具结构阻尼的耦合梁方程组在非线性边界条件下的吸引子*

张 婷， 张建文

（太原理工大学 数学系，太原 030024）

摘要： 研究了具有转动惯量和结构阻尼的耦合梁方程组在非线性边界条件下的吸引子.首先通过 Faedo-Galerkin 方法证明了整体解的存在唯一性,其次证明了系统存在有界吸收集和半群的渐近光滑性,最后得到了全局吸引子的存在.

关 键 词： 耦合梁； 非线性边界条件； 整体解； 全局吸引子

中图分类号： O175.35 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.410089

Attractors of Coupled Beam Equations With Structural Damping Under Nonlinear Boundary Conditions

ZHANG Ting， ZHANG Jianwen

（*College of Mathematics*, *Taiyuan University of Technology*, *Taiyuan* 030024, *P.R.China*）

Abstract: Attractors of the system of coupled beam equations with rotational inertia and structural damping under nonlinear boundary conditions were studied. Firstly, the existence and uniqueness of the global solution were proved by means of the Faedo-Galerkin method. Secondly, the existence of the bounded absorbing set in the system and the asymptotic smoothness of the related solution semigroup were also proved. Finally, the existence of the global attractor was given.

Key words: coupled beam; nonlinear boundary condition; global solution; global attractor

引 言

关于梁方程全局吸引子的存在性问题已有很多研究[1-9],如 Ma 等[9]研究了轴向力作用下弹性梁方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}-M(\|u_x\|_2^2)u_{xx}=h(x),\qquad (x,t)\in(0,L)\times\mathbb{R}_+ \tag{1}$$

在非线性边界条件

$$\begin{cases}u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(L,t)=0,\\ u_{xxx}(L,t)-M(\|u_x\|_2^2)u_x(L,t)=f(u(L,t))+g(u_t(L,t))\end{cases} \tag{2}$$

下解的长时间动力学行为.

* **收稿日期：** 2020-03-20； **修订日期：** 2020-05-07

基金项目： 国家自然科学基金（11872264）

作者简介： 张婷（1993—）,女,硕士生（E-mail：1391324265@qq.com）；
张建文（1962—）,男,教授,博士（通讯作者. E-mail：1489088560@qq.com）.

引用格式： 张婷, 张建文. 具结构阻尼的耦合梁方程组在非线性边界条件下的吸引子[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1)：102-112.

Wang 等[10]研究了含有转动惯量与结构阻尼项的梁方程

$$u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \sigma\left(\int_0^L (u_x)^2 \mathrm{d}x\right) u_{xx} - \phi\left(\int_0^L (u_x)^2 \mathrm{d}x\right) u_{xxt} = q(x), \qquad (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}_+ \tag{3}$$

在非线性边界条件

$$\begin{cases} u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \\ u_{xxx}(L,t) = f(u(L,t)) + g(u_t(L,t)) \end{cases} \tag{4}$$

下解的存在唯一性和整体吸引子的存在性.

对于力学中梁结构所确定的无穷维动力系统的研究,很多学者讨论的都是假设梁在对称平面内的弯曲振动,如果不是这种情况,通常梁的弯曲振动将会与扭转振动结合起来[11-12].因此本文在前人的基础上[13-14],探究如下含有结构阻尼的弯曲与扭转耦合的梁方程组:

$$\begin{cases} u_{tt} + cv_{tt} + \alpha u_{xxxx} - u_{xxtt} - M\left(\int_0^l (u_x)^2 \mathrm{d}x\right) u_{xx} - N\left(\int_0^l (u_x)^2 \mathrm{d}x\right) u_{xxt} = p(x), \\ cu_{tt} + \gamma v_{tt} + \eta_1 v_t + \delta v_{xxxx} - \beta_0 v_{xx} = q(x), \end{cases} \tag{5}$$

其中 u_{xxtt} 表示转动惯量项,非线性项 $M\left(\int_0^l (u_x)^2 \mathrm{d}x\right) u_{xx}$ 是梁受到轴向力作用的结果,非线性项 $N\left(\int_0^l (u_x)^2 \mathrm{d}x\right) u_{xxt}$ 是表示结构阻尼的一个耗散项,$p(x)$,$q(x)$ 都是静载荷向量.方程中的系数 $c,\eta_1,\alpha,\gamma,\delta,\beta_0$ 为常数,且 $c^2 < \gamma$,$(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+$.下面考虑在非线性边界条件

$$\begin{cases} u(0,t) = u_x(l,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \\ u_{xxx}(l,t) = f_1(u(l,t)) + g_1(u_t(l,t)), \\ v(0,t) = v_x(l,t) = v_{xx}(0,t) = 0, \\ v_{xxx}(l,t) = f_2(v(l,t)) + g_2(v_t(l,t)) \end{cases} \tag{6}$$

和初始条件

$$u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x),\ v(x,0) = v^0(x),\ v_t(x,0) = v^1(x) \tag{7}$$

下的全局吸引子.

1　空间和函数假设

1.1　空间假设

假设梁方程组定义在一维空间,设 $\Omega = (0,l)$,本文分析基于如下 Sobolev 空间:

$$U = \{u \in H^1(0,l) \mid u(0) = 0\},$$
$$V = \{u \in H^2(0,l) \mid u(0) = u_x(l) = 0\},$$
$$W = \{u \in V \cap H^4(0,l) \mid u_{xx}(0) = 0\}.$$

设空间 $H_1 = W \times W \times W \times W$,由边界条件(6)可知初始条件满足下式:

$$u^0_{xxx}(l) = f_1(u^0(l)) + g_1(u^1(l)),\ v^0_{xxx}(l) = f_2(v^0(l)) + g_2(v^1(l)). \tag{8}$$

设空间 $H_0 = V \times U \times V \times U = \bar{H}_1$,在 H_0 定义如下范数:

$$\|(u,u_t,v,v_t)\|^2_{H_0} = \|u_{xx}\|^2 + \|u_t\|^2 + \|v_{xx}\|^2 + \|v_t\|^2.$$

1.2　函数假设

1) 函数 $f_i,g_i:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$,并且满足 $f_i(0) = g_i(0)$,存在常数 $k_i,p_i,m_i,\rho,r \geqslant 0\ (i = 1,2)$,对 $\forall u,v \in \mathbb{R}$,有

$$-L_0 \leqslant \hat{f}_i(u) \leqslant f_i(u)u + L_i, \tag{9}$$
$$|f_i(u) - f_i(v)| \leqslant k_i(1 + |u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|, \tag{10}$$
$$(g_i(u) - g_i(v))(u - v) \geqslant p_i|u - v|^2, \tag{11}$$
$$|g_i(u) - g_i(v)| \leqslant m_i(1 + |u|^r + |v|^r)|u - v|, \tag{12}$$

其中 $\hat{f}_i(z) = \int_0^z f(s)\mathrm{d}s$,在本文中均取 $\rho = r = 0$.

