

任意弹性边界的多段梁自由振动研究*

鲍四元, 周静, 陆健炜

(苏州科技大学 工程力学系, 江苏 苏州 215011)

摘要: 研究了连续多段梁的自由振动特性.为区别于诸简支等传统约束边界,提出了弹性约束边界下多段梁结构的自由振动特性分析方法.首先根据谱几何法,在传统 Fourier 级数的基础上添加四个辅助函数,构造了多段 Euler 梁中每段的横向位移函数.其次,将位移函数的假设谱几何形式代入多段梁结构的 Lagrange 函数得到新的表达式,由 Hamilton 原理将自由振动问题化成矩阵特征值形式,从而求解出任意弹性边界条件下多段梁的自振频率和模态.针对四个具体算例,通过改变边界处弹簧刚度值可求得不同边界条件下连续多段梁的自振频率和模态.与已有文献的结果比较,充分验证了该文方法的正确性、规范性和高效性.

关键词: 谱几何法; 任意边界; 多段梁; 自由振动

中图分类号: TU323

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.410045

引 言

梁结构广泛应用于建筑、航空航天和机械等工程领域.梁结构的振动问题是经典问题,多年来相关学者进行了大量的研究.Zhang 等^[1]使用变量分离结合传递矩阵方法导出梁的特征方程,阐述了具有不等跨度、可变横截面以及不连续性的任意性梁的几何特征.刘鹏等^[2]采用样条有限点法,研究了变截面 Bernoulli-Euler 梁的振动特性.田耀宗等^[3]针对一端可看作固定约束的轴向运动悬臂梁,基于连续体的模态叠加法推导了轴向运动梁动力响应的计算公式,并做实例计算.对三种常见类型梁(Euler 梁、Rayleigh 梁、Timoshenko 梁)的多跨结构的自由振动问题,刘向尧等^[4]建立了动力学模型并应用参数变易法分析,推导出梁振动的频率方程.这些研究大多是对等截面梁或者是截面尺寸有线性变化的梁进行研究.

对于截面尺寸突然变化的连续多段梁结构的研究已有多种解析方法,如李顺才等^[5]利用分离变量法假设梁的一种解析模态解,然后利用连续性条件和边界条件求解得到了阶梯梁的频率方程.李道奎等^[6]通过分布传递函数和 Laplace 变换的方法,得到了任意分段常轴压阶梯梁的自由振动的统一封闭解析解.Farghaly 等^[7]研究了轴向受载的多跨阶梯 Timoshenko 梁在一般端部约束条件下的振动特性,基于梁微分方程的解析解建立了频率方程的整体系数矩阵,并根据相关公式进行了参数分析.Li^[8]引入旋转弹簧模拟梁中的裂纹并得到多段梁振动模型,

* 收稿日期: 2020-01-23; 修订日期: 2020-03-08

基金项目: 国家自然科学基金(11202146)

作者简介: 鲍四元(1980—),男,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: bsiyuan@126.com).

引用格式: 鲍四元,周静,陆健炜.任意弹性边界的多段梁自由振动研究[J].应用数学和力学,2020,41(9): 985-993.

根据梁弯曲的基本解给出相邻段梁挠度的递推关系式,并利用两端边界条件对应线性齐次方程组有解的条件,解决了系统的振动问题。

综合研究现状知,大多数研究仅限于经典的边界条件或者某些特定的弹性边界,缺乏一种通用的方法来适应各种任意弹性边界条件.为研究任意边界条件下连续多段梁的自由振动问题,笔者建立了多段组合梁的一种简洁、规范的数值方法.具体思路如下:采用谱几何法^[9-10]构造各段梁的位移函数,并建立全段梁的 Lagrange 函数,应用 Hamilton 原理把多段梁的振动问题化为标准矩阵特征值形式,得到各阶频率和振型.其中所用位移的谱几何级数是在传统 Fourier 级数基础上增加四项辅助正弦函数^[10-14],使得梁在边界处的转角、弯矩等值可不等于零,从而使得位移函数适用于含弹性约束的梁结构的自由振动问题。

