

# 热环境中旋转功能梯度 纳米环板的振动分析\*

刘旭, 姚林泉

(苏州大学 轨道交通学院, 江苏 苏州 215131)

(本刊编委苟晓凡推荐)

**摘要:** 基于非局部弹性理论和 Kirchhoff 薄板理论,研究了旋转功能梯度纳米环板在热环境中的振动频率.首先,通过 Hamilton 原理,得到在温度变化和由旋转运动引起的面力作用下旋转功能梯度纳米环板的径向和横向耦合运动微分方程,并以此为依据得到了热环境下旋转功能梯度纳米环板的横向振动问题;接着,通过平面应力问题,得到在沿径向分布的离心惯性和温度应力作用下环板的轴对称中面内力;然后,通过微分求积法对变系数微分方程进行离散并求解;最后,通过数值计算结果分析内外径比、功能梯度参数、旋转速度、非局部参数以及温度对环板无量纲固有频率的影响关系.

**关键词:** 非局部理论; 功能梯度材料; 纳米环板; 微分求积法; 固有频率

**中图分类号:** O346

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.410090

## 引 言

近些年随着材料科学的快速发展,功能梯度材料(functionally graded material, FGM)和纳米材料在航空航天、医疗器械等众多领域已经得到广泛应用,有了很多研究成果.周平和沈纪莘等<sup>[1]</sup>基于 Levinson 三阶剪切变形理论,研究了功能梯度轴对称圆板的自由振动及屈曲特征值问题;李清禄和王文涛等<sup>[2]</sup>研究了变厚度功能梯度圆板在热环境中的自由振动问题;Mahinzare 等<sup>[3-4]</sup>讨论了不同因素对旋转功能梯度圆板的影响程度;唐光泽和姚林泉等<sup>[5]</sup>根据非局部理论和 Kelvin 黏弹性理论,针对黏弹性纳米杆自由振动和波传播的轴向动力学问题进行了研究;徐晓建和邓子辰<sup>[6]</sup>通过非局部理论和表面效应模型,得到了非局部因子和表面能与微纳米传感器振动特性的影响关系.

同时,环板作为一种常见而重要的基本结构,在现代工程和高科技领域处处可见,所以对其力学行为的分析也成为重要的研究方向,国内外学者对此进行了大量的研究.王铁军和马连生等<sup>[7]</sup>基于一阶剪切变形理论,研究了热-机载荷作用下功能梯度中厚圆/环板的轴对称

\* 收稿日期: 2020-03-30; 修订日期: 2020-10-20

基金项目: 国家自然科学基金(11572210)

作者简介: 刘旭(1995—),男,硕士生(E-mail: xliu1@stu.suda.edu.cn);

姚林泉(1961—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: lqyao@suda.edu.cn).

引用格式: 刘旭,姚林泉. 热环境中旋转功能梯度纳米环板的振动分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(11): 1224-1236.

弯曲;张莹和梅靖等<sup>[8]</sup>采用推广后的 England-Spencer 板理论,研究了功能梯度圆板和环板受周边力作用的三维弹性场;彭旭龙和李显方<sup>[9]</sup>对材料参数沿径向任意变化的功能梯度圆环进行了热弹性分析,得到了不同因素对圆环应力和位移变化的影响;Efraim 等<sup>[10]</sup>利用一阶剪切变形理论,讨论了功能梯度环板包括剪切变形效应在内的自由振动;Hosseini-Hashemi 等<sup>[11]</sup>采用微分求积法分析了径向功能梯度环板和环形扇形薄板在均匀面内载荷作用下,在弹性地基上的屈曲和自由振动行为.此外,也有大量文献针对环板的面内振动进行了研究<sup>[12-17]</sup>.

旋转类纳米环板在微纳米结构(如纳米马达轴上的圆盘)中具有实际应用,又由于使用环境会受到温度的影响,本文对旋转功能梯度纳米环板在热环境中的振动频率进行研究.基于非局部弹性理论和 Kirchhoff 薄板理论,通过 Hamilton 原理得到在温度变化和做旋转运动引起的面力作用下功能梯度纳米环板的径向和横向耦合运动微分方程;再通过平面应力问题,得到旋转功能梯度纳米环板的轴对称中面内力;然后通过微分求积法对得到的变系数微分方程进行离散并求解;最后,通过数值计算结果揭示各个因素对环板无量纲固有频率的影响程度.

## 1 力学模型以及基本方程

考虑内径为  $r_1$ , 外径为  $r_2$ , 厚度为  $h$ , 以速度  $\Omega$  做旋转运动的功能梯度纳米环板, 建立  $(r, \theta, z)$  极坐标系,  $(r, \theta)$  坐标面与几何中面重合, 如图 1 所示.

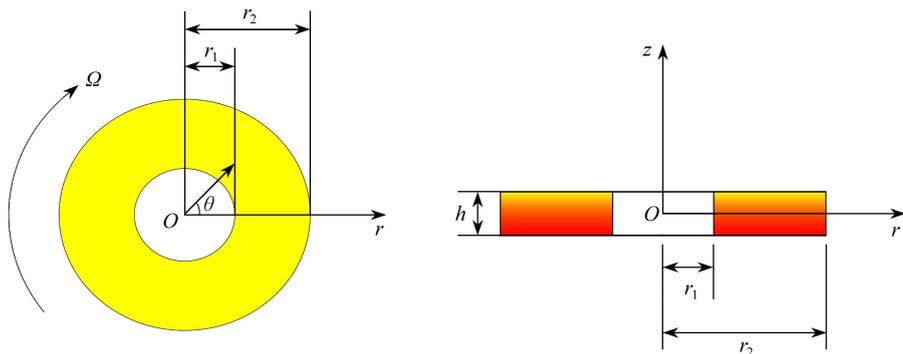


图 1 功能梯度纳米环板的物理模型

Fig. 1 The physical model for the functionally graded nano annular plate

### 1.1 材料属性分布规律

假设功能梯度纳米环板的主要材料性质(如弹性模量  $E$ 、质量密度  $\rho$ 、热膨胀系数  $\alpha$ )沿厚度方向按幂函数规律连续变化,同时各个参数是依赖于温度  $T$  的,即可表示为<sup>[2]</sup>

$$P(z, T) = [P_c(T) - P_m(T)] \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T), \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, \quad (1)$$