2）函数 $M(\cdot),N(\cdot)\in C^1(\mathbb{R}),M(0)=N(0)=0$，均为非减函数且满足

$$M(z)z\geqslant \hat{M}(z)\geqslant 0,\qquad \forall z\geqslant 0,\tag{13}$$

$$M(s)\geqslant N(s)\geqslant a+bs^{\tau},\qquad a,b>0,\ \tau\geqslant 1,\ \forall s\in\mathbb{R}_+,\tag{14}$$

其中 $\hat{M}(z)=\int_0^z M(s)\mathrm{d}s\geqslant 0$.

3）函数 $p(x),q(x)\in L^2(0,l)$.

2 整体解的存在唯一性

定理 1 设空间 H_1 和函数 $f_i(\cdot),g_i(\cdot),M(\cdot),N(\cdot)$ 的假设条件均成立，若对于任何初值 $(u^0,u^1,v^0,v^1)\in H_1$，系统(5)~(7)上有唯一的正则解 $(u(x,t),v(x,t))$ 满足

$$u\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,W)\cap C^0([0,\infty);V)\cap C^1([0,\infty);U),$$

$$v\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,W)\cap C^0([0,\infty);V)\cap C^1([0,\infty);U),$$

$$\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|v_x\|^2+\hat{M}(\|u_x\|^2)\leqslant M_1,$$

其中 $M_1>0$ 仅依赖于初始值 p,q，不依赖 $t>0$.

证明(近似解) 设 ω_j 为 W 的基，对 $m\in\mathbb{N}$，令 $W_m=\mathrm{span}\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}$，则有函数：

$$u^m(t)=\sum_{i=1}^m g_{im}(t)\omega_i,\ v^m(t)=\sum_{i=1}^m h_{im}(t)\omega_i.$$

对 $\forall\omega\in W_m$，此函数对 $(u^m(x,t),v^m(x,t))$ 是如下逼近系统的解：

$$\begin{aligned}&(u^m_{tt}(t),\omega)+c(v^m_{tt}(t),\omega)+(u^m_{xtt}(t),\omega_x)+\alpha(u^m_{xx}(t),\omega_{xx})+M(\|u^m_x\|^2)(u^m_x(t),\omega_x)+\\&\quad N(\|u^m_x\|^2)(u^m_{xt}(t),\omega_x)+\alpha(f_1(u^m(l,t))+g_1(u^m_t(l,t)))\omega(l)=(p(x),\omega),\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&c(u^m_{tt}(t),\omega)+\gamma(v^m_{tt}(t),\omega)+\eta_1(v^m_t(t),\omega)+\delta(v^m_{xx}(t),\omega_{xx})+\\&\quad\beta_0(v^m_x(t),\omega_x)+\delta(f_2(v^m(l,t))+g_2(v^m_t(l,t)))\omega(l)=(q(x),\omega),\end{aligned}\tag{16}$$

$$u^m(0)=u^{m0}(x),\ u^m_t(0)=u^{m1}(x);\ v^m(0)=v^{m0}(x),\ v^m_t(0)=v^{m1}(x),\tag{17}$$

且满足初始条件

$$\begin{cases}u^m(0)=u^{m0}\to u^0,\ u^m_t(0)=u^{m1}\to u^1,\\ v^m(0)=v^{m0}\to v^0,\ v^m_t(0)=v^{m1}\to v^1.\end{cases}$$

事实上，上述方程组是关于时间 t 的 $m\times m$ 常微分方程组. 由 Peano 定理知，在 $[0,t_m]$ 上存在一个解 $(u^m(x,t),v^m(x,t))$，接下来对近似解估计，把区间 $[0,t_m]$ 延拓到 $[0,T]$，$\forall T>0$.

估计 1 在式(15)中取 $\omega=2u^m_t(t)$，在式(16)中取 $\omega=2v^m_t(t)$，两式相加，再在区间 $(0,t)$ $(t\leqslant t_m)$ 上积分，得

$$\begin{aligned}&\|u^m_t(t)\|^2+\alpha\|u^m_{xx}(t)\|^2+\hat{M}(\|u^m_x(t)\|^2)+\int_0^t N(\|u^m_x(s)\|^2)\|u^m_{xt}(s)\|^2\mathrm{d}s+\\&\gamma\|v^m_t(t)\|^2+\delta\|v^m_{xx}(t)\|^2+\beta_0\|v^m_x(t)\|^2+2\alpha\hat{f}_1(u^m(l,t))+2\delta\hat{f}_2(v^m(l,t))+\\&2\alpha\int_0^t g_1(u^m_t(l,s))u^m_t(l,s)\mathrm{d}s+2\delta\int_0^t g_2(v^m_t(l,s))v^m_s(l,t)\mathrm{d}s\leqslant\\&\|u^m_t(0)\|^2+\alpha\|u^m_{xx}(0)\|^2+\hat{M}(\|u^m_x(0)\|^2)+\\&\gamma\|v^m_t(0)\|^2+\delta\|v^m_{xx}(0)\|^2+\beta_0\|v^m_x(0)\|^2+\\&2\alpha\hat{f}_1(u^m(l,0))+2\delta\hat{f}_2(v^m(l,0))-2c(u^m_t(t),v^m_t(t))-2\eta_1\int_0^t\|v^m_t(s)\|^2\mathrm{d}s+\\&\int_0^t\|p(x)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|q(x)\|^2\mathrm{d}s+2\int_0^t\|u^m_t(s)\|^2\mathrm{d}s+2\int_0^t\|v^m_t(s)\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{18}$$

1）由函数假设条件(9)、(11)知等式左端后四项都大于 0.

2）因为 $c^2<\gamma$，所以 $c/\sqrt{\gamma}<1$，利用 Young 不等式得

$$-2c\|u^m_t(t)\|\cdot\|v^m_t(t)\|\geqslant-\frac{c}{\sqrt{\gamma}}\|u^m_t(t)\|^2-c\sqrt{\gamma}\|v^m_t(t)\|^2.\tag{19}$$

则式(18)变为下面的不等式:

$$\left(1-\frac{c}{\sqrt{\gamma}}\right)\|u_t^m(t)\|^2+(\gamma-c\sqrt{\gamma})\|v_t^m(t)\|^2+\alpha\|u_{xx}^m(t)\|^2+\|u_{xt}^m(t)\|^2+$$
$$\delta\|v_{xx}^m(t)\|^2+\hat{M}(\|u_x^m(t)\|^2)+\beta_0\|v_x^m(t)\|^2\leqslant$$
$$2\int_0^t\|u_t^m(s)\|^2\mathrm{d}s+(2-2\eta_1)\int_0^t\|v_t^m(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|p(x)\|^2\mathrm{d}s+\int_0^t\|q(x)\|^2\mathrm{d}s.$$

利用 Gronwall 引理,可得

$$\|u_t^m(t)\|^2+\|u_{xx}^m(t)\|^2+\hat{M}(\|u_x^m(t)\|^2)+\|u_{xt}^m(t)\|^2+$$
$$\|v_x^m(t)\|^2+\|v_t^m(t)\|^2+\|v_{xx}^m(t)\|^2\leqslant M_1,\qquad\forall t\in[0,T].$$

其中 M_1 是一个与 m 无关的正常数.