1 连续多段梁振动的计算模型

1.1 几何模型

图 1 是分析任意边界条件下连续多段梁振动特性模型图,总长为 L 的梁被分为 m 段,第 p 段的长度为 L_p ,梁左、右两端分别设置线弹簧和旋转弹簧,左、右两端边界线弹簧的刚度分别为 k_1 和 k_2 ,左、右两端旋转弹簧的刚度分别为 K_1 和 K_2 .第 p 段与 $p+1$ 段梁之间设置虚拟耦合线弹簧和旋转弹簧,其刚度 $k_{p,p+1}$ 和 $K_{p,p+1}$ 均为无穷大。

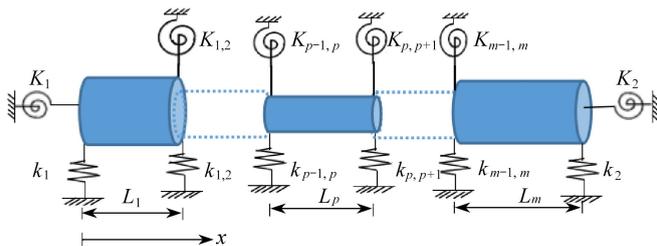


图 1 任意边界条件下连续多段梁模型

Fig. 1 The model for a continuous multi-segment beam under arbitrary boundary conditions

1.2 位移函数的谱几何法表示

对于多段梁结构,因为梁的振动方程为四阶微分方程,长度为 L 梁的位移函数 $w(x)$ 要满足三阶连续可导并且四阶导数存在,即 $w(x) \in C^3$.数学上来说,位移函数 $w(x)$ 可视为定义在区间 $[-L, L]$ 上偶函数的一部分,如图 2(a) 所示,这个偶函数的经典 Fourier 级数展开只包含余弦项,并且 Fourier 余弦级数能够在区间 $[0, L]$ 的任一点准确收敛到函数 $w(x)$.然而位移函数的导数 $w'(x)$ 是区间 $[-L, L]$ 上的奇函数,会在端点处发生跳跃.因此, $w'(x)$ 的 Fourier 级数展开会因为相应端点处的不连续而存在收敛性问题。

为了解决这个问题, Li^[11] 将位移函数表示为主函数和辅助函数相加的形式:

$$w(x) = \bar{w}(x) + p(x), \quad (1)$$

式中,主函数

$$\bar{w}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos(\lambda_j x), \quad (2)$$

其中, A_j 为常系数, $\lambda_j = j\pi/L$.而对于主函数 $\bar{w}(x)$ 在区间 $[0, L]$ 上两端连续且斜率为零,如图 2(b) 所示,可以看出这个函数在整个自变量区间内准确地收敛为该函数本身.为解决导数函数的不连续问题,相关的辅助函数 $p(x)$ 需满足

$$p'(x)|_{x=0} = w'(x)|_{x=0}, p'(x)|_{x=L} = w'(x)|_{x=L}, \quad (3)$$

$$p'''(x)|_{x=0} = w'''(x)|_{x=0}, p'''(x)|_{x=L} = w'''(x)|_{x=L}. \quad (4)$$

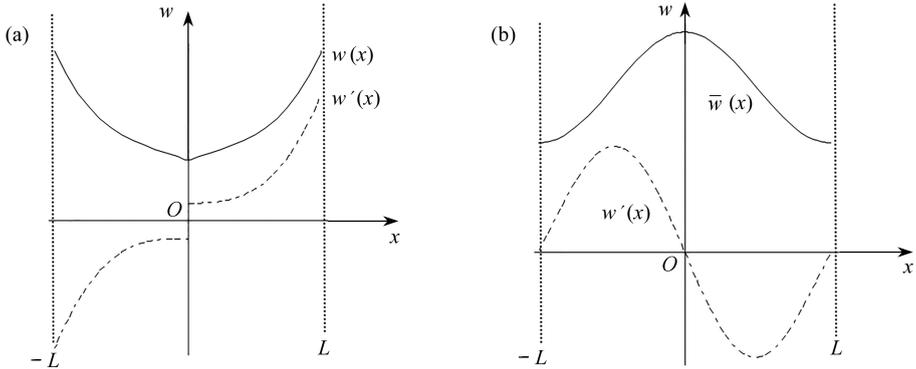


图2 位移函数在端点处的潜在不连续及解决方法

Fig. 2 Potential discontinuity of the displacement function at the endpoint and the solution way