其中,  $k$  为材料的功能梯度参数,下标  $c$  表示上表面 ( $z = h/2$ ) 材料的属性,下标  $m$  表示下表面 ( $z = -h/2$ ) 材料的属性.考虑材料物理属性随温度的变化,可将其表示为

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3), \quad (2)$$

其中,  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  为与温度相关的系数,一般由实验直接给出.由于功能梯度环板的 Poisson 比随板厚和温度的变化不大,因此 Poisson 比  $\mu$  被看作常数.

### 1.2 非局部弹性理论

根据 Eringen 的非局部弹性理论,连续体内任意一点的应力取决于连续体内所有点处的

应变.在不计体力的情况下,对于轴对称环板结构,线弹性非局部结构的本构方程为<sup>[18-19]</sup>

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}', \quad (3)$$

式中,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  为 Laplace 算子,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_r \quad \sigma_\theta)$  和  $\boldsymbol{\sigma}' = (\sigma'_r \quad \sigma'_\theta)$  分别表示非局部应力和经典应力,  $e_0 a$  代表反应小尺度效应的非局部参数,  $e_0$  为纳米材料常数,  $a$  为纳米材料的内特征长度(如晶格常数、碳碳单键键长等).

### 1.3 控制方程

基于 Kirchhoff 板理论,功能梯度纳米环板的径向位移  $u$  和横向位移  $w$  可分别表示为<sup>[20]</sup>

$$u(r, z, t) = u_0(r, t) - z \frac{\partial w_0(r, t)}{\partial r}, \quad w(r, z, t) = w_0(r, t), \quad (4)$$

其中,  $u_0, w_0$  表示几何中面的径向和横向位移,  $t$  表示时间变量.

由式(4)可得功能梯度纳米环板的几何方程为

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{u_0}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r}. \quad (5)$$

根据物理方程及式(5),功能梯度纳米环板的经典径向应力和环向应力可分别表示为

$$\sigma'_r = \frac{E(z, T)}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta) = \frac{E(z, T)}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{u_0}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right], \quad (6)$$

$$\sigma'_\theta = \frac{E(z, T)}{1 - \mu^2} (\mu \varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \frac{E(z, T)}{1 - \mu^2} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \frac{u_0}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right]. \quad (7)$$

将式(6)和(7)沿板的厚度进行积分可分别得到薄膜力 ( $N'_r, N'_\theta$ ) 和弯矩 ( $M'_r, M'_\theta$ ):

$$\begin{aligned} (N'_r \quad M'_r)^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_r (1 - z)^T dz = \\ & \begin{bmatrix} A & -B \\ B & -D \end{bmatrix} \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} + \mu \frac{u_0}{r} \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (N'_\theta \quad M'_\theta)^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_\theta (1 - z)^T dz = \\ & \begin{bmatrix} A & -B \\ B & -D \end{bmatrix} \left( \mu \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} \quad \mu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^T, \end{aligned} \quad (9)$$

式中各个参数表达式为

$$(A \quad B \quad D) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z, T)}{1 - \mu^2} (1 - z - z^2) dz = D_m (a_1 \quad a_2 \quad a_3), \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} D_m = \frac{E_m h^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad a_1 = \frac{12(k + E_c/E_m)}{(1 + k)h^2}, \\ a_2 = \frac{6k(E_c/E_m - 1)}{(k + 1)(k + 2)h}, \quad a_3 = 1 + \frac{3(k^2 + k + 2)(E_c/E_m - 1)}{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}. \end{cases} \quad (11)$$

将式(8)和(9)代入非局部理论公式(3)中,可得

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] (N_r \quad N_\theta \quad M_r \quad M_\theta) = (N'_r \quad N'_\theta \quad M'_r \quad M'_\theta), \quad (12)$$

其中,  $N_r, N_\theta, M_r, M_\theta$  为非局部理论下的薄膜力和弯矩.

根据 Hamilton 原理,有

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (-U + T + W) dt = 0, \quad (13)$$

其中,内能的变分、动能的变分以及由温度变化和旋转运动引起的势能<sup>[3-4]</sup>变分分别为

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_V (\sigma'_r \delta \varepsilon_r + \sigma'_\theta \delta \varepsilon_\theta) dV = \\ & 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[ \left( -\frac{\partial^2 (rM'_r)}{\partial r^2} + \frac{\partial M'_\theta}{\partial r} \right) \delta w_0 + \left( N'_\theta - \frac{\partial (rN'_r)}{\partial r} \right) \delta u_0 \right] dr, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta T = 2\pi \rho_m a_4 h \int_{r_1}^{r_2} r \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) dr, \quad (15)$$

$$\delta W = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left( rN^{\text{RT}} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \delta w_0 dr, \quad (16)$$

其中,  $a_4 = (k + \rho_c / \rho_m) / (1 + k)$ ,  $N^{\text{RT}} = N^{\text{R}} + N^{\text{T}}$ ,  $N^{\text{R}}$  和  $N^{\text{T}}$  分别为由旋转运动引起的径向拉压力和由温度变化产生的热内力。

由于径向频率比横向频率要低得多,因此忽略径向振动的惯性力,将式(14)~(16)代入式(13)可得旋转功能梯度纳米环板在经典力学下的控制方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rN'_r)}{\partial r} - \frac{N'_\theta}{r} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rM'_r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M'_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rN^{\text{RT}} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) - \rho_m a_4 h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

