n_y = \bar{q}^{(k+2)}, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \omega = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases}$$

且

$$\xi \triangleq T^{(k+2)} - T_\alpha^{(k+2)} - \alpha^{-1}\omega,$$

则

$$\begin{aligned} & \|T^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ & \|T_\alpha^{(k+2)} - T_h^{(k+2)}\|_{H^1(\Omega)} + \partial^{-1} \|\omega\|_{H^1(\Omega)} + \|\xi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (21)$$

根据双线性形式 $a_\alpha(\cdot, \cdot)$ 的定义, 则 ξ 函数满足

$$a_\alpha(\xi, v) = a_\alpha(T^{(k+2)}, v) - a_\alpha(T_\alpha^{(k+2)}, v) - \alpha^{-1}a_\alpha(\omega, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

接下来, 应用 Gauss 公式并调用式 (13) 得

$$\begin{aligned} a_\alpha(T^{(k+2)}, v) &= \int_\Omega f^{(k)} v d\Omega + \int_{\Gamma_1} \left(k_1 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial x} n_x + k_2 \frac{\partial T^{(k+2)}}{\partial y} n_y + \alpha T^{(k+2)} \right) v d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_2} v \bar{q}^{(k+2)} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m T_\alpha^{(k+2)} v d\Gamma, \end{aligned}$$

且

$$a_\alpha(\omega, v) = \int_\Omega \left(k_1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + k_2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega + \int_\Omega 3\lambda \omega v d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_1} v \omega d\Gamma + \int_{\Gamma_3} m v \omega d\Gamma.$$

令 $v = \xi$, 则

$$\|\xi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_*^{-1} \|\xi\|_\alpha \leq C\alpha^{-1} \|\omega\|_{H^1(\Omega)}, \quad (22)$$

最后, 将式 (20)、(22) 代入式 (21), 通过整理可得到式 (18).

罚函数法是一种非常容易实现的方法, 但需要选择适当的罚因子. 从定理 1 看出二维瞬态热传导问题的 EFG 法的误差与罚因子 α 有关, 罚因子过大或过小都会导致误差增加, 故取 $\alpha = C_\alpha h^{(-2\min(r, \hat{m})+1)/3}$, 其中 C_α 为常数. 显然, 当 $\hat{m} = 2$ 且 $r \geq 2$ 时, 有 $\alpha = C_\alpha h^{-2}$, 此时 EFG 法的解以最优阶 $h^2 + \tau^2$ 在 $H^1(\Omega)$ 空间中收敛于解析解. 在下面的算例中, 移动最小二乘近似的基函数选择 $\hat{m} = 2$, 则 $\alpha = C_\alpha h^{-2}$.

4 数值算例

4.1 算例 1

考虑具有热量产生的二维瞬态热传导方程^[22]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) + Q, \quad 1 \leq x, y \leq 2,$$

其中导热系数 $k_1 = k_2 = x + y$, W/(m·°C), 该问题的初始温度、Dirichlet 边界条件满足解析解

$$T(\mathbf{x}, t) = x^2 + y^2 + \sin(10t).$$

给定时间步长、节点间距分别为 $\tau = 0.01$ s, $h = 0.02$ m, 采用 EFG 法计算 $t = 5$ s 时刻的温度分布, 得到的误差结果如图 1 所示, 数据显示最大误差小于 6×10^{-4} °C, 说明求解的温度场与解析解吻合较好, 该方法具有较高的计算精度. 图 2 展示了 $t = 1$ s 和 $t = 3$ s 时罚因子 α 与误差之间的关系, 定理 1 表明罚因子 α 过小或过大都会增加数值误差, 这些数值结果与理论结果吻合.

为了研究参数 C_α 对 EFG 解的精度影响, 分别在 $t = 3$ s, 5 s 时采用不同的 C_α 计算误差, 结果如图 3 所示. 显然, 解的精度随 C_α 的增加而增加, 误差都随着 h 的减小而减小, 并且对于所有罚因子, 实验的收敛速度都达到了理论的收敛速度. 考虑到计算结果的有效性和收敛性, 接下来的计算均选择罚因子 $\alpha = 10^2 h^{-2}$.