引入 $p(x)$ 可完全解决函数一阶、二阶或是三阶导数中可能存在的导数不连续的问题,并使函数 $w(x)$ 在整个定义的区间内至少三阶导数可导,并且第四阶导数存在,从而完全满足梁结构内位移容许函数的需求。

当辅助函数是三角函数时,对应的改进 Fourier 级数可称为谱几何级数^[10]。故笔者对第 p 段梁挠度采用如下谱几何形式:

$$w_p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{p,j} \cos(\lambda_{p,j}x) + \sum_{j=-4}^{-1} A_{p,j} \sin(\lambda_{p,j}x), \quad (5)$$

其中 $A_{p,j}$ 为待定常数, $\lambda_{p,j} = j\pi/L_p$ 。相应地,设自由振动时第 p 段梁的挠度随时间的变化函数为

$$w_p(x,t) = w_p(x) \sin(\omega t), \quad (6)$$

式中, ω 为圆频率, $x \in [L_1 + L_2 + \dots + L_{p-1}, L_1 + L_2 + \dots + L_p]$ 。

1.3 自振频率的求解

对于图 1 所示的任意边界条件下连续多段梁结构,存在如下两部分势能:

$$V_s = \frac{1}{2} E_1 I_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^m E_p I_p \int_{L_1+L_2+\dots+L_{p-1}}^{L_1+L_2+\dots+L_p} \left(\frac{d^2 w_p}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (7)$$

$$V_b = \frac{1}{2} \left(k_1 w_1^2 |_{x=0} + K_1 \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 \Big|_{x=0} + k_2 w_m^2 |_{x=L} + K_2 \left(\frac{dw_m}{dx} \right)^2 \Big|_{x=L} \right), \quad (8)$$

式中, w_p 为第 p 段梁的挠度函数, V_s 为任意边界条件下连续多段梁结构应变能, V_b 为边界处模拟弹簧弹性势能, E_p, I_p 分别为第 p 段梁的弹性模量和截面惯性矩。

不考虑约束弹簧的质量,连续多段梁的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \rho(x) S(x) \left(\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^m \int_{L_1+L_2+\dots+L_{p-1}}^{L_1+L_2+\dots+L_p} \rho(x) S(x) \left(\frac{\partial w_p(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^{L_1} \rho(x) S(x) w_1^2 dx + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{p=2}^m \int_{L_1+L_2+\dots+L_{p-1}}^{L_1+L_2+\dots+L_p} \rho(x) S(x) w_p^2 dx, \quad (9)$$

式中, $S(x)$ 为梁坐标 x 处的横截面面积, $\rho(x)$ 为 x 处的质量密度, ω 是多段梁作简谐振动时的频率。

为保证相邻段梁位移及转角的连续性,在图 1 中第 p 与 $p+1$ 段梁之间耦合处引入竖向弹

第一段梁的圆截面直径 $d_1 = 40$ mm, 改变 d_1 和 d_2 比值, 本文方法所得的一阶频率值与解析法结果^[5] 进行对比, 数据完全吻合. 由表 2 可知, 悬臂边界条件下双段梁的一阶自振频率随着 d_1/d_2 的减小而不断减小.

