ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887
http://www.applmathmech.cn

一类二阶双参数非线性时滞问题的奇摄动*

朱红宝, 陈松林

(安徽工业大学 数理科学与工程学院, 安徽 马鞍山 243002)

摘要: 该文讨论了一类含有两个参数的非线性时滞问题,利用奇异摄动方法,研究了当两个参数满足一定关系时,所提问题的渐近解的性态.首先利用奇异摄动方法求出了问题的外部解;再利用伸展变量法构造了问题在边界附近的边界层校正项,得出了所提问题的形式渐近解;最后,在合适的假设条件下,利用微分不等式理论证明了解的一致有效性.

关 键 词: 非线性; 奇摄动; 双参数; 时滞

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A DOI: 10.21656/1000-0887.410082

引 言

奇异摄动问题是近几十年来许多学者关心的热点问题,许多的奇摄动方法都被很好地运用到自然科学的诸多领域,许多学者,如 Jr O'Malley[1]、Chang 等[2]、Nayfeh[3]、De Jager 等[4]、Bohé[5]在这些方面做了大量的工作.同时,自然科学中很多问题的研究都可以用带有小参数的数学模型来进行描述,而含有两个参数的数学模型在物理问题中更是随处可见,如空气动力学、反应扩散、非线性波、大气物理、海洋科学、热传导等方面都有着很强的应用背景[6-7].Mo 等[8-10]又把这类问题推广到含有时滞变量的小参数问题,利用微分不等式理论研究了小参数满足一定关系下解的渐近性态.笔者也把这类问题进行了推广,研究了一类非线性的带有双参数的时滞问题,利用匹配法给出了所提问题的解的渐近展开式,并利用微分不等式理论证明了解的一致有效性[11].最近,笔者再把这类问题推广到分数阶奇异摄动问题,利用奇异摄动方法求出了问题的外部解,再利用伸展变量法构造了问题在边界附近的两个边界层校正项,得出了所提问题的形式渐近解[12].本文在所研究问题的基础上,再研究一类含有两个参数的二阶非线性时滞奇摄动边值问题,讨论两参数在一定关系下,问题的解的渐近性态,并利用微分不等式理论证明了渐近解的一致有效性.考虑以下的非线性奇异摄动时滞边值问题:

$$\varepsilon y'' + \mu p(x) y' = f(x, y(x-\mu)), \tag{1}$$

$$y = \alpha,\ -\mu \leqslant x \leqslant 0, \tag{2}$$

$$y = \beta,\ x = 1, \tag{3}$$

这里 ε 和 μ 均是趋于零的小的正常数, α 和 β 均是常数.首先做如下假设:

* **收稿日期:** 2020-03-17; **修订日期:** 2020-04-17

基金项目: 安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2019A0062)

作者简介: 朱红宝(1975—),男,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: zhuhb@ahut.edu.cn).

引用格式: 朱红宝, 陈松林. 一类二阶双参数非线性时滞问题的奇摄动[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(10): 1292-1296.

［H1］函数 f,p,h 关于其变元在对应的区域上充分光滑；

［H2］$f_y \geqslant \delta > 0$；

［H3］当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\varepsilon/\mu^2 \to 0$；

［H4］问题(1)～(3)的退化方程：$f(x,y)=0$ 存在一个满足 $y(1)=\beta$ 的根 Y^0.

首先对小参数引入如下变换：

$$\xi=\mu,\ \eta=\frac{\varepsilon}{\mu^2}, \tag{4}$$

即

$$\varepsilon=\xi^2\eta,\ \xi=\mu,$$

则问题(1)～(3)变为等式

$$\xi^2\eta y''+\xi p(x)y'=f(x,y(x-\xi)). \tag{5}$$

1　时滞问题的外部解

将式(5)中的函数 $y(x-\xi)$ 展开成 ξ 的幂级数形式如下：

$$y(x-\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n}\xi^n, \tag{6}$$

代入式(5)得

$$\xi^2\eta y''+\xi p(x)y'=f\left(x,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n}\xi^n\right). \tag{7}$$