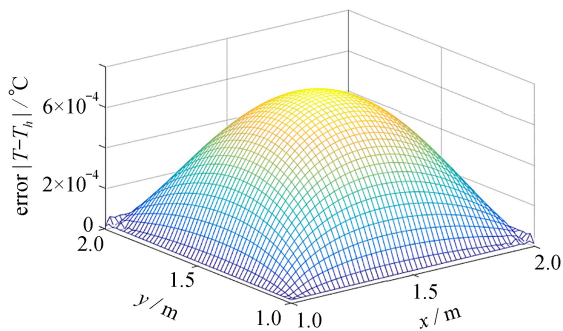


图 1 算例 1 在 $t = 5\text{ s}$ 时的误差

Fig. 1 The error at $t = 5\text{ s}$ for example 1

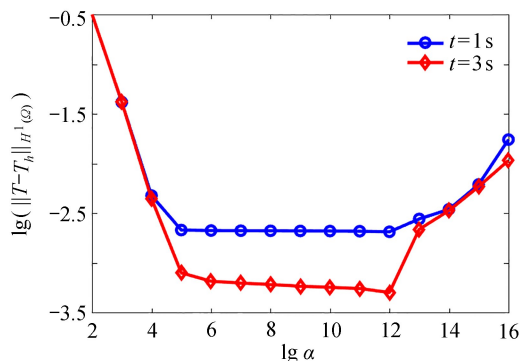


图 2 罚因子 α 的影响

Fig. 2 The influence of penalty factor α

分别给定 $\tau = 0.001\text{ s}$, $h = 0.025\text{ m}$, 采用 EFG 法计算 $t = 1\text{ s}, 3\text{ s}, 5\text{ s}, 7\text{ s}$ 时关于 h 和 τ 的误差, 计算结果如图 4 所示. 显然, 误差随着 h 和 τ 的减小而减小, 且数值解分别以 $O(h^2)$, $O(\tau^2)$ 的收敛速度在 $H^1(\Omega)$ 空间中收敛于解析解, 这与理论结果一致. 图 5 呈现了节点间距 h 为 0.05 m , 时间步长 τ 为 0.01 s 时, 时间 $t = 0 \sim 90\text{ s}$ 时, 误差随时间 t 的变化情况, 说明误差受时间 t 的影响不大, 该方法的数值结果较好, 这证实了该方法的有效性.

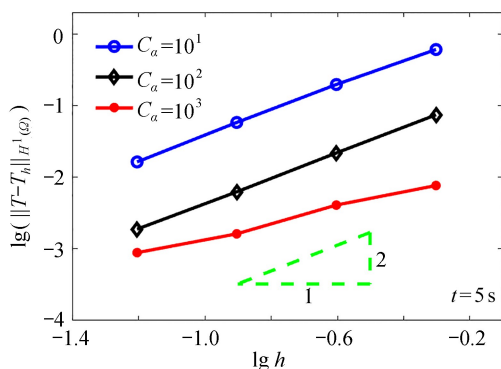
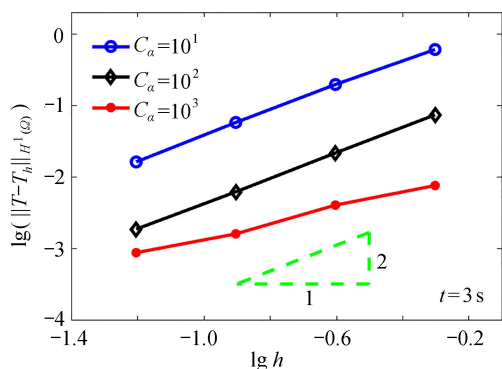


图 3 $t = 3\text{ s}$ 和 $t = 5\text{ s}$ 时, 变化的罚因子对收敛性的影响

Fig. 3 Convergence for variable penalty factors at $t = 3\text{ s}$ and $t = 5\text{ s}$

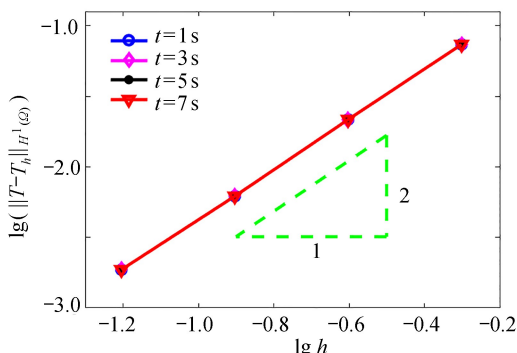
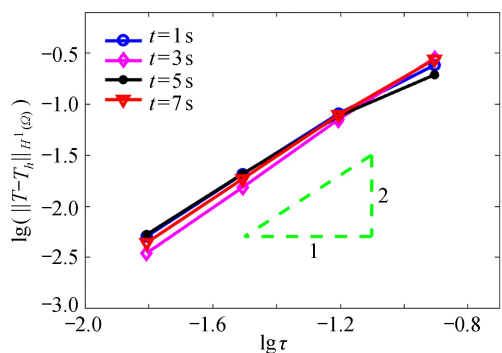