估计 2　在式(15)中取 $\omega=u_{tt}^m(0)$,在式(16)中取 $\omega=v_{tt}^m(0)$,并取 $t=0$,将两式相加,应用边界条件和 Schwarz 不等式,可得存在常数 $M_2>0$,对 $\forall t\in[0,T]$ 有

$$\|u_{tt}^m(0)\|^2+\|u_{xtt}^m(0)\|^2+\|v_{tt}^m(0)\|^2\leqslant M_2.$$

估计 3　在式(15)中分别取 $t=t+\xi$,$t=t$ 得新的两式,然后将两式相减后再取 $\omega=u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)$,同理,在式(16)中用类似方法,但此时取 $\omega=v_t^m(t+\xi)-v_t^m(t)$,最后两式相加可得,存在一个常数 $M_3>0$,使得

$$\|u_{tt}^m(t)\|^2+\|u_{xtt}^m(t)\|^2+\|u_{xxt}^m(t)\|^2+\|v_{tt}^m(t)\|^2+\|v_{xt}^m(t)\|^2+\|v_{xxt}^m(t)\|^2\leqslant M_3,$$
$$\forall t\in[0,T].$$

唯一性　假设 (u,v),$(\bar{u},\bar{v})$ 是系统(5)~(7)的两个解,记 $w=u-\bar{u}$,$\bar{w}=v-\bar{v}$,在式(5)的第一个方程中分别取 $u=u$,$u=\bar{u}$ 得新的两式,然后将两式相减后再与 w_t 做内积,在第二个方程中分别取 $v=v$,$v=\bar{v}$ 得新的两式,再将两式相减后与 $\bar{w}_t$ 做内积,最后两式相加,应用中值定理、Young 不等式及估计 1 和 3,可得存在一个常数 $C>0$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_t\|^2+\alpha\|w_{xx}\|^2+\|w_{xt}\|^2+\gamma\|\bar{w}_t\|^2+\delta\|\bar{w}_{xx}\|^2+\beta_0\|\bar{w}_x\|^2)\leqslant$$
$$C(\|w_t\|^2+\|w_{xx}\|^2+\|w_{xt}\|^2+\|\bar{w}_x\|^2),\qquad\forall t\in[0,T].$$

根据 Gronwall 引理,得 $w=0$,$\bar{w}=0$.所以 $u(x,t)=\bar{u}(x,t)$,$v(x,t)=\bar{v}(x,t)$.唯一性证毕.

因为 $u_{xx},u_{xxt},v_{xx},v_{xxt}\in L^2(0,\infty;L^2(0,l))$,则 $u(x,t),v(x,t)\in C^0([0,\infty);V)$,也可得 $u(x,t),v(x,t)\in C^1([0,\infty);U)$.定理 1 证毕.

下面根据稠密性理论,证明系统(5)在初边值(6)、(7)下弱解的存在唯一性.

定理 2　设空间 H_0 与函数 $f_i(\cdot)$,$g_i(\cdot)$,$M(\cdot)$,$N(\cdot)$ 假设条件均成立,对于任何初值 $(u^0,u^1,v^0,v^1)\in H_0$,系统(5)~(7)在 H_0 中存在唯一只与初值有关的弱解.

证明　设 $(u^0,u^1,v^0,v^1)\in H_0$,因为 H_1 在 H_0 中稠,则存在 $(u_n^0,u_n^1,v_n^0,v_n^1)\in H_1$,使得 $u_n^0\to u^0$ 在 V 中,$u_n^1\to u^1$ 在 U 中,$v_n^0\to v^0$ 在 V 中,$v_n^1\to v^1$ 在 U 中.

对于任意一个 $n\in\mathbb{N}$,存在 (u_n,v_n) 满足系统(5)~(7),有下列关系式成立:

$$\begin{cases}u_{ttn}+cv_{ttn}+\alpha u_{xxxxn}-u_{xxttn}-M(\|u_{xn}\|^2)u_{xxn}-N(\|u_{xn}\|^2)u_{xxtn}=p(x),\\ cu_{ttn}+\gamma v_{ttn}+\eta_1 v_{tn}+\delta v_{xxxxn}-\beta_0 v_{xxn}=q(x),\end{cases}\tag{20}$$

$$u_n(x,0)=u_n^0(x),\ u_{tn}(x,0)=u_n^1(x);\ v_n(x,0)=v_n^0(x),\ v_{tn}(x,0)=v_n^1(x),\tag{21}$$

$$\begin{cases}u_n(0,t)=u_{xn}(l,t)=u_{xxn}(0,t)=0,\\ u_{xxxn}(l,t)=f_1(u_n(l,t))+g_1(u_{tn}(l,t)),\\ v_n(0,t)=v_{xn}(l,t)=v_{xxn}(0,t)=0,\\ v_{xxxn}(l,t)=f_2(v_n(l,t))+g_2(v_{tn}(l,t)).\end{cases}\tag{22}$$

对式(20)中的第一个方程与 u_{tn} 做内积,第二个方程与 v_{tn} 做内积,两式相加,可得

$$\|u_{tn}\|^2+\|v_{tn}\|^2+\|u_{xxn}\|^2+\|v_{xxn}\|^2+\|u_{xtn}\|^2+\|v_{xn}\|^2\leqslant C,\tag{23}$$

其中 C 是一个与 $n\in\mathbb{N}$ 无关的正常数.

设 (u_n, v_n),(u_m, v_m) 是式(20)的两组解,令 $Z_{n,m} = u_n - u_m$,$\tilde{Z}_{n,m} = v_n - v_m$,$n, m \in \mathbb{N}$,与正则解的唯一性步骤相似,并且考虑到 $u_n^0, u_n^1, v_n^0, v_n^1$ 的收敛性,则存在 (u, v) 满足 $u_n \to u$ 在 $C([0,T);V)$ 强收敛,$u_{tn} \to u_t$ 在 $C([0,T);U)$ 强收敛,$v_n \to v$ 在 $C([0,T);V)$ 强收敛,$v_{tn} \to v_t$ 在 $C([0,T);U)$ 强收敛.

由上面的收敛性并取 $n \to \infty$,则有

$$\begin{cases} u_{tt} + cv_{tt} + \alpha u_{xxxx} - u_{xxtt} - M(\|u_x\|^2)u_{xx} - N(\|u_x\|^2)u_{xxt} = p(x), \\ cu_{tt} + \gamma v_{tt} + \eta_1 v_t + \delta v_{xxxx} - \beta_0 v_{xx} = q(x). \end{cases} \tag{24}$$

定理 2 证毕.

注 1 由定理 2 可知系统(5)~(7)能在空间 H_0 上定义一个连续半群.如果 $(u^0, u^1, v^0, v^1) \in H_0$,那么可以引入映射 $S(t)_{t\geqslant 0}: (u^0, u^1, v^0, v^1) \to (u(t), u_t(t), v(t), v_t(t))$,它是 H_0 到 H_0 的一个映射并且满足半群性质,则 $S(t)$ 是定义在 H_0 上的连续半群.