将式(12)代入方程(17)、(18)中并消去径向位移可得热环境中旋转功能梯度纳米环板非局部理论下的控制方程为

$$\begin{aligned} & \left( D - \frac{B^2}{A} \right) \nabla^2 \nabla^2 w_0 - [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rN^{\text{RT}} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \\ & [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \rho_m a_4 h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

式(16)中的热内力  $N^{\text{T}}$  为<sup>[4]</sup>

$$N^{\text{T}} = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z, T)}{1 - \mu} \alpha(z, T) \Delta T dz, \quad (20)$$

其中,  $\alpha(z, T)$  为热膨胀系数,  $\Delta T$  为温度差.为了后面的无量纲化,在此设  $\Delta T / (1 \text{ K})$  为无量纲温差,  $\alpha \times (1 \text{ K})$  为无量纲线膨胀系数.实质上,  $\alpha \Delta T$  为温差引起的线膨胀率不会改变.数值计算中仍用  $\Delta T$  和  $\alpha(z, T)$  表示无量纲化的温差和热膨胀系数.

由旋转运动引起的径向拉压力  $N^{\text{R}}$  可通过弹性力学的平面应力问题进行求解.对于环板,考虑环板中某一层薄板平面的弹性模量为  $E$ , 密度为  $\rho$ , 径向位移为  $u_r$ , 根据平面应力问题,由径向的平衡微分方程、物理方程、几何方程可得应力  $\sigma_r^{\text{R}}$  和径向位移  $u_r$  的表达式为<sup>[21]</sup>

$$\sigma_r^{\text{R}} = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \rho \Omega^2 r^2, \quad (21)$$

$$u_r = \frac{r}{E} \left[ (1 - \mu) A - (1 + \mu) \frac{B}{r^2} + \frac{\mu^2 - 1}{8} \rho \Omega^2 r^2 \right], \quad (22)$$

式中,  $A, B$  为积分常数, 根据边界条件来确定. 当环板内外边界为不可移筒支或固支时, 此时的边界条件为  $u_r|_{r=r_1, r_2} = 0$ , 则依据式(21)和(22)可得到

$$N^R = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r^R dz = \rho_m h a_4 \frac{\Omega^2}{8} \left[ (1 + \mu)(r_1^2 + r_2^2) + (1 - \mu) \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - (3 + \mu)r^2 \right]; \quad (23)$$

当边界条件为内径固支、外径自由时, 边界条件为  $u_r|_{r=r_1} = 0, \sigma_r|_{r=r_2} = 0$ , 此时有

$$N^R = \rho_m h a_4 \frac{\Omega^2}{8} \left\{ (3 + \mu) + \frac{(1 - \mu)[(3 + \mu)r_2^2 - (1 + \mu)r_1^2]}{(1 - \mu)r_1^2 + (1 + \mu)r_2^2} \frac{r_1^2}{r^2} \right\} (r_2^2 - r^2). \quad (24)$$

#### 1.4 无量纲控制方程

引入以下无量纲量:

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{w_0}{h}, \bar{r} = \frac{r}{r_2}, s = \frac{r_1}{r_2}, \delta = \frac{h}{r_2}, \tau = \frac{e_0 a}{r_2}, \\ \bar{t} = \frac{t}{r_2^2} \sqrt{\frac{D_m}{\rho_m h}}, \bar{\Omega}^2 = \frac{\rho_m h r_2^4}{D_m} \Omega^2, \bar{N}^{RT} = \frac{N^{RT} r_2^2}{D_m}, \end{cases} \quad (25)$$

则由方程(19)可得到无量纲控制方程为

$$(a_3 - a_2^2/a_1) \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} - (1 - \tau^2 \bar{\nabla}^2) \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \bar{N}^{RT} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} \right) + (1 - \tau^2 \bar{\nabla}^2) a_4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = 0, \quad (26)$$

其中,  $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$  为无量纲 Laplace 算子.

对于无量纲控制方程(26), 设

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = W(\bar{r}) e^{j\omega \bar{t}}, \quad (27)$$

其中,  $W(\bar{r})$  为振动模态函数,  $\omega$  为无量纲振动频率. 将式(27)代入无量纲控制方程(26)中, 可得

$$\begin{aligned} (a_3 - a_2^2/a_1) \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 W - (1 - \tau^2 \bar{\nabla}^2) \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \bar{N}^{RT} \frac{dW}{d\bar{r}} \right) - \\ a_4 \omega^2 (1 - \tau^2 \bar{\nabla}^2) W = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

对于控制方程(28), 由于纳米非局部参数  $\tau$  及旋转和温度变化引起的无量纲轴力  $\bar{N}^{RT}(\bar{r})$  的函数的存在, 使得对该高阶变系数微分方程的求解变得更为困难. 本文采用微分求积法 (differential quadrature method, DQM) 进行离散并求解. DQM 是将函数在求解区域内的每个点处的导数值用全部区域内若干个节点上的函数值的加权线性和来近似表示. 利用 DQM 可以将微分方程及边界条件转变为用节点处函数值表示的一组代数方程. 根据线性代数理论, 系数行列式等于零是方程组有非零解的充分必要条件, 故可得广义特征方程, 从而求出特征值. 离散方案可参考文献[22].

## 2 数值计算与分析

首先, 为了验证上述方法的有效性, 计算无旋转均匀纳米环板自由振动问题. 计算了取不同非局部参数时, 内外边固支(C-C)和内边固支、外边不可移筒支(C-S)这两种边界条件下的一阶无量纲固有频率, 并与文献[23]用辛方法得到的结果进行对比(如表1所示), 数值结果十分接近, 计算中取节点数  $N = 18$ . 验证了本文的数值方法和计算结果在这种情况下是正确的.