图 4 关于时间步长 τ 和节点间距 h 的误差和收敛性

Fig. 4 Errors and convergence with respect to time step τ and nodal spacing h

4.2 算例 2

在平方域 $\Omega = [0, 1]^2$ 中考虑热源参数 $p(t) = 1 + t^2$ 的二维热传导反问题^[23]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + p(t)T + \varphi(x, y, t), \quad 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq t \leq t_1,$$

其中材料密度 $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$, 比热容 $c = 10^3\text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$, 热传导系数 $k_1 = k_2 = 10^3\text{ W/(m}\cdot\text{°C)}$. 初始温度、

Dirichlet 边界条件和函数 $\varphi(x, y, t)$ 均满足解析解 $T(x, y, t) = \exp(-t) \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ 。

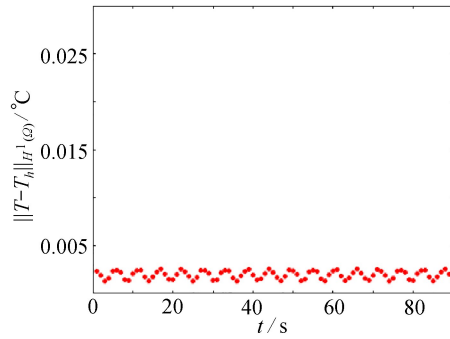


图5 误差随时间 t 的变化情况

Fig. 5 Variation of the error with time t

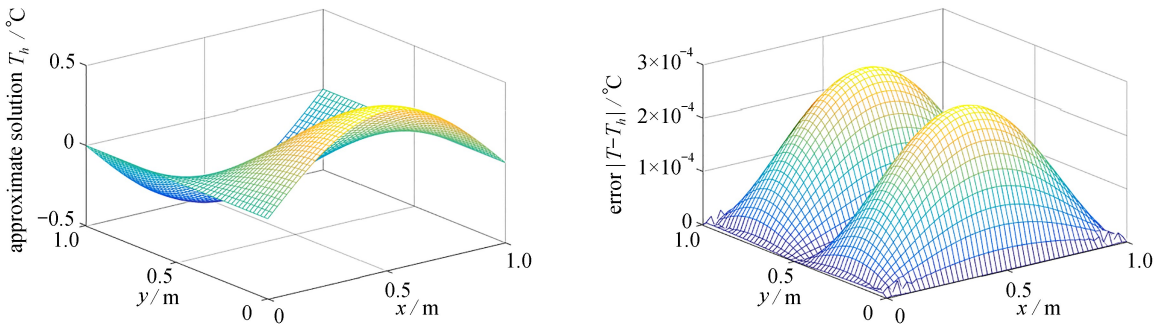


图6 算例2在 $t = 0.7$ s 时的温度和误差

Fig. 6 The numerical solution and the error at $t = 0.7$ s for example 2

表1 三种数值方法所得相对误差的比较

Table 1 The comparison of the relative errors obtained with 3 numerical methods

t/s	point	exact $T/°C$	CVMM $T_M/°C$	$(T - T_M /T)/\%$	CVRKP $T_k/°C$	$(T - T_k /T)/\%$	EFG $T_h/°C$	$(T - T_h /T)/\%$
0.1	A	0.904 8	0.907 2	0.265	0.924 2	2.144	0.904 8	0.000
	B	0.279 6	0.280 5	0.322	0.285 6	2.146	0.279 8	0.072
	C	-0.860 6	-0.859 0	0.186	-0.841 5	2.219	-0.860 9	0.035
0.3	A	0.740 8	0.742 5	0.229	0.757 3	2.227	0.740 8	0.000
	B	0.228 9	0.229 3	0.175	0.233 9	2.184	0.229 1	0.087
	C	-0.704 6	-0.702 8	0.255	-0.689 4	2.157	-0.704 9	0.043
0.5	A	0.606 5	0.607 6	0.182	0.621 0	2.391	0.606 5	0.000
	B	0.187 4	0.187 9	0.267	0.191 5	2.188	0.187 6	0.107
	C	-0.576 8	-0.575 7	0.191	-0.565 8	1.907	-0.577 2	0.069
0.7	A	0.496 6	0.498 1	0.302	0.513 1	3.323	0.496 5	0.020
	B	0.153 5	0.154 0	0.326	0.159 9	4.169	0.153 7	0.130
	C	-0.472 3	-0.470 1	0.466	-0.455 9	3.472	-0.472 6	0.064