3 全局吸引子

定义 1[15] 对任何一个有界集 $B \subset H$,存在 $t_B = t(B) \geqslant 0$ 满足 $S(t)B \subset \mathcal{B}$,$\forall t \geqslant t_B$,则有界集 $\mathcal{B} \subset H$ 是半群 $S(t)$ 的一个吸收集,定义 $(H, S(t))$ 是一个耗散的动力系统.

定理 3 在定理 2 的假设 $(u^0, u^1, v^0, v^1) \in H_0$ 下,系统(5)~(7)相对应的半群 $S(t)$ 在空间 H_0 上存在有界吸收集.

证明 任取一个有界集 $B \in H_0$,使初值 $(u^0, u^1, v^0, v^1) \in B$,满足 $(u, u_t, v, v_t) = S(t)(u^0, u^1, v^0, v^1)$.首先,我们给出能量等式:

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \alpha\|u_{xx}\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \hat{M}(\|u_x\|^2) + \gamma\|v_t\|^2 + \delta\|v_{xx}\|^2 + \beta_0\|v_x\|^2) + \alpha\hat{f}_1(u(l,t)) + \delta\hat{f}_2(v(l,t)) + c(u_t, v_t) - \int_0^l pu\mathrm{d}x - \int_0^l qv\mathrm{d}x. \tag{25}$$

基于修正能量等式

$$\tilde{E}(t) = E(t) + l^4\|p\|^2 + l^4\|q\|^2 + 2L_0,$$

定义辅助函数

$$\varphi(t) = \int_0^l \left(u_t u + \gamma v_t v + cv_t u + cu_t v - u_{xxt}u + \frac{\eta_1}{2}v^2\right)\mathrm{d}x. \tag{26}$$

因为 $u(0,t) = u_x(l,t) = u_{xx}(0,t) = 0$,所以有

$$\|u\| \leqslant \sqrt{l}\|u_x\|,\ \|u_x\| \leqslant l\|u_{xx}\|,\ \|u\| \leqslant l^2\|u_{xx}\|. \tag{27}$$

系统(5)的第一个方程与 $u_t + \varepsilon u$ 做内积,第二个方程与 $v_t + \varepsilon v$ 做内积,然后将所得两式相加并整理有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) + \varepsilon E(t) + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u_{xt}\|^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{4}\|u_{xx}\|^2 + \frac{\varepsilon\gamma}{4}\|v_t\|^2 + \\ &\quad \frac{\beta_0\varepsilon}{4}\|v_x\|^2 + \frac{\delta\varepsilon}{2}\|v_{xx}\|^2 + \eta_1\|v_t\|^2 + N(\|u_x\|^2)\|u_{xt}\|^2 + \varepsilon M(\|u_x\|^2)\|u_x\|^2 - \\ &\quad \frac{\varepsilon}{2}\hat{M}(\|u_x\|^2) + \alpha g_1(u_t(l,t))u_t(l,t) + \delta g_2(v_t(l,t))v_t(l,t) = \\ &\quad 2\varepsilon(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2) - \varepsilon N(\|u_x\|^2)\int_0^l u_x u_{xt}\mathrm{d}x + 3\varepsilon c(u_t, v_t) + \\ &\quad \varepsilon\alpha\hat{f}_1(u(l,t)) - \varepsilon\alpha f_1(u(l,t))u(l,t) + \varepsilon\delta\hat{f}_2(v(l,t)) - \varepsilon\delta f_2(v(l,t))v(l,t) - \\ &\quad \varepsilon\alpha g_1(u_t(l,t))u(l,t) - \varepsilon\delta g_2(v_t(l,t))v(l,t) + 2\gamma\varepsilon\|v_t\|^2. \end{aligned} \tag{28}$$

1) 根据条件(11)得

$$|\alpha g_1(u_t(l,t))u_t(l,t)| \geqslant \alpha p_1|u_t(l,t)|^2,\ |\delta g_2(v_t(l,t))v_t(l,t)| \geqslant \delta p_2|v_t(l,t)|^2.$$

2) 根据条件(9)得

$$
\begin{cases}
|\varepsilon\alpha\hat{f}_1(u(l,t)) - \varepsilon\alpha f_1(u(l,t))u(l,t)| \leqslant \left|\dfrac{\varepsilon\alpha}{2}f_1(u(l,t)u(l,t)\right| + \varepsilon L_1 \leqslant \\
\qquad \dfrac{\varepsilon}{2}3\alpha k_1\|u\|_\infty^2 + \varepsilon L_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}3\alpha k_1 l^3\|u_{xx}\|^2 + \varepsilon L_1, \\
|\varepsilon\delta\hat{f}_2(v(l,t)) - \varepsilon\delta f_2(v(l,t))v(l,t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}3\delta k_2 l^3\|v_{xx}\|^2 + \varepsilon L_2.
\end{cases} \tag{29}
$$

3）根据条件(12)、式(27),结合 Young 不等式有

$$
\begin{cases}
\varepsilon\alpha g_1(u_t(l,t))u(l,t) \leqslant 3m_1\varepsilon\alpha u_t(l)u(l) \leqslant 9m_1^2\varepsilon\alpha l^3|u_t(l)|^2 + \dfrac{\varepsilon\alpha}{4}\|u_{xx}\|^2, \\
\varepsilon\delta g_2(v_t(l,t))v(l,t) \leqslant 3m_2\varepsilon\delta v_t(l)v(l) \leqslant 9m_2^2\varepsilon\delta l^3|v_t(l)|^2 + \dfrac{\varepsilon\delta}{4}\|v_{xx}\|^2.
\end{cases} \tag{30}
$$

4）根据均值不等式,得

$$
\begin{aligned}
&\left|-\varepsilon N(\|u_x\|^2)\int_0^l u_x u_{xt}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|^2)(\|u_x\|^2 + \|u_{xt}\|^2) \leqslant \\
&\quad \frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|^2)\|u_x\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|^2)\|u_{xt}\|^2.
\end{aligned} \tag{31}
$$

把上述估计代入式(28),得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) + \varepsilon E(t) + \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u_{xt}\|^2 + \frac{\alpha\varepsilon}{4}\|u_{xx}\|^2 + \frac{\varepsilon\gamma}{4}\|v_t\|^2 + \\
&\quad \frac{\beta_0\varepsilon}{4}\|v_x\|^2 + \frac{\delta\varepsilon}{2}\|v_{xx}\|^2 + \eta_1\|v_t\|^2 + N(\|u_x\|^2)\|u_{xt}\|^2 + \varepsilon M(\|u_x\|^2)\|u_x\|^2 - \\
&\quad \frac{\varepsilon}{2}\hat{M}(\|u_x\|^2) + \alpha p_1|u_t(l,t)|^2 + \delta p_2|v_t(l,t)|^2 = \\
&\quad 2\varepsilon(\|u_t\|^2 + \|u_{xt}\|^2) + \frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|^2)\|u_x\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|^2)\|u_{xt}\|^2 + \\
&\quad 3\varepsilon c(u_t,v_t) + \frac{\varepsilon}{2}3\alpha k_1 l^3\|u_{xx}\|^2 + \varepsilon L_1 + \frac{\varepsilon}{2}3\delta k_2 l^3\|v_{xx}\|^2 + \varepsilon L_2 + \\
&\quad 9m_1^2\varepsilon\alpha l^3|u_t(l)|^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{4}\|u_{xx}\|^2 + 9m_2^2\varepsilon\delta l^3|v_t(l)|^2 + \frac{\varepsilon\delta}{4}\|v_{xx}\|^2 + 2\gamma\varepsilon\|v_t\|^2.
\end{aligned} \tag{32}
$$