表 1 两种边界条件下功能梯度纳米环板一阶固有频率与已有结果的比较 ( $s = 0.2$ )Table 1 Comparison of the 1st-order dimensionless natural frequencies of FGM nano annular plates ( $s = 0.2$ )

boundary		$\tau$				
		0	0.05	0.1	0.15	0.2
C-C	the present	34.609 21	33.836 95	31.789 92	29.058 78	26.183 9
	ref. [23]	34.609 25	33.837 008	31.789 97	29.058 82	26.184
C-S	the present	22.714 09	22.231 8	20.950 03	19.223 61	17.387 90
	ref. [23]	22.714 43	22.233 08	20.950 34	19.223 93	17.388 2

下面分析不同参数对频率的影响.对于旋转功能梯度纳米环板的横向振动,讨论 C-C、C-S、内外不可移简支(S-S)和内边固支、外边自由(C-F)这四种边界条件下功能梯度纳米环板的频率特性,讨论内外径比、旋转速度、功能梯度参数、非局部参数和温度变化对无量纲固有频率的影响.考虑厚度  $h$  为 1 nm,外半径  $r_2$  为 50 nm 的环板,上表面材料为陶瓷材料( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ),密度  $\rho_c = 2\,707\text{ kg/m}^3$ ,下表面材料为金属(SUS304),密度  $\rho_m = 3\,800\text{ kg/m}^3$ ,设初始环境温度  $T_0 = 300\text{ K}$ .在此温度下环板无初始应力和变形,弹性模量和热膨胀系数随环境温度的变化而变化,具体温度相关系数见表 2.Poisson 比由于变化不大,故设为 0.3 不变.

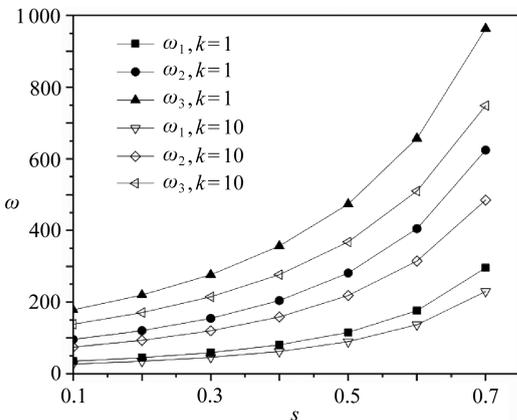
表 2 陶瓷和金属材料的温度相关系数

Table 2 Temperature-dependent coefficients of ceramic and metal materials

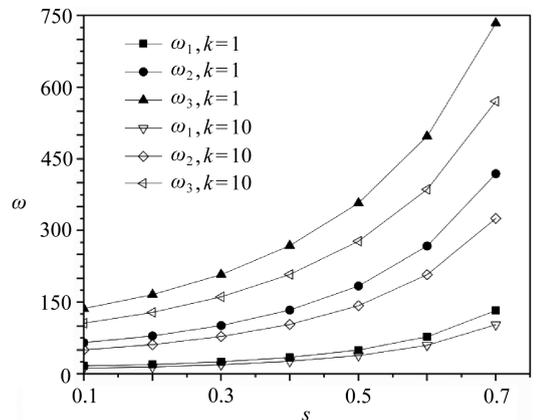
	material	$P_{-1}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$E_c / \text{Pa}$	$\text{Si}_3\text{N}_4$	0	$348.43 \times 10^9$	$-3.070 \times 10^{-4}$	$2.160 \times 10^{-7}$	$-8.946 \times 10^{-11}$
$E_m / \text{Pa}$	SUS304	0	$201.04 \times 10^9$	$3.079 \times 10^{-4}$	$-6.534 \times 10^{-7}$	0
$\alpha_c / \text{K}^{-1}$	$\text{Si}_3\text{N}_4$	0	$5.872\,3 \times 10^{-6}$	$9.095 \times 10^{-4}$	0	0
$\alpha_m / \text{K}^{-1}$	SUS304	0	$12.330 \times 10^{-6}$	$8.086 \times 10^{-4}$	0	0

### 1) 内外径比对固有频率的影响

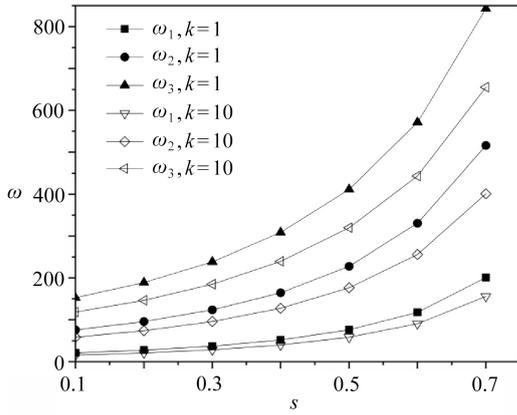
图 2 给出了功能梯度参数  $k$  分别取 1 和 10,非局部参数为  $\tau = 0.05$ , 旋转速度  $\bar{\Omega} = 5$ , 温度变化  $\Delta T = 10$  时,在 C-C、S-S、C-S 和 C-F 四种边界条件下,内外径比对前三阶无量纲固有频率的影响.由图 2 可以得到,无量纲固有频率随内外径比的增加而增加,且内外径比越大,对无量纲固有频率的影响越大.