给定时间步长 $\tau = 0.001$ s, 节点间距 $h = 0.02$ m, 采用 EFG 法求解该问题在 $t = 0.7$ s 时的温度及误差, 计算结果如图 6 所示, 数据显示解析解与数值解具有很好的一致性. 在平方域 Ω 中, 均匀设置 11×11 个节点, 给定时间步长 $\tau = 0.01$ s, 将点 A (0.5 m, 0 m), 点 B (0.5 m, 0.4 m) 和点 C (0.5 m, 0.9 m) 在 $t = 0.1$ s, 0.3 s, 0.5 s, 0.7 s 时的数值解和相对误差列在表 1, 同时将采用复变量无网格流形 (CVMM) 法^[23] 和复变量重构核粒子 (CVRKP) 法^[24] 的结果一同列入其中, 我们可以发现 EFG 法具有更高的计算精度, 明显优于另外两种方法.

4.3 算例 3

考虑尺寸为 L 的方形梯度材料板中的瞬态热传导问题^[25]. 该问题的初始温度为零, 导热系数 $k(x) = 5(1$

$+ 2x)^2$, 比热容 $c(x) = (1 + 2x)^2$ 均沿 x 方向呈二次梯度分布, 密度 ρ_0 为常数, 材料板左侧的温度保持为零, 右侧的温度设置为 $T_r H(t)$, 其中 $H(t)$ 为 Heaviside 阶跃函数, 材料板另外两侧都绝缘。

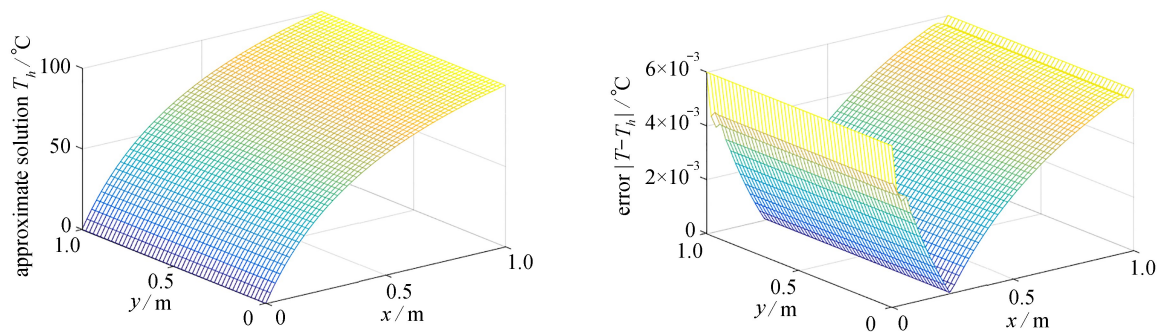


图 7 算例 3 在 $t = 0.7$ s 时的温度和误差

Fig. 7 The numerical solution and the error at $t = 0.7$ s for example 3

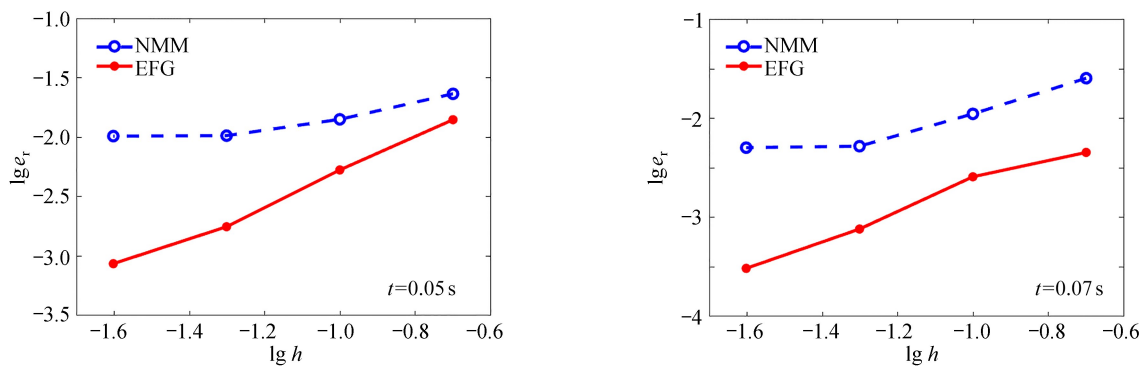


图 8 $t = 0.05$ s 和 $t = 0.07$ s 时, A 点基于 EFG 法和 NMM 的相对误差

Fig. 8 The relative errors of point A at $t = 0.05$ s and 0.07 s obtained with the EFG and the NMM