取 $0 < \varepsilon \leqslant \min\{1, p_1/9m_1^2 l^3, p_2/9m_2^2 l^3\} = \varepsilon_0$,当 ε 足够小时,可得

$$
\alpha p_1|u_t(l,t)|^2 \geqslant 9m_1^2\varepsilon\alpha l^3|u_t(l)|^2,\ \delta p_2|v_t(l,t)|^2 \geqslant 9m_2^2\varepsilon\delta l^3|v_t(l)|^2. \tag{33}
$$

当 $k_1 > 0$ 充分小时,有 $\alpha - 6\alpha k_1 l^3 > 0$, 可得

$$
\frac{\alpha\varepsilon}{4}\|u_{xx}\|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}3\alpha k_1 l^3\|u_{xx}\|^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{4}\|u_{xx}\|^2.
$$

当 $k_2 > 0$ 充分小时,有 $\delta - 6\delta k_2 l^3 > 0$, 可得

$$
\frac{\delta\varepsilon}{2}\|v_{xx}\|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}3\delta k_2 l^3\|v_{xx}\|^2 + \frac{\varepsilon\delta}{4}\|v_{xx}\|^2.
$$

根据条件(14)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}N(\|u_x\|^2)\|u_{xt}\|^2 \geqslant \frac{a}{2}\|u_{xt}\|^2 + \frac{b}{2}\|u_x\|^{2\tau}\|u_{xt}\|^2 \geqslant \\
&\quad \frac{a}{2}\|u_{xt}\|^2 \geqslant \frac{a}{4\sqrt{l}}\|u_x\|^2 + \frac{a}{4}\|u_{xt}\|^2.
\end{aligned} \tag{34}
$$

又因为

$$
3\varepsilon c(u_t,v_t) \leqslant \frac{3\varepsilon c}{2}\|u_t\|^2 + \frac{3\varepsilon c}{2}\|v_t\|^2,
$$

所以取 $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_0, a/(2\sqrt{l}(4+3c))\} = \varepsilon_1$，当 ε 足够小时，

$$\frac{a}{4\sqrt{l}}\|u_x\|^2 + \frac{a}{4}\|u_{xt}\|^2 \geqslant \left(2\varepsilon + \frac{3\varepsilon c}{2}\right)\|u_t\|^2 + 2\varepsilon\|u_{xt}\|^2. \tag{35}$$

取 $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_1, 2\eta_1/(3(c+\gamma))\}$，当 ε 足够小时，

$$\left(\eta_1 + \frac{\gamma\varepsilon}{2}\right)\|v_t\|^2 \geqslant \frac{3\varepsilon c}{2}\|v_t\|^2 + 2\gamma\varepsilon\|v_t\|^2.$$

由条件(13)和(14)可得

$$\varepsilon M(\|u_x\|^2)\|u_x\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\hat{M}(\|u_x\|^2) - \frac{\varepsilon}{2}N(\|u_x\|^2)\|u_x\|^2 \geqslant 0. \tag{36}$$

把上述估计式(33)~(36)代入式(32)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) + \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) + \varepsilon E(t) \leqslant \varepsilon L_1 + \varepsilon L_2. \tag{37}$$

在不等式(37)两边加 $2\varepsilon L_0 + \varepsilon l^4\|p\|^2 + \varepsilon l^4\|q\|^2$，并且考虑到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{E}(t)$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tilde{E}(t) + \varepsilon\varphi(t)) + \varepsilon\tilde{E}(t) \leqslant \varepsilon(2L_0 + L_1 + L_2 + l^4\|p\|^2 + l^4\|q\|^2). \tag{38}$$

现在我们定义

$$\tilde{E}_\varepsilon(t) = \tilde{E}(t) + \varepsilon\varphi(t),$$

依据条件(27)知

$$-\int_0^l pu\mathrm{d}x \geqslant -l^2\|p\|\cdot\|u_{xx}\| \geqslant -l^4\|p\|^2 - 1/4\|u_{xx}\|^2,$$

$$-\int_0^l qu\mathrm{d}x \geqslant -l^4\|q\|^2 - 1/4\|v_{xx}\|^2,$$

并由 $\hat{f}_i(u(l,t)) \geqslant 0 (i=1,2)$，可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}(t) &\geqslant \frac{\alpha}{2}\|u_{xx}\|^2 + \frac{\delta}{2}\|v_{xx}\|^2 + (1 - \frac{c}{2})\|u_t\|^2 + (\gamma - \frac{c}{2})\|v_t\|^2 \geqslant \\ &\rho_0\|(u,u_t,v,v_t)\|^2_{H_0},\end{aligned} \tag{39}$$

其中 ρ_0 是与 α,δ,c,γ 有关的正常数.

根据 $\varphi(t)$ 的定义，并利用 Young 不等式，得

$$|\tilde{E}_\varepsilon(t) - \tilde{E}(t)| = |\varepsilon\varphi(t)| \leqslant \varepsilon C_0\tilde{E}(t), \tag{40}$$

其中 $C_0 = \max\{1+c, (\gamma+c)/\gamma, ((1+c)l^4 + l^2)/\alpha, (\gamma+c+\eta_1)l^4/\delta\}$. 不难推出，当 ε 足够小时，有

$$(1 - \varepsilon C_0)\tilde{E}(t) \leqslant \tilde{E}_\varepsilon(t) \leqslant (1 + \varepsilon C_0)\tilde{E}(t). \tag{41}$$

结合 $\tilde{E}_\varepsilon(t)$ 的定义，同时把式(41)代入式(38)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{E}_\varepsilon(t) + \frac{1}{1+\varepsilon C_0}\tilde{E}_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon(2L_0 + L_1 + L_2 + l^4\|p\|^2 + l^4\|q\|^2).$$

应用 Gronwall 不等式有

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\varepsilon(t) &\leqslant \tilde{E}_\varepsilon(0)\mathrm{e}^{-t/(1+\varepsilon C_0)} + \\ &\varepsilon(2L_0 + L_1 + L_2 + l^4\|p\|^2 + l^4\|q\|^2)(1+\varepsilon C_0)(1 - \mathrm{e}^{-t/(1+\varepsilon C_0)}).\end{aligned} \tag{42}$$