设时滞问题(1)的外部解形如：

$$Y(x,\xi,\eta)\ \sim\sum_{i,j=0}^{\infty}Y_{ij}(x)\xi^i\eta^j. \tag{8}$$

将式(8)代入式(7)和(3)，方程右端的非线性项按照 ξ 和 η 的各阶次幂进行展开，比较等式两边 $\xi^0\eta^0$ 的系数得

$$f(x,Y_{00})=0,\ Y_{00}(1)=\beta.$$

由假设［H4］，显然

$$Y_{00}=Y^0. \tag{9}$$

类似地，再将式(8)代入式(7)和(3)，比较 $\xi^i\eta^j$ 的系数得

$$f_y(x,Y^0)Y_{ij}=F_{ij},\ Y_{ij}(1)=0,\qquad i,j=0,1,2,\cdots,\ i+j\neq 0, \tag{10}$$

其中 $F_{ij}(i,j=0,1,2,\cdots,i+j\neq 0)$ 为依次可以确定的函数，结构从略．这样由式(9)、(10)，我们得到了外部解的系数 Y_{ij}，从而确定了时滞问题(1)～(3)的外部解．但这个解不能满足条件(2)，所以需要在 $x=0$ 处构造激波层校正项．

2　激波层校正项

由假设可知问题(1)～(3)可能在 $x=0$ 附近产生激波，所以在 $x=0$ 处引入伸展变量：

$$\tau=\frac{x}{\xi}, \tag{11}$$

这样式(7)就化为

$$p(\tau\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=f\left(\tau\xi,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\tau^n}\xi^n\right)-\eta\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2}. \tag{12}$$

设

$$y = Y + U, \tag{13}$$

且

$$U \sim \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ij}(\tau)\xi^i\eta^j. \tag{14}$$

将式(13)、(14)代入式(12)和(2),再将非线性项按照 ξ 和 η 的各阶次幂进行展开,比较等式两边 ξ 和 η 的各阶次幂系数,可得

$$p(0)\frac{\mathrm{d}U_{00}}{\mathrm{d}\tau} = f(0, U_{00}), \tag{15}$$

$$U_{00}(0) = \alpha - Y_{00}(0), \tag{16}$$

$$p(0)\frac{\mathrm{d}U_{10}}{\mathrm{d}\tau} = f_y(0, U_{00})U_{10} + G_{ij}, \qquad i, j = 0,1,2,\cdots, i + j \neq 0, \tag{17}$$

$$U_{ij}(0) = - Y_{00}(0), \qquad i, j = 0,1,2,\cdots, i + j \neq 0, \tag{18}$$

其中 $G_{ij}(i, j = 0,1,2,\cdots,i + j \neq 0)$ 为依次可以确定的函数,结构从略.

由式(15)~(18),我们将得到 $U_{ij}(i, j = 0,1,2,\cdots)$ 并且有如下结论:

$$U(\tau) = O(\exp(-k_{ij}|\tau|)) = O\left(\exp\left(-k_{ij}\frac{|x|}{\xi}\right)\right), \qquad 0 < \xi,\mu \ll 1, \tag{19}$$

其中 k_{ij} 为正常数.将 U_{ij} 代入式(14),可得问题(1)~(3)的激波层校正项.由式(4)、(19)以及假设条件[H3],我们就得到了问题(1)~(3)的渐近展开式:

$$y \sim \sum_{i,j=0}^{m}(Y_{ij} + U_{ij})\xi^i\eta^j + O(\max(\mu^{m+1},(\varepsilon/\mu^2)^{m+1})), \qquad 0 < \mu,\varepsilon/\mu^2 \ll 1. \tag{20}$$

3 一致有效性

通过以上的讨论,二阶非线性时滞奇摄动边值问题(1)~(3)有一致有效的形式渐近解(20),为此,给出如下定理.

定理 1 二阶非线性时滞奇摄动问题(1)~(3)在假设[H1]~[H4]的条件下,存在一个激波解,且有形如式(20)的一致有效的形式展开式.