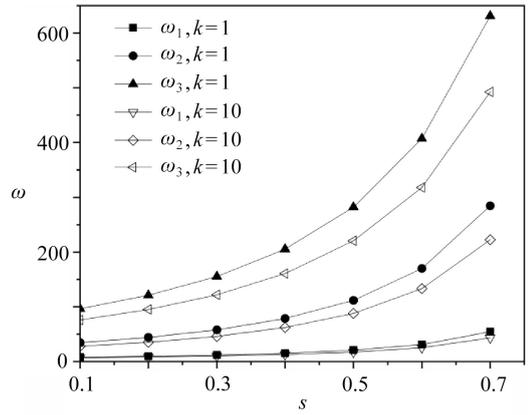
(a) C-C



(b) S-S



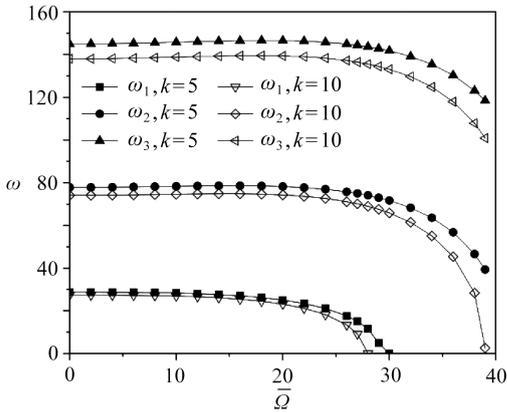
(c) C-S



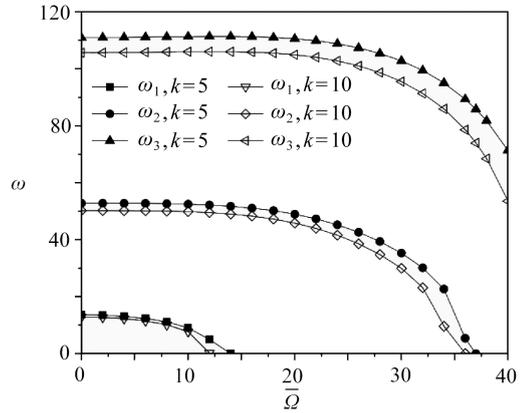
(d) C-F

图2 四种边界条件下内外径比与无量纲固有频率的关系

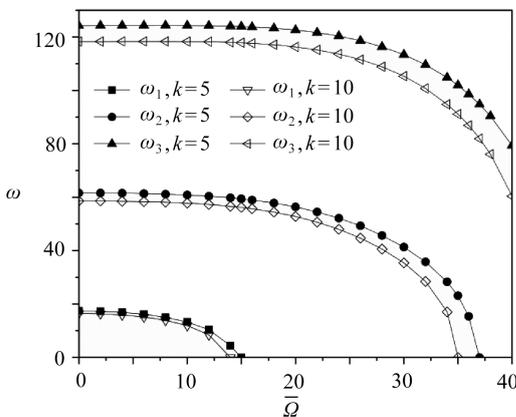
Fig. 2 The relationships between the ratio of the inner diameter to the outer diameter and the dimensionless natural frequency under 4 boundary conditions



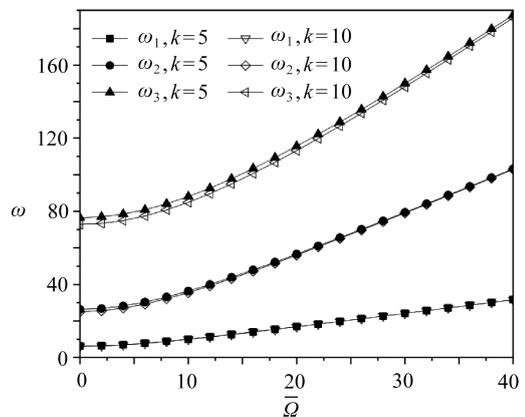
(a) C-C



(b) S-S



(c) C-S



(d) C-F

图3 四种边界条件下旋转速度与无量纲固有频率的关系

Fig. 3 The relationships between the rotational speed and the dimensionless natural frequency under 4 boundary conditions

## 2) 旋转速度对固有频率的影响

图3给出了在功能梯度参数 $k$ 分别取5和10,非局部参数为 $\tau = 0.05$ ,内外径比 $s = 0.1$ ,温度变化 $\Delta T = 10$ 时,在C-C、S-S、C-S和C-F四种边界条件下,旋转速度对环板前三阶无量纲固有频率的影响.由图3可得,当边界条件为C-C、S-S和C-S时,一阶无量纲固有频率随旋转速度的增大而减小,当达到了一阶临界速度时,一阶无量纲固有频率减小为0,环板的一阶模态将会出现失稳现象<sup>[24]</sup>;当旋转速度较小时,其对二、三阶无量纲固有频率的影响较小;当旋转速度增大时,二、三阶无量纲固有频率随旋转速度的增大而减小;当达到二阶临界速度时,二阶无量纲固有频率为0,环板的二阶模态将会出现失稳现象<sup>[24]</sup>.当边界条件为C-F时,前三阶无量纲固有频率随旋转速度的增大而增大,且影响较大.