因为正不变集 B 有界，$E_\varepsilon(0)$ 也有界，则存在 $t_B > 0$，当 t_B 足够大时，有

$$(1 - \varepsilon C_0)\tilde{E}(t) \leqslant \tilde{E}_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon(2L_0 + L_1 + L_2 + l^4\|p\|^2 + l^4\|q\|^2)(1 + \varepsilon C_0). \tag{43}$$

从式(39)可得，$\forall t > t_B$，有

$$\rho_0\|(u,u_t,v,v_t)\|^2_{H_0} \leqslant \tilde{E}(t) \leqslant \frac{\varepsilon(2L_0 + L_1 + L_2 + l^4\|p\|^2 + l^4\|q\|^2)(1+\varepsilon C_0)}{1 - \varepsilon C_0}.$$

因此

$$\mathscr{B}=\left\{(u,u_t,v,v_t)\in H_0:\|(u,u_t,v,v_t\|_{H_0}^2\leqslant\frac{\rho_0\varepsilon(2L_0+L_1+L_2+l^4\|p\|^2+l^4\|q\|^2)(1+\varepsilon C_0)}{1-\varepsilon C_0}\right\}$$

是系统的一个有界吸收集.

引理 1[15]　设 H 是一个 Banach 空间,对于任何正不变有界集 $B\subset H$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists T=T(\varepsilon,B)$, 满足

$$\|S(T)x-S(T)y\|\leqslant\varepsilon+\phi_T(x,y),\qquad\forall x,y\in B,$$

这里 $\phi_T:H\times H\to\mathbb{R}$ 满足对于任意序列 $\{z_n\}\in B$,

$$\liminf_{k\to\infty}\left(\liminf_{l\to\infty}\phi_T(z_k,z_l)\right)=0,$$

那么半群 $S(t)$ 在 H 中渐近光滑.

引理 2[15]　若 $S(t)$ 是定义在度量空间 H 上的耗散的连续半群,当且仅当它在 H 中渐近光滑,则 $S(t)$ 在 H 中有紧的全局吸引子.

定理 4　在定理 2 的假设 $(u^0,u^1,v^0,v^1)\in H_0$ 下,系统(5)~(7)相对应的半群 $S(t)$ 在 H_0 中渐近光滑.

证明　任取一个有界集 $B\in H_0$,给定初值 (u^0,u^1,v^0,v^1), $(\bar u^0,\bar u^1,\bar v^0,\bar v^1)\in B$, 设 (u,v), $(\bar u,\bar v)$ 是系统(5)~(7)的弱解,那么 $w=u-\bar u$, $\bar w=v-\bar v$ 是下面系统的弱解:

$$\begin{cases}w_{tt}+c\bar w_{tt}+\alpha w_{xxxx}-w_{xxtt}-M(\|u_x\|^2)w_{xx}-\Lambda M\bar u_{xx}-N(\|u_x\|^2)w_{xxt}-\Lambda N\bar u_{xxt}=0,\\ cw_{tt}+\gamma\bar w_{tt}+\eta_1\bar w_t+\delta\bar w_{xxxx}-\beta_0\bar w_{xx}=0,\end{cases}\tag{44}$$

其中

$$\Lambda M=M(\|u_x\|^2)-M(\|\bar u_x\|^2),\ \Lambda N=N(\|u_x\|^2)-N(\|\bar u_x\|^2),$$

边界条件为

$$\begin{cases}w(0,t)=w_x(l,t)=w_{xx}(0,t)=0,\ \bar w(0,t)=\bar w_x(l,t)=\bar w_{xx}(0,t)=0,\\ w_{xxx}(l,t)=f_1(u(l,t))-f_1(\bar u(l,t))+g_1(u_t(l,t))-g_1(\bar u_t(l,t))\triangleq\Lambda f+\Lambda g,\\ \bar w_{xxx}(l,t)=f_2(v(l,t))-f_2(\bar v(l,t))+g_2(v_t(l,t))-g_2(\bar v_t(l,t))\triangleq\Lambda\tilde f+\Lambda\tilde g.\end{cases}\tag{45}$$

设能量等式

$$F(t)=\frac{1}{2}(\|w_t\|^2+\alpha\|w_{xx}\|^2+\|w_{xt}\|^2+\gamma\|\bar w_t\|^2+\delta\|\bar w_{xx}\|^2+\beta_0\|\bar w_x\|^2+M(\|u_x\|^2)\|w_x\|^2)+c(w_t,\bar w_t).$$

定义辅助函数

$$\psi(t)=\int_0^l\left(w_tw+\gamma\bar w_t\bar w+c\bar w_tw+cw_t\bar w-w_{xxt}w+\frac{\eta_1}{2}\bar w^2\right)\mathrm{d}x.$$

式(44)的第一个方程与 $w_t+\mu w$ 做内积,第二个方程与 $\bar w_t+\mu\bar w$ 做内积,将所得两式相加得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+2\mu F(t)+\eta_1\|\bar w_t\|^2+N(\|u_x\|^2)\|w_{xt}\|^2+\\&\alpha\Lambda gw_t(l,t)+\delta\Lambda\tilde g\bar w_t(l,t)=\\&M'(\|u_x\|^2)\int_0^lu_xu_{xt}\mathrm{d}x\|w_x\|^2-\mu N(\|u_x\|^2)\int_0^lw_xw_{xt}\mathrm{d}x+\Lambda M\int_0^l\bar u_{xx}w_t\mathrm{d}x+\\&\Lambda N\int_0^l\bar u_{xxt}w_t\mathrm{d}x+\mu\Lambda M(\|u_x\|^2)\int_0^l\bar u_{xx}w\mathrm{d}x-\mu\Lambda N\int_0^l\bar u_{xt}w_x\mathrm{d}x-\\&\mu\alpha(\Lambda f+\Lambda g)w(l,t)-\mu\delta(\Lambda\tilde f+\Lambda\tilde g)\bar w(l,t)-\alpha\Lambda fw_t(l,t)-\\&\delta\Lambda\tilde f\bar w_t(l,t)+4\mu c(w_t,\bar w_t)+2\mu\|w_t\|^2+2\gamma\mu\|\bar w_t\|^2+2\mu\|w_{xt}\|^2.\end{aligned}\tag{46}$$

根据条件(11)得

$$\alpha\Lambda gw_t(l,t)\geqslant\alpha p_1|w_t(l,t)|^2,\ \delta\Lambda\tilde g\bar w_t(l,t)\geqslant\delta p_2|\bar w_t(l,t)|^2.\tag{47}$$

因为 $N(s)\geqslant a+bs^\tau(a,b>0,\tau\geqslant1)$, 可得

$$N(\|u_x\|^2)\|w_{xt}\|^2 \geqslant (a+b\|u_x\|^{2\tau})\|w_{xt}\|^2.$$

接下来我们估计式(46)的右边.由前面解的存在性可得 $u,\bar{u},v,\bar{v},w,\bar{w}$ 满足估计 $\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+\|u_{xx}\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|v_x\|^2+\hat{M}(\|u_x\|^2)\leqslant M_1$,为了简化一些记号,定义 C 是一个仅依赖于集合 B 的正的常数.