表 1 C-F 边界下双段梁的一阶自振频率随 L_1/L_2 的变化

Table 1 The 1st natural frequencies of a 2-segment cantilever beam with variations of L_1/L_2

d_2 / mm	item	L_1/L_2							
		8	3.5	2	1.75	1.25	1	0.5	0.2
20	analytical solution ω / (rad/s)	9 574.61	11 217.2	12 654.7	13 055.7	12 584.2	11 691.9	8 198.11	5 656.26
	this paper ω / (rad/s)	9 568.0	11 220.8	12 656.9	12 860.3	12 588.9	11 694.1	8 199.35	5 656.58
	error δ / %	-0.07	0.03	0.02	-1.5	1.5	0.02	0.02	0.01
30	analytical solution ω / (rad/s)	8 876.48	9 556.34	10 044.8	10 125.6	10 191.1	10 090.8	9 109.15	7 580.81
	this paper ω / (rad/s)	8 886.36	9 560.53	10 049.8	10 132.2	10 194.9	10 094.6	9 111.47	7 581.9
	error δ / %	0.11	0.04	0.05	0.07	0.04	0.04	0.03	0.01
35	analytical solution ω / (rad/s)	8 494.57	8 796.66	8 994.52	9 027.12	9 062.28	9 038.4	8 707.97	8 015.87
	this paper ω / (rad/s)	8 518.43	8 808.71	9 002.26	9 035.01	9 069.37	9 043.32	8 711.3	8 017.29
	error δ / %	0.28	0.14	0.09	0.09	0.08	0.05	0.04	0.01

表 2 C-F 边界下双段梁的一阶自振频率随 d_1/d_2 的变化

Table 2 The 1st natural frequencies of a 2-segment cantilever beam with variations of d_1/d_2

item	d_1/d_2							
	8	7	6	5	4	3	2	1
analytical solution ω / (rad/s)	13 088.0	13 048.9	12 981.1	12 864.7	12 653.0	12 222.5	11 184.0	8 108.31
this paper ω / (rad/s)	13 092.4	13 057.1	12 979.7	12 869.5	12 654.7	12 219.0	11 184.5	8 125.35
error δ / %	0.03	0.06	-0.01	0.04	0.01	-0.03	0	0.21

算例 3 悬臂边界的圆截面双段梁, $L_1 = 117$ mm, $L_2 = 33$ mm, $\rho_1 = \rho_2 = 7\ 800$ kg/m³, 两段梁的圆截面直径分别为 $d_1 = 40$ mm, $d_2 = 38$ mm. 当弯曲刚度比 $E_1 I_1 / (E_2 I_2)$ 改变时, 本文所得一阶自振频率见表 3, 与解析法结果^[5] 对比可知, 频率误差小于 0.13%. 且发现双段悬臂梁的自振频率随着 $E_1 I_1 / (E_2 I_2)$ 的减小而不断增大.

表 3 C-F 边界下双段梁的一阶自振频率随 $E_1 I_1 / (E_2 I_2)$ 的变化

Table 3 The 1st natural frequencies of a 2-segment cantilever beam with variations of $E_1 I_1 / (E_2 I_2)$

E_1 / GPa	E_2 / GPa	$E_1 I_1 / (E_2 I_2)$	ω / (rad/s)		error δ / %
			analytical solution	this paper	
127	70	2.227	6 508.14	6 513.20	0.08
206	120	2.108	8 289.24	8 296.17	0.08
108	68	1.949	6 002.42	6 007.26	0.08
145	103	1.729	6 955.79	6 962.05	0.09
206	173	1.462	8 291.84	8 302.74	0.13

2.2 多段梁的振动特性分析

算例 4 两端固定的三段梁结构,参数选取如下: $L_1 = L_3 = 247.6 \text{ mm}$, $L_2 = 508 \text{ mm}$, 各段截面均为矩形,宽度分别为 $b_1 = b_3 = 38.2 \text{ mm}$, $b_2 = 25.7 \text{ mm}$, 高度分别为 $h_1 = h_2 = h_3 = 3.6 \text{ mm}$, 材料系数为 $E_1 = E_2 = E_3 = 26.3 \text{ GPa}$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1\,800 \text{ kg/m}^3$ (上述各参数下标 1,2,3 分别对应于图示梁的左、中、右段)。

本文所得该三段梁的前五阶自振频率见表 4,与文献[15]比较后发现这些自振频率的误差均在较小范围内,根据计算结果,绘出该连续三段梁结构的第一、二阶模态图如图 5、6 所示,由模态图可直观地得出三段梁在段与段连接处的位移函数及其一阶导数均连续。