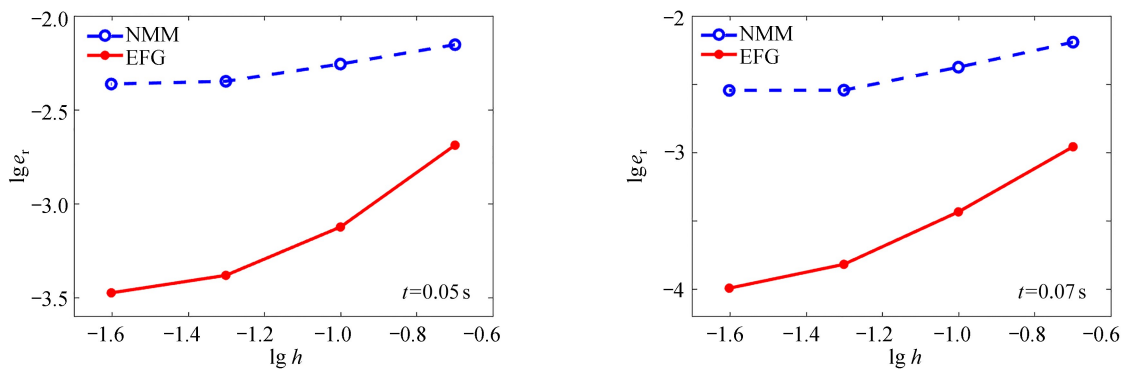


图 9 $t = 0.05$ s 和 $t = 0.07$ s 时, B 点基于 EFG 法和 NMM 的相对误差

Fig. 9 The relative errors of point B at $t = 0.05$ s and 0.07 s obtained with the EFG and the NMM

该问题的解析解是

$$T(x, t) = \frac{T_1 x}{\sqrt{k} L} + \frac{2T_1}{\sqrt{k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K t\right),$$

其中

$$K = \frac{k(x)}{\rho(x)c(x)}, T_1 = \sqrt{5}(1 + 2L)T_r.$$

图 7 展示了采用 EFG 法计算得到的数值解与误差, 结果表明数值解与解析解吻合较好。

为了研究节点间距 h 对误差的影响, 给定 $\tau = 0.001$ s, $L = 1.0$ m, $\rho_0 = 1.0$ kg/m³, $T_r = 100^\circ\text{C}$, 采用 EFG

法计算得到了不同时刻两个样本点 $A(0.3\text{ m}, 0.3\text{ m})$ 和 $B(0.6\text{ m}, 0.6\text{ m})$ 的模拟温度,并与文献[25]中的数据进行对比,如图8、图9所示.显然,EFG法比文献中的数值流形法(NMM)所产生的误差要小很多,并且,随着节点间距 h 的减小,误差也在减小,数值解更接近于精确解,这证实了本文方法的有效性和收敛性.

5 结 论

针对二维瞬态热传导混合边值问题,本文先用二阶 BDF 格式离散时间变量,然后给出了采用无 EFG 法求解的数值计算公式,并在 Sobolev 空间中详细推导了该方法的误差估计公式.理论误差分析表明,数值解的误差不仅与时间步长 τ 和节点间距 h 成正比,还与罚因子 α 有关,且 EFG 法在理论上得到了约 $O(\tau^2)$ 的时间收敛率和 $O(h^2)$ 的空间收敛率,三个数值算例验证了理论分析结果并证实了 EFG 法的有效性和收敛性.该方案的主要优点是数值解与解析解或已有的数值解有很好的—致性,具有较高的计算精度.