首先,因为 $M(\cdot),N(\cdot)\in C^1(\mathbb{R})$,$N(0)=0$,并且 $\|u_x\|^2\leqslant C$,可得 $M'(\|u_x\|^2)\leqslant C$,$N(\|u_x\|^2)\leqslant C$, 然后我们有

$$\begin{cases} M'(\|u_x\|^2)\int_0^l u_x u_{xt}\mathrm{d}x\|w_x\|^2\leqslant C\|w_x\|^2, \\ -\mu N(\|u_x\|^2)\int_0^l w_x w_{xt}\mathrm{d}x\leqslant C\|w_x\|\cdot\|w_{xt}\|. \end{cases} \tag{48}$$

根据中值定理并注意到 $M(a^2)-M(b^2)\leqslant M'(\sup\{a^2,b^2\})|a+b||a-b|$,$N(a^2)-M(b^2)\leqslant N'(\sup\{a^2,b^2\})|a+b||a-b|$, 我们有

$$\begin{cases} \Lambda M\int_0^l \bar{u}_{xx}w_t\mathrm{d}x\leqslant C\|w_x\|\cdot\|w_t\|, \\ \Lambda N\int_0^l \bar{u}_{xxt}w_t\mathrm{d}x\leqslant C\|w_x\|\cdot\|w_{xt}\|, \\ \mu\Lambda M\int_0^l \bar{u}_{xx}w\mathrm{d}x\leqslant C\|w_x\|^2, \\ -\mu\Lambda N\int_0^l \bar{u}_{xt}w_x\mathrm{d}x\leqslant C\|w_x\|^2. \end{cases} \tag{49}$$

由条件(10)得

$$\begin{cases} |-\mu\alpha\Lambda f w(l,t)|\leqslant \mu\alpha 3k_1\|w\|_\infty|w(l)|\leqslant 3\mu\alpha k_1\|w\|_\infty\sqrt{l}\|w_x\|\leqslant C\|w_x\|^2, \\ |-\mu\delta\Lambda\tilde{f}\bar{w}(l,t)|\leqslant \mu\delta 3k_2\|\bar{w}\|_\infty|\bar{w}(l)|\leqslant 3\mu\delta k_2\|\bar{w}\|_\infty\sqrt{l}\|\bar{w}_x\|\leqslant C\|\bar{w}_x\|^2, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} |-\alpha\Lambda f w_t(l,t)|\leqslant \alpha 3k_1\|w\|_\infty|w_t(l)|\leqslant \\ \qquad C\|w_x\|\cdot|w_t(l)|\leqslant C\|w_x\|^2+\dfrac{\alpha p_1}{2}|w_t(l)|^2, \\ |-\delta\Lambda\tilde{f}\bar{w}_t(l,t)|\leqslant \delta 3k_2\|\bar{w}\|_\infty|\bar{w}_t(l)|\leqslant C\|\bar{w}_x\|\cdot|\bar{w}_t(l)|\leqslant \\ \qquad C\|\bar{w}_x\|^2+\dfrac{\delta p_2}{2}|\bar{w}_t(l)|^2. \end{cases} \tag{51}$$

由条件(12)得

$$\begin{cases} |-\mu\alpha\Lambda g w(l)|\leqslant \mu\alpha 3m_1|w_t(l)||w(l)|\leqslant 3m_1\alpha\mu\sqrt{l}\|w_x\|\cdot|w_t(l)|\leqslant \\ \qquad \dfrac{9m_1^2\alpha l\mu^2}{2p_1}\|w_x\|^2+\dfrac{\alpha p_1}{2}|w_t(l)|^2, \\ |-\mu\delta\Lambda\tilde{g}\bar{w}(l)|\leqslant \mu\delta 3m_2|\bar{w}_t(l)||\bar{w}(l)|\leqslant 3m_2\delta\mu\sqrt{l}\|\bar{w}_x\|\cdot|\bar{w}_t(l)|\leqslant \\ \qquad \dfrac{9m_2^2\delta l\mu^2}{2p_2}\|\bar{w}_x\|^2+\dfrac{\delta p_2}{2}|\bar{w}_t(l)|^2. \end{cases} \tag{52}$$

将估计式(47)~(52)代入式(46),整理得到

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+2\mu F(t)+(\eta_1-2\mu c-2\gamma\mu)\|\bar{w}_t\|^2+(a+b\|u_x\|^{2\tau})\|w_{xt}\|^2\leqslant \\ &\quad\left(5C+\frac{9m_1^2\alpha l\mu^2}{2p_1}+\frac{2C^2}{\mu}\right)\|w_x\|^2+\left(2C+\frac{9m_2^2\delta l\mu^2}{2p_2}\right)\|\bar{w}_x\|^2+(3\mu+3\mu l)\|w_{xt}\|^2. \end{aligned} \tag{53}$$

取 $0<\mu\leqslant\min\{\alpha/3l+3,\eta_1/2c+2\gamma\}$,当 μ 充分小时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)+2\mu F(t)\leqslant \left(5C+\frac{9m_1^2\alpha l\mu^2}{2p_1}+\frac{2C^2}{\mu}\right)\|w_x\|^2+\left(2C+\frac{9m_2^2\delta l\mu^2}{2p_2}\right)\|\bar{w}_x\|^2. \tag{54}$$

定义 $F_\mu(t)=F(t)+\mu\psi(t)$,通过类似证吸收集时的讨论,知 $|F_\mu(t)-F(t)|=|\mu\psi(t)|\leqslant\mu C_0F(t)$, 进一步推出

$$(1-\mu C_0)F(t)\leqslant F_\mu(t)\leqslant(1+\mu C_0)F(t). \tag{55}$$

把式(55)代入式(54),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_\mu(t)+\frac{2\mu}{1+\mu C_0}F_\mu(t)\leqslant C_1(\|w_x\|^2+\|\bar{w}_x\|^2),\qquad t\geqslant 0,$$

其中 $$C_1=\max\left\{5C+\frac{9m_1^2\alpha l\mu^2}{2p_1}+\frac{2C^2}{\mu},\ 2C+\frac{9m_2^2\delta l\mu^2}{2p_2}\right\}.$$

利用 Gronwall 引理,得

$$F_\mu(t)\leqslant F_\mu(0)\mathrm{e}^{-2\mu/(1+\mu C_0)}+C_1\int_0^t\mathrm{e}^{-2\mu(t-s)/(1+\mu C_0)}(\|w_x(s)\|^2+\|\bar{w}_x(s)\|^2)\mathrm{d}s.$$

另一方面有

$$F_\mu(t)\geqslant(1-\mu C_0)F(t)\geqslant\frac{(1-\mu C_0)\rho_1}{2}(\|w_{xx}\|^2+\|w_t\|^2+\|w_{xt}\|^2+\|\bar{w}_{xx}\|^2+\|\bar{w}_t\|^2),$$

其中 ρ_1 是一个只与系数 $\delta,\gamma,\beta_0,\alpha,c$ 有关的常数.