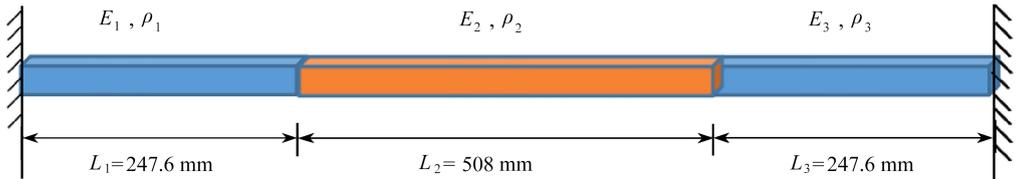


图 4 某两端固定的三段梁示意图

Fig. 4 Schematic diagram of a 3-segment beam with 2 ends clamped

表 4 C-C 边界下某三段梁的自振频率

Table 4 Natural frequencies of the 3-segment beam with clamped-clamped boundary conditions

frequency	ω / Hz		error $\delta / \%$
	ref. [15]	this paper	
ω_1	16.13	16.11	-0.12
ω_2	41.10	41.00	-0.24
ω_3	78.68	78.68	0
ω_4	130.55	130.55	0
ω_5	195.01	195.01	0

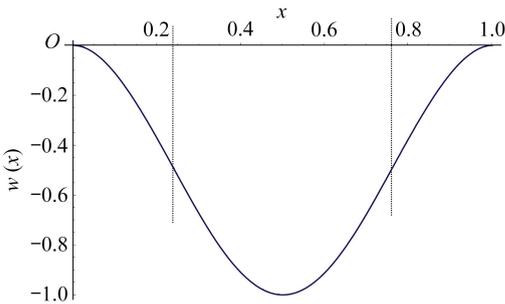


图 5 两端固定的三段梁的一阶模态图

Fig. 5 The 1st-order modal shape of the 3-segment beam with 2 ends clamped

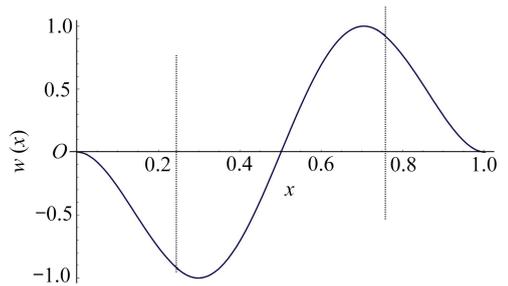


图 6 两端固定的三段梁的二阶模态图

Fig. 6 The 2nd-order modal shape of the 3-segment beam with 2 ends clamped

3 结 语

基于谱几何法和 Hamilton 原理,假设各段梁挠度的谱几何形式,利用矩阵特征值问题研究了任意边界条件下连续多段梁的振动特性,所提方法具有规范性和高效性,算例结果验证了方法的计算误差较小,本文理论为工程中连续多段梁的振动特性分析提供了良好的参考价值。

参考文献(References):