证明 先构造两个辅助函数 $\underline{y}$ 和 $\bar{y}$:

$$\underline{y} = Z_m - \gamma\zeta, \tag{21}$$

$$\bar{y} = Z_m + \gamma\zeta, \tag{22}$$

其中 $\zeta = \max(\mu^{m+1},(\varepsilon/\mu^2)^{m+1})$, γ 为一个足够大的正常数,将在后面取定,其中函数

$$Z_m = \sum_{i,j=0}^{\infty}(Y_{ij} + U_{ij})\xi^i\eta^j.$$

现在证明 $\underline{y}$ 和 $\bar{y}$ 分别为二阶非线性时滞奇摄动问题(1)~(3)的下解和上解.

显然 $\underline{y} \leqslant \bar{y}$,因为 γ 为足够大的正数,且由假设及式(21)、(22),显然有

$$\underline{y}(0,\varepsilon,\mu) \leqslant \alpha \leqslant \bar{y}(0,\varepsilon,\mu), \tag{23}$$

$$\underline{y}(1,\varepsilon,\mu) \leqslant \beta \leqslant \bar{y}(1,\varepsilon,\mu). \tag{24}$$

下面证明:

$$\varepsilon\underline{y}'' + \mu p(x)\underline{y}' - f(x,\underline{y}(x - \mu)) \geqslant 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{25}$$

$$\varepsilon\bar{y}'' + \mu p(x)\bar{y}' - f(x,\bar{y}(x-\mu)) \leqslant 0, \qquad 0 < x < 1. \tag{26}$$

本文只证明了式(26),式(25)可类似证明.考虑到假设条件,存在一个正常数 M, 有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\bar{y}'' + \mu p(x)\bar{y}' - f(x,\bar{y}(x-\mu)) = \\
&\quad \varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 Z_m}{\mathrm{d}x^2} + \mu p(x)\frac{\mathrm{d}Z_m}{\mathrm{d}x} - f(x,Z_m(x-\mu)) + \\
&\quad (-f(x,Z_m(x-\mu)+\gamma\zeta) + f(x,Z_m(x-\mu))) \leqslant \\
&\quad f(x,Y_{00}) + \sum_{i,\,j=0,i+j\neq 0}^{\infty}(f_y(x,Y^0)Y_{ij} - F_{ij})\xi^i\eta^j + \\
&\quad \left(p(0)\frac{\mathrm{d}U_{00}}{\mathrm{d}\tau} - f(0,U_{00})\right) + \sum_{i,\,j=0,i+j\neq 0}^{\infty}\left(p(0)\frac{\mathrm{d}U_{10}}{\mathrm{d}\tau} - f_y(0,U_{00})U_{10} - G_{ij}\right)\xi^i\eta^j + \\
&\quad M\zeta - f_y(x,\varsigma)\gamma\zeta \leqslant (M-\delta\gamma)\zeta \leqslant 0,
\end{aligned}$$

其中 ς 是中值常数,上式只要选择 $\gamma \geqslant M/\delta$ 即可,所以式(26)成立.由式(23)~(26)证明了 $\underline{y}$ 和 $\bar{y}$ 分别为二阶非线性时滞奇摄动边值问题(1)~(3)当 $x \in [0,1]$ 时的下解和上解,所以由微分不等式理论,时滞奇摄动边值问题(1)~(3)存在一个激波解,且满足: $\underline{y}(x,\varepsilon,\mu) \leqslant y(x,\varepsilon,\mu) \leqslant \bar{y}(x,\varepsilon,\mu)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 < \varepsilon,\mu \ll 1$.再由式(21)、(22),就能得到形如式(20)的一致有效的渐近展开式,定理得证.