参考文献(References):

- [1] ZIENIUK E, SAWICKI D. Modification of the classical boundary integral equation for two-dimensional transient heat conduction with internal heat source, with the use of NURBS for boundary modeling[J]. *Journal of Heat Transfer*, 2017, **139**(8): 81-95.
- [2] BURLAYENKO V N, ALTENBACH H, SADOWSKI T, et al. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **45**(5): 422-438.
- [3] ANNAFIT A, GYEABOUR A A, AKAHO E H K, et al. Finite difference analysis of the transient temperature profile within GHARR-1 fuel element[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2014, **68**: 204-208.
- [4] GU Y, WANG L, CHEN W, et al. Application of the meshless generalized finite difference method to inverse heat source problems[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, **108**: 721-729.
- [5] CLARAC F, GOUSSARD F, TERESI L, et al. Do the ornamented osteoderms influence the heat conduction through the skin? A finite element analysis in Crocodylomorpha[J]. *Journal of Thermal Biology*, 2017, **69**: 39-53.
- [6] KHAJEHPOUR S, HEMATIYAN M R, MARIN L. A domain decomposition method for the stable analysis of inverse nonlinear transient heat conduction problems[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, **58**: 125-134.
- [7] CHEN J T, YUEH C Y, CHANG Y L, et al. Why dual boundary element method is necessary? [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2017, **76**: 59-68.
- [8] TADEU A, PRATA J, SIMES N. Dynamic simulation of three-dimensional heat conduction through cylindrical inclusions using a BEM model formulated in the frequency domain[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **261**: 397-407.
- [9] 周焕林, 严俊, 余波. 识别含热源瞬态热传导问题的热扩散系数[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(2): 160-169. (ZHOU Huanlin, YAN Jun, YU Bo. Identification of thermal diffusion coefficients for transient heat conduction problems with heat sources[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(2): 160-169. (in Chinese))
- [10] CHEN L, MA H P, CHENG Y M. Combining the complex variable reproducing kernel particle method and the finite element method for solving transient heat conduction problems[J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(5): 67-74.
- [11] 李煜冬, 王发杰, 陈文. 瞬态热传导的奇异边界法及其 MATLAB 实现[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(3): 259-268. (LI Yudong, WANG Fajie, CHEN Wen. MATLAB implementation of a singular boundary method for transient heat conduction[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(3): 259-268. (in Chinese))
- [12] ZHOU H M, ZHOU W H, QIN G, et al. Transient heat conduction analysis for distance-field-based irregular geometries using the meshless weighted least-square method[J]. *Numerical Heat Transfer Fundamentals*, 2017, **71**(5): 1-11.
- [13] CHEN L, LIEW K M. A local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation for solving transient

- heat conduction problems[J]. *Computational Mechanics*, 2011, **47**(4): 455-467.
- [14] LI X L, ZHANG S G, WANG Y, et al. Analysis and application of the element-free Galerkin method for nonlinear sine-Gordon and generalized sinh-Gordon equations[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2016, **71**(8): 1655-1678.
- [15] TANG Y Z, LI X L. Meshless analysis of an improved element-free Galerkin method for linear and nonlinear elliptic problems[J]. *Chinese Physics B*, 2017, **26**(3): 215-225.
- [16] ZHAO N, REN H P. The interpolating element-free Galerkin method for 2D transient heat conduction problems[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **15**(2): 181-198.
- [17] LI X L, LI S L. A meshless Galerkin method with moving least square approximations for infinite elastic solids [J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(8): 245-252.
- [18] YANG C X. Convergence of a linearized second-order BDF-FEM for nonlinear parabolic interface problems [J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2015, **70**(3): 265-281.
- [19] LI X L. Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free Galerkin method in n-dimensional spaces[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2016, **99**: 77-97.
- [20] LI X L, LI S L. On the stability of the moving least squares approximation and the element-free Galerkin method[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2016, **72**(6): 1515-1531.
- [21] ZHU T, ATLURI S N. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method[J]. *Computational Mechanics*, 1998, **21**(3): 211-222.
- [22] CUI M, XU B B, FENG W Z, et al. A radial integration boundary element method for solving transient heat conduction problems with heat sources and variable thermal conductivity[J]. *Numerical Heat Transfer Fundamentals*, 2018, **73**(1): 1-18.
- [23] GAO H F, WEI G F. Complex variable meshless manifold method for transient heat conduction problems[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2017, **9**(5): 1-20.
- [24] CHEN L, CHENG Y M. The complex variable reproducing kernel particle method for two-dimensional elastodynamics[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(9): 1-12.
- [25] ZHANG H H, HAN S Y, FAN L F, et al. The numerical manifold method for 2D transient heat conduction problems in functionally graded materials [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2018, **88**: 145-155.