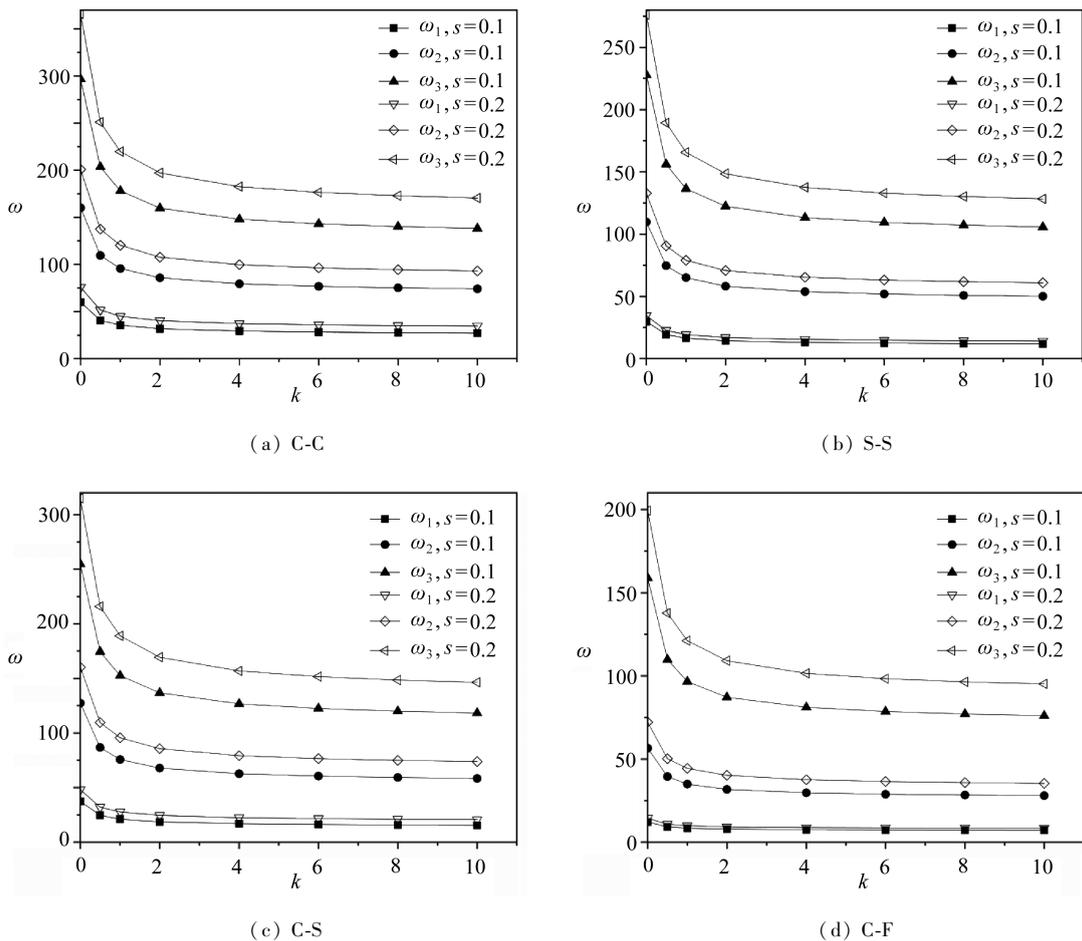


图4 四种边界条件下功能梯度参数与无量纲固有频率的关系

Fig. 4 The relationships between the functionally gradient parameters and the dimensionless natural frequency under 4 boundary conditions

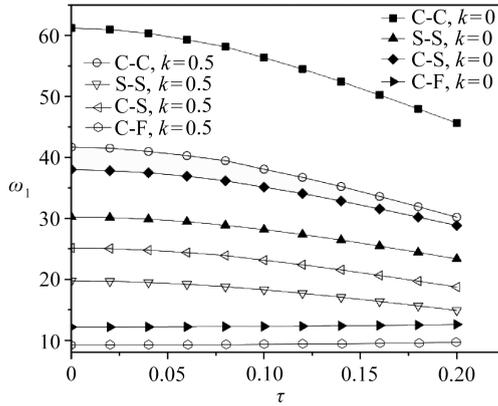
## 3) 功能梯度参数对固有频率的影响

图4给出了在内外径比 $s$ 分别取0.1和0.2,非局部参数为 $\tau = 0.05$ ,旋转速度 $\bar{\Omega} = 5$ ,温度变化 $\Delta T = 10$ 时,在C-C、S-S、C-S和C-F四种边界条件下,功能梯度参数 $k$ 对环板前三阶无量纲固有频率的影响.由图4可得,在这四种边界条件下,无量纲固有频率都随着功能梯度参数 $k$ 的增大先迅速减小,而后缓慢减小,最后收敛为定值,说明在功能梯度参数 $k$ 增大时,功能梯度

纳米环板的刚度减小。

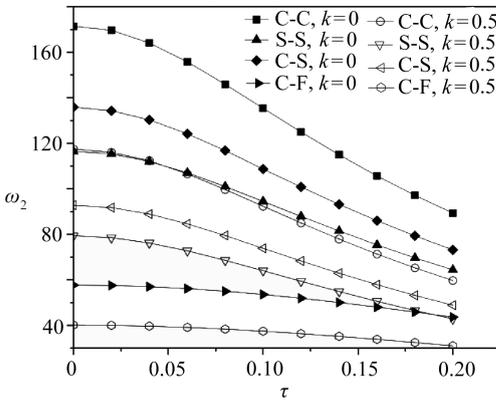
#### 4) 非局部参数对固有频率的影响

图 5 给出了在功能梯度参数  $k$  分别取 0 和 0.5, 旋转速度  $\bar{\Omega} = 5$ , 内外径比  $s = 0.1$ , 温度变化  $\Delta T = 10$  时, 在 C-C、S-S、C-S 和 C-F 四种边界条件下, 非局部参数  $\tau$  对环板前三阶无量纲固有频率的影响。由图 5 可得, 当边界条件为 C-C、S-S 和 C-S 时, 功能梯度环板的无量纲固有频率随着非局部参数的增加而减小; 当边界条件为 C-F 时, 环板的一阶无量纲固有频率随着非局部参数的增加变化很小, 而二、三阶无量纲固有频率随着非局部参数的增加而减小。



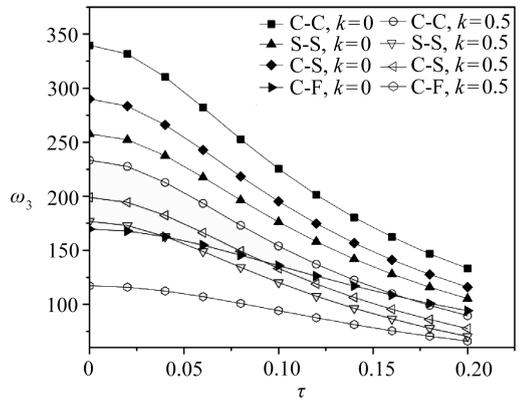
(a) 一阶无量纲固有频率

(a) The 1st-order dimensionless natural frequency



(b) 二阶无量纲固有频率

(b) The 2nd-order dimensionless natural frequency



(c) 三阶无量纲固有频率

(c) The 3rd-order dimensionless natural frequency

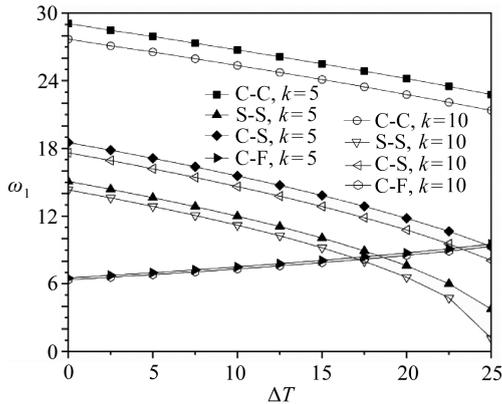
图 5 四种边界条件下非局部参数与无量纲固有频率的关系

Fig. 5 The relationships between the nonlocal parameters and the dimensionless natural frequencies under 4 boundary conditions