- [1] ZHANG Z G, WANG J, ZHANG Z Y, et al. Vibrations of multi-span non-uniform beams with arbitrary discontinuities and complicated boundary conditions[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2014, **18**(9): 1129-1141.
- [2] 刘鹏, 刘红军, 林坤, 等. 基于样条有限点法的变截面 Euler 梁横向自由振动分析[J]. 振动与冲击, 2016, **35**(11): 66-73.(LIU Peng, LIU Hongjun, LIN Kun, et al. Free transverse vibration analysis of tapered Bernoulli-Euler beams based on spline finite point method[J]. *Vibration and Shock*, 2016, **35**(11): 66-73.(in Chinese))
- [3] 田耀宗, 蹇开林. 轴向运动梁的横向振动分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(10): 1081-1088. (TIAN Yaozong, JIAN Kailin. Lateral vibration analysis of axially moving beams[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(10): 1081-1088.(in Chinese))
- [4] 刘向尧, 聂宏, 魏小辉. 多跨的三种梁的横向自由振动模型[J]. 振动与冲击, 2016, **35**(8): 21-26.(LIU Xiangyao, NIE Hong, WEI Xiaohui. The transverse free-vibration model of three multi-span beams[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, **35**(8): 21-26.(in Chinese))
- [5] 李顺才, 梁丽, 喻秋. 阶梯梁弯曲振动固有频率的理论研究[J]. 甘肃科学学报, 2018, **30**(4): 81-86.(LI Shunca, LIANG Li, YU Qiu. Theoretic study on inherent frequency of bending vibration of stepped beam[J]. *Gansu Journal of Science*, 2018, **30**(4): 81-86.(in Chinese))
- [6] 李道奎, 雷勇军, 唐国金. 分段轴压阶梯梁自由振动及稳定性分析的传递函数方法[J]. 国防科技大学学报, 2007, **29**(2): 1-4.(LI Daokui, LEI Yongjun, TANG Guojin. Free vibration and stability of multiple-step beams under stepped axial pressure by distributed transfer function method[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2007, **29**(2): 1-4.(in Chinese))
- [7] FARGHALY S H, EL-SAYED T A. Exact free vibration of multi-step Timoshenko beam system with several attachments[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, **72/73**: 525-546.
- [8] LI Q S. Vibratory characteristics of multi-step beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses[J]. *Applied Acoustics*, 2001, **62**(6): 691-706.
- [9] 石先杰, 李春丽, 史冬岩. 基于谱几何法的环板结构面内自由振动特性分析[C]//全国随机振动理论与应用学术会议. 北京, 2015.(SHI Xianjie, LI Chunli, SHI Dongyan. Free in-plane vibration analysis based on spectro-geometric method[C]//*National Conference on Theory and Application of Random Vibration*. Beijing, 2015.(in Chinese))
- [10] 石先杰, 李春丽, 蒋华兵, 等. 弹性边界条件下圆板横向自由振动特性分析[J]. 振动、测试与诊断, 2016, **36**(5): 984-989.(SHI Xianjie, LI Chunli, JIANG Huabing, et al. Free transverse vibration analysis of circular plate under elastic boundary condition[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2016, **36**(5): 984-989.(in Chinese))
- [11] LI W L. Free vibrations of beams with general boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **237**(4): 709-725.
- [12] BAO S Y, WANG S D. A generalized solution procedure for in-plane free vibration of rectangular plates and annular sectorial plates[J]. *Royal Society Open Science*, 2017, **4**(8): 170484. DOI: 10.1098/rsos.170484.
- [13] BAO S Y, WANG S D, WANG B. An improved Fourier-Ritz method for analyzing in-plane free vibration of sectorial plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(9): 1-9.
- [14] BAO S Y, WANG S D. A unified procedure for free transverse vibration of rectangular and an-

- nular sectorial plates[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, **89**(8): 1485-1499.
- [15] LEE J. Application of Chebyshev-tau method to the free vibration analysis of stepped beams [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, **101/102**: 411-420.

Free Vibration of Multi-Segment Beams With Arbitrary Boundary Conditions

BAO Siyuan, ZHOU Jing, LU Jianwei

(*Department of Engineering Mechanics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215011, P.R.China*)

Abstract: The vibration characteristics of continuous multi-segment beams were studied. Other than classical boundary conditions (such as simple supports), the elastic constraints were considered to analyze the free vibration characteristics of multi-segment beams. Firstly, according to the spectro-geometric method, 4 auxiliary functions were added on the basis of the traditional Fourier series to construct the lateral displacement function for each segment of the beam. Secondly, new expressions of the Lagrangian functions for the beam structure were obtained by substitution of the supposed spectro-geometric form into the Lagrangian functions. The free vibration problem was transformed into the standard matrix eigenvalue form from the Hamiltonian principle, and the natural frequencies and modes of the beam under arbitrary boundary conditions were obtained. For 4 numerical examples, the natural frequencies and modes of the continuous multi-segment beams were calculated under different boundary conditions of variant spring stiffness values. Comparison of the results between existing literatures and this work shows correctness, standardization and efficiency of the proposed method.

Key words: spectro-geometric method; arbitrary boundary; continuous multi-segment beam; free vibration

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202146)