4　结　　论

本文对含有两个参数的二阶非线性时滞奇摄动边值问题(1)~(3),在假设[H1]~[H4]下,根据两参数在一定关系下,构造了问题的外部解和激波层校正项,得出了如下的一致有效的形式渐近解:

$$y \sim \sum_{i,\,j=0}^{\infty}(Y_{ij} + U_{ij})\xi^i\eta^j + O(\max(\mu^{m+1},(\varepsilon/\mu^2)^{m+1})), \qquad 0 < \mu,\varepsilon/\mu^2 \ll 1.$$

文中讨论的双参数时滞奇摄动问题,其时滞变量和小参数不同时的问题,是笔者今后继续研究的重点.

参考文献(References):

[1] JR O'MALLEY R E. *Introduction to Singular Perturbation*[M]. New York: Academic Press, 1974.

[2] CHANG K W, HOWES F A. *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application*[M]. New York: Springer Verlag, 1984.

[3] NAYFEH A H. *Introduction for Perturbation Techniques*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.

[4] DE JAGER E M, JIANG Furu. *The Theory of Singular Perturbation*[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996.

[5] BOHÉ A. The shock location for a class of sensitive boundary value problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, **235**(1): 295-314.

[6] 冯依虎, 陈怀军, 莫嘉琪. 一类非线性奇异摄动自治微分系统的渐近解[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 355-363.(FENG Yihu, CHEN Huaijun, MO Jiaqi. Asymptotic solution to a class of nonlinear singular perturbation autonomous differential systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 355-363.(in Chinese))

[7] 韩祥临，石兰芳，莫嘉琪. 双参数非线性非局部奇摄动问题的广义解[J]. 数学进展，2016，**45**(1)：95-101.(HAN Xianglin，SHI Lanfang，MO Jiaqi. Generalized solution of nonlinear nonlocal singularly perturbed problems with two parameters[J]. *Advances in Mathematics*，2016，**45**(1)：95-101.(in Chinese))

[8] MO J Q，WANG W G，CHEN X F，et al. The shock wave solutions for singularly perturbed time delay nonlinear boundary value problems with two parameters[J]. *Mathematica Applicata*，2014，**27**(3)：470-475.

[9] WANG W G，SHI L F，HAN X L，et al. Singular perturbation problem for reaction diffusion time delay equation with boundary perturbation[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*，2015，**32**(2)：291-297.

[10] 韩祥临，汪维刚，莫嘉琪. 一类非线性微分-积分时滞反应扩散系统奇摄动问题的广义解[J]. 数学物理学报，2019，**39A**(2)：297-306.(HAN Xianglin，WANG Weigang，MO Jiaqi. Generalized solution to the singular perturbation problem for a class of nonlinear differential-integral time delay reaction diffusion system[J]. *Acta Mathematica Scientia*，2019，**39A**(2)：297-306.(in Chinese))

[11] 朱红宝. 一类非线性奇摄动时滞边值问题的激波解[J]. 中国科学技术大学学报，2018，**48**(5)：357-360.(ZHU Hongbao. The shock solutions for a class of singularly perturbed time delay nonlinear boundary value problems[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*，2018，**48**(5)：357-360.(in Chinese))

[12] 朱红宝. 一类分数阶非线性时滞问题的奇摄动[J]. 应用数学和力学，2019，**40**(12)：1356-1363.(ZHU Hongbao. The shock solution to a class of singularly perturbed time delay nonlinear boundary value problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2019，**40**(12)：1356-1363.(in Chinese))

A Class of 2nd-Order Singularly Perturbed Time Delay Nonlinear Problems With 2 Parameters

ZHU Hongbao， CHEN Songlin

(*School of Mathematics & Physics*，*Anhui University of Technology*，
Maanshan，*Anhui* 243002，*P.R.China*)

Abstract：A class of 2nd-order singularly perturbed time delay nonlinear problems were considered. The asymptotic solution to the problem was obtained with the singular perturbation method. Firstly，The outer solution was constructed by means of the singular perturbation method. Then，a stretched variable was introduced，the boundary layer correction of the solution was obtained，and the asymptotic analytic expansion solution to the problem was also given. Finally，under suitable conditions，the theory of differential inequalities was applied to prove the uniformly valid asymptotic expansion of the solution to the original problem.

Key words：nonlinear；singularly perturbed；2 parameters；time delay