#### 5) 温度变化对固有频率的影响

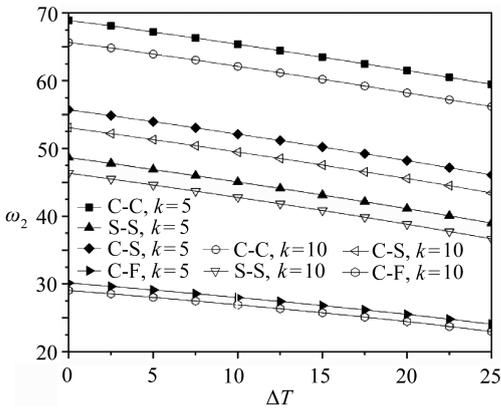
图 6 给出了在功能梯度参数  $k$  分别取 5 和 10, 旋转速度  $\bar{\Omega} = 5$ , 内外径比  $s = 0.1$ , 非局部参数  $\tau = 0.1$  时, 在 C-C、S-S、C-S 和 C-F 四种边界条件下, 温度变化  $\Delta T$  对环板前三阶无量纲固有频率的影响。由图 6 可得, 当边界条件为 C-C、S-S 和 C-S 时, 这三种边界条件下无量纲固有频

率都随着温度的升高而减小;当边界条件为 C-F 时,环板的一阶无量纲固有频率随温度的升高而增大,二、三阶无量纲固有频率随温度的升高而减小。



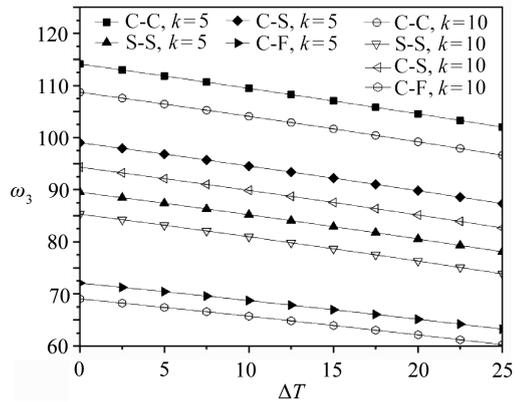
(a) 一阶无量纲固有频率

(a) The 1st-order dimensionless natural frequency



(b) 二阶无量纲固有频率

(b) The 2nd-order dimensionless natural frequency



(c) 三阶无量纲固有频率

(c) The 3rd-order dimensionless natural frequency

图 6 四种边界条件下温度变化与无量纲固有频率的关系

Fig. 6 The relationships between the temperature change and the dimensionless natural frequency under 4 boundary conditions

### 3 结 论

本文基于 Kirchhoff 板理论和非局部弹性理论,假设材料属性沿厚度方向按幂函数规律连续变化,研究了热环境中做匀速旋转运动的功能梯度纳米环板的横向振动,应用 Hamilton 原理导出控制方程,采用微分求积法对控制方程进行离散并求解得到四种边界条件下功能梯度纳米环板的固有频率.研究表明,功能梯度纳米环板的频率不仅与边界条件和板的内外径比有关,而且与功能梯度参数、非局部参数、转速和温度有关.特别地,当内边固支外边自由时,频率随这些参数的变化关系与其他边界条件的频率显示出不同的变化趋势.例如,对于内外边同时固支或简支边界时,环板前三阶无量纲固有频率随旋转速度的增大而减小,而对于内边固支外边自由边界,环板前三阶无量纲固有频率随旋转速度的增大而增大,且旋转速度越大对固

有频率的影响越明显;对于内外边同时固支或简支边界时,温度的升高会降低环板一阶无量纲固有频率,而内边固支外边自由时,温度的升高反而会增加环板的一阶无量纲固有频率.这是由于在边界自由与有约束条件下,由转速和温度变化引起的面内内力完全不同造成的.