因此能找到一个只依赖于 B 的常数 $C_B>0$, 使得

$$\|w(t),w_t(t),\bar{w}(t),\bar{w}_t(t)\|_{H_0}\leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\mu C_0)\rho_0}}C_B\mathrm{e}^{-\mu t/(1+\mu C_0)}+\frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{(1-\mu C_0)\rho_0}}\left(\int_0^T\|w_x(s)\|^2+\|\bar{w}_x(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}. \tag{56}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 T,当 T 足够大时,有

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\mu C_0)\rho_0}}C_B\mathrm{e}^{-\mu T/(1+\mu C_0)}<\varepsilon, \tag{57}$$

并且定义 $\phi_T:H_0\times H_0\to\mathbb{R}$ 为

$$\phi_T((u^0,u^1,v^0,v^1),(\bar{u}^0,\bar{u}^1,\bar{v}^0,\bar{v}^1))= \frac{\sqrt{2C_1}}{\sqrt{(1-\mu C_0)\rho_0}}\left(\int_0^T(\|u_x(t)-v_x(t)\|^2+\|\bar{u}_x(t)-\bar{v}_x(t)\|^2)\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

然后由式(56)、(57),可得对任意的 $(u^0,u^1,v^0,v^1),(\bar{u}^0,\bar{u}^1,\bar{v}^0,\bar{v}^1)\in B$, 有

$$\|S(T)(u^0,u^1,v^0,v^1)-S(T)(\bar{u}^0,\bar{u}^1,\bar{v}^0,\bar{v}^1)\|_{H_0}\leqslant\varepsilon+\phi_T((u^0,u^1,v^0,v^1),(\bar{u}^0,\bar{u}^1,\bar{v}^0,\bar{v}^1)).$$

令 $(u_n^0,u_n^1,v_n^0,v_n^1)$ 是集合 B 中给定的序列, 因为 B 是有界的且是正不变的, 所以系统的解的对应序列 $(u_n(t),u_{tn}(t),v_n(t),v_{tn}(t))$ 在 H_0 中一致有界, 因此 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 在 $C([0,\infty),V)\cap C^1([0,\infty),U)$ 中有界.根据嵌入定理 $V\hookrightarrow H_0^1$ 是紧的,则存在子序列 $\{u_{nk}\}$, $\{v_{nk}\}$ 在 $C([0,T],H_0^1(\Omega))$ 中一致强收敛:

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\int_0^T(\|u_{xnk}(s)-u_{xnl}(s)\|^2+\|v_{xnk}(s)-v_{xnl}(s)\|^2)\mathrm{d}s=0,$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\phi_T((u_{nk}^0,u_{nk}^1,v_{nk}^0,v_{nk}^1),(u_{nl}^0,u_{nl}^1,v_{nl}^0,v_{nl}^1))=0.$$

因此,半群 $S(t)$ 在空间 H_0 渐近光滑.

定理 5　根据引理 2、定理 3 和定理 4,得系统所确定的半群 $S(t)$ 在空间 H_0 中有全局吸引子.

4　总　　结

本文讨论具有非线性边界的耦合梁方程组的适定性和全局吸引子的存在性.首先用 Galerkin 方法讨论

解的适定性,然后利用压缩函数方法证明算子半群在相空间的渐近光滑,得到全局吸引子的存在性.具体有以下结论:

1) 当初始值 $(u^0, u^1, v^0, v^1) \in V \times U \times V \times U$ 时,系统存在唯一的弱解;当初始值 $(u^0, u^1, v^0, v^1) \in W \times W \times W \times W$ 时,系统存在唯一的正则解.

2) 在弱解的情况下,通过证明系统存在有界吸收集和半群的渐近光滑性得到全局吸引子.

3) 从数学角度来看,本文得到系统在一定的初边界条件下存在弱解和正则解,并且系统有有限维吸引子,这与许多带有耗散结构的无穷维动力系统的有限维化结论相一致.即虽然所给系统是无穷维动力系统,但随着时间的延续,这个无穷维的动力系统具有有限维动力系统的性质.

4) 从力学角度来看,无穷维动力系统的有限维化,使得我们的解可通过"有限模态"来刻划无穷维系统,为合理的 Galerkin 截断提供了理论依据.另一方面证明的系统解的存在性、系统的有限维吸引子的存在性,为之后的数值计算分析也提供了理论保障,由于篇幅所限相关的数值计算结果另文讨论.

参考文献(References):

[1] MA T F, NARCISO V. Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms[J]. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, 2010, **73**(10): 3402-3412.

[2] WANG D X, ZHANG J W, WANG Y Z. Strong attractor of beam equation with structural damping and nonlinear damping[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, **2013**(2): 589-606.

[3] 苏小虎, 姜金平. 梁方程时间依赖全局吸引子的存在性[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(2): 195-203.(SU Xiaohu, JIANG Jinping. Existence of time-dependent global attractors for beam equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 195-203.(in Chinese))

[4] YANG Z J, DING P Y, LIU Z M. Global attractor for the Kirchhoff type equations with strong nonlinear damping and supercritical nonlinearity[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, **33**(1): 12-17.

[5] CHUESSHOV I. Long-time dynamics of Kirchhoff wave models with strong nonlinear damping[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**(2): 1229-1262.

[6] YANG Z J. On an extensible beam equation with nonlinear damping and source terms[J]. *Journal of Differential Equations*, 2013, **254**(9): 3903-3927.

[7] MA T F. Boundary stabilization for a non-linear beam on elastic bearings[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2001, **24**(8): 583-594.

[8] WANG Y, ZHANG J W. Long-time dynamics of solutions for a class of coupling beam equations with nonlinear boundary conditions[J]. *Mathematica Applicata*, 2020, **33**(1): 25-35.

[9] MA T F, NARCISO V, PELICER M L. Long-time behavior of a model of extensible beams with nonlinear boundary dissipations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **396**(2): 694-703.

[10] WANG D X, ZHANG J W, WANG Y Z, et al. Attractor of beam equation with structural damping under nonlinear boundary conditions[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, **2015**: 857920. DOI: 10.1155/2015/857920.

[11] TIMOSHENKO S, YOUNG D H. *Vibration Problems in Engineering*[M]. 4th ed. New York: Wiley, 1974.

[12] ANDRADE N G. On a nonlinear system of partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1983, **91**(1): 119-130.

[13] ZHANG J W. The system of nonlinear beam equation acted by the joint effect of winding and twisting[C]// *The Fourth International Conference on Nonlinear Mechanics* (*ICNM-IV*). Shanghai, 2002: 1313-1316.

[14] 张建文. 复杂弹性结构的无穷维动力系统[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2018: 115-121.(ZHANG Jianwen. *Infinite Dimensional Dynamic System of Complex Elastic Structure*[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2018: 115-121.(in Chinese))

[15] CHUESHOV I, LASIECKA I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping[J]. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2008, **195**(912): 67-99.