### 参考文献 (References):

- [1] 周平, 沈纪苹, 姚林泉, 等. 基于 Levinson 三阶剪切理论的功能梯度轴对称圆板特征值问题求解[J]. 力学季刊, 2017, **38**(2): 215-230.(ZHOU Ping, SHEN Jiping, YAO Linquan, et al. On the eigenvalue problems of functionally graded axisymmetric circular plate based on Levinson plate theory[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2017, **38**(2): 215-230.(in Chinese))
- [2] 李清禄, 王文涛, 杨静宁. 材料属性温度相关变厚度 FGM 圆板自由振动 DQM 求解[J]. 振动与冲击, 2018, **37**(10): 218-224.(LI Qinglu, WANG Wentao, YANG Jingning. Free vibration of FGM variable thickness circular plates with temperature-dependent material properties by the DQM method in thermal environment[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, **37**(10): 218-224.(in Chinese))
- [3] MAHINZARE M, ALIPOUR M J, SAKKAK S A S, et al. A nonlocal strain gradient theory for dynamic modeling of a rotary thermo piezo electrically actuated nano FG circular plate[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, **115**: 323-337.
- [4] SHOJAEFARD M H, GOOGARCHIN H S, GHADIRI M, et al. Micro temperature-dependent FG porous plate: free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **50**: 633-655.
- [5] 唐光泽, 姚林泉, 李成, 等. 基于非局部理论的黏弹性纳米杆轴向振动与波传播研究[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(1): 36-46.(TANG Guangze, YAO Linquan, LI Cheng, et al. Longitudinal vibration and wave propagation of viscoelastic nanorods based on the nonlocal theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 36-46.(in Chinese))
- [6] 徐晓建, 邓子辰. 非局部因子和表面效应对微纳米材料振动特性的影响[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(1): 14-21.(XU Xiaojian, DENG Zichen. Surface effects of adsorption-induced resonance analysis of micro/nanobeams via nonlocal elasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(1): 14-21.(in Chinese))
- [7] 王铁军, 马连生, 石朝锋. 功能梯度中厚圆/环板轴对称弯曲问题的解析解[J]. 力学学报, 2004, **36**(3): 348-353.(WANG Tiejun, MA Liansheng, SHI Chaofeng. Analytical solutions for axisymmetric bending of functionally graded circular/annular plates[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **36**(3): 348-353.(in Chinese))
- [8] 张莹, 梅靖, 陈鼎, 等. 功能梯度圆板和环板受周边力作用的弹性力学解[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(5): 538-547.(ZHANG Ying, MEI Jing, CHEN Ding, et al. Elasticity solutions for functionally graded circular and annular plates subjected to boundary forces and moments[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 538-547.(in Chinese))
- [9] 彭旭龙, 李显方. 任意梯度分布功能梯度圆环的热弹性分析[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(10): 5-12.(PENG Xulong, LI Xianfang. Thermoelastic analysis of a functionally graded annulus with an arbitrary gradient[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(10): 5-12.(in Chinese))
- [10] EFRAIM E, EISENBERGER M. Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **299**(4/5): 720-738.

- [11] HOSSEINI-HASHEMI S, AKHAVAN H, TAHER H R D, et al. Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation[J]. *Materials & Design*, 2010, **31**(4): 1871-1880.
- [12] 胡统号, 沈纪莘, 姚林泉. 弹性边界径向功能梯度压电环板面内振动[J]. 振动与冲击, 2018, **37**(8): 225-237.(HU Tonghao, SHEN Jiping, YAO Linqun. In-plane vibration of radial functional graded piezoelectric annular plates with elastic boundary[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, **37**(8): 225-237.(in Chinese))
- [13] 吕朋, 杜敬涛, 邢雪, 等. 热环境下弹性边界约束 FGM 圆环板面内振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2017, **30**(5): 713-723.(LÜ Peng, DU Jingtao, XING Xue, et al. Study on in-plane vibration characteristics of elastically restrained FGM annular panel in thermal environment[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2017, **30**(5): 713-723.(in Chinese))
- [14] WANG Q, SHI D, LIANG Q, et al. A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, **40**(21/22): 9228-9253.
- [15] LYU P, DU J, LIU Z, et al. Free in-plane vibration analysis of elastically restrained annular panels made of functionally graded material[J]. *Composite Structures*, 2017, **178**: 246-259.
- [16] SHI X J, SHI D Y, QIN Z R, et al. In-plane vibration analysis of annular plates with arbitrary boundary conditions[J]. *The Scientific World Journal*, 2014, **2014**: 1-10.
- [17] BASHMAL S, BHAT R, RAKHEJA S. In-plane free vibration of circular annular disks[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **322**(1/2): 216-226.
- [18] ERINGEN A C, EDELEN D G B. On nonlocal elasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972, **10**(3): 233-248.
- [19] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, **54**(9): 4703-4710.
- [20] 马连生, 赵永刚. 功能梯度材料圆(环)板的屈曲分析[J]. 甘肃工业大学学报, 2003, **29**(4): 140-143.(MA Liansheng, ZHAO Yonggang. Buckling analysis of annular functionally-graded plates[J]. *Journal of Gansu University of Technology*, 2003, **29**(4): 140-143.(in Chinese))
- [21] BAUER H F, EIDEL W. Transverse vibration and stability of spinning circular plates of constant thickness and different boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **300**(3/5): 877-895.
- [22] BERT C W, MALIK M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(1): 1-28.
- [23] 杨昌玉. 非局部理论下纳米结构动力行为的辛方法[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2016.(YANG Changyu. The symplectic method on dynamic behaviors of nanostructures using the nonlocal theory[D]. PhD Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2016.(in Chinese))
- [24] 王忠民, 王昭, 张荣, 等. 基于微分求积法分析旋转圆板的横向振动[J]. 振动与冲击, 2014, **33**(1): 125-129.(WANG Zhongmin, WANG Zhao, ZHANG Rong, et al. Transverse vibration analysis of spinning circular plate based on differential quadrature method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(1): 125-129.(in Chinese))

# Vibration Analysis of Rotating Functionally Gradient Nano Annular Plates in Thermal Environment

LIU Xu, YAO Linquan

(*School of Rail Transportation, Soochow University,  
Suzhou, Jiangsu 215131, P.R.China*)

(Recommended by GOU Xiaofan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on the nonlocal elasticity theory and the Kirchhoff thin plate theory, the vibration frequencies of rotating FGM nano annular plates in thermal environment were studied. Firstly, the differential equations for coupled radial and transverse motions of the rotating FGM nano annular plate under temperature changes and surface forces caused by rotating motions were obtained with the Hamiltonian principle, in turn, the transverse vibration of the plate was solved. Then, with the plane stress method, the axially symmetrical midplane internal forces of the annular plate under the action of centrifugal inertia force and the temperature stress distributed along the radial direction were obtained. After this, the differential equation with variable coefficients was solved with the differential quadrature method. Finally, through numerical simulations, the effects of the inner-outer diameter ratio, the functionally gradient parameters, the rotation speed, the nonlocal parameters and the temperature on the dimensionless natural frequencies of the annular plate were analyzed.

**Key words:** nonlocal theory; functionally graded material; nano annular plate; differential quadrature method; natural frequency

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11572210)