

# 一类具有忆阻器的 Lorenz 型混沌系统 余维二分岔及无穷远处动力学分析\*

黄俊, 陈玉明

(广东技术师范大学 数学与系统科学学院, 广州 510665)

**摘要:** 基于经典的 Lorenz 系统,通过反馈控制的方式得到了一类具有忆阻器的三维混沌系统,对该系统分别从局部高余维分岔及无穷远全局动力学行为这两个方面进行了研究.首先,基于平均理论,对原点平衡点处的 zero-Hopf 分岔行为进行了分析;其次,基于中心流形理论,对原点平衡点处的 double-zero 分岔进行了分析;最后,根据 Poincaré 紧致化方法,对该系统在无穷远处的动力学行为进行了研究.

**关键词:** Lorenz 系统; zero-Hopf 分岔; double-zero 分岔; 无穷远动力学

**中图分类号:** O175

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.410023

## 引言

混沌作为非线性科学中一种特有的复杂现象,其理论研究与实际应用已成为非线性科学领域的研究热点及重点.著名的 Lorenz 系统是首个被提出的混沌系统,它是由 Lorenz 于 1963 年在分析大气对流模型所对应的三维方程组时,运用数值计算方法发现的.Lorenz 系统的解对初始值敏感依赖,这意味着初始值的小扰动会随着时间的延续对最终的结果产生巨大影响,此性质被 Lorenz 形象地解释为“蝴蝶效应”.而忆阻器自提出并证实以来,因其非线性的特性,被广泛应用在混沌系统中.带有忆阻器的混沌系统具有更加复杂的动力学行为,且更具初始条件敏感性<sup>[1]</sup>,因此在图像加密<sup>[2]</sup>、保密通信<sup>[3]</sup>等领域有着广泛的应用前景.

文献[4]提出了一种新型浮地忆阻器混沌电路<sup>[5]</sup>,分析了其基本动力学特性和 Hopf 分岔,并且证明在初始条件改变时,能产生共存吸引子和混沌吸引子与周期极限环共存现象,但没有对其高余维分岔<sup>[6]</sup>进行分析.在文献[7]中,笔者对带有忆阻器的 Lorenz 型系统的 Pitchfork 分岔以及 Hopf 分岔等余维一分岔进行了分析.而在本文中,我们将研究 zero-Hopf 分岔 (zero-Hopf 平衡点是指具有一个零特征值以及一对纯虚特征值的孤立平衡点,其余特征值都有非零实部)和 double-zero 分岔 (double-zero 平衡点是指具有两个零特征值,其余特征值都有非零实部)等高余维分岔行为,以及系统在无穷远处的动力学行为.研究的系统如下:

\* 收稿日期: 2020-01-10; 修订日期: 2020-10-13

**基金项目:** 国家自然科学基金(11701104);广东省普通高校特色创新项目(2016KTSCX076)

**作者简介:** 黄俊(1994—),男,硕士生(E-mail: supersix233@qq.com);

陈玉明(1987—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: blkhpz@126.com).

**引用格式:** 黄俊,陈玉明.一类具有忆阻器的 Lorenz 型混沌系统余维二分岔及无穷远处动力学分析[J].应用数学和力学,2020,41(11):1275-1283.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = dx - (1 + a + \rho r)y - axz - 3\rho kx^2y, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + \frac{xy}{a} + x^2, \end{cases} \quad (1)$$

其中参数  $a, b$  为原 Lorenz 系统中的参数,  $d$  为原 Lorenz 系统参数中的  $a(c-1)$ ,  $r, k$  为忆阻器模型参数,  $\rho$  为忆阻器强度参数, 且满足  $\rho > 0$ . 当参数条件为  $a = 10.47, b = 3.61, d = 192.64, k = -0.02, \rho = 1.25, r = 0.36$ , 初值条件为  $x = 0.1, y = 0, z = 0$  时, 系统为混沌状态, 其相图如图 1 所示. 该混沌吸引子对应的 Lyapunov 指数为<sup>[8]</sup>

$$\lambda_{LE_1} = 1.3447, \lambda_{LE_2} = 0.0001, \lambda_{LE_3} = -12.1859.$$

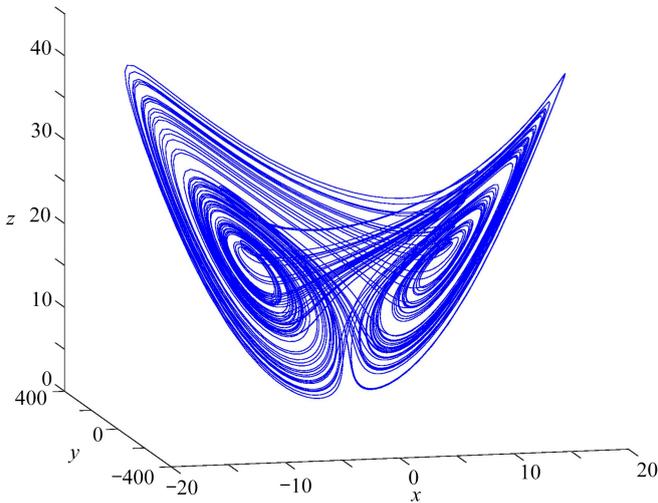


图 1 系统(1)的相图

Fig. 1 The phase diagram of system(1)

## 1 Zero-Hopf 分岔

在三维混沌系统的研究中, 有很多学者研究了系统平衡点的 zero-Hopf 分岔现象<sup>[9-10]</sup>. 从这些文献可以看出, 在一定的条件下, 从局部的 zero-Hopf 平衡点处可以分岔出一些复杂的不变集, 也就是说, 在某些情况下, zero-Hopf 平衡点的出现便意味着“混沌”的产生. 因此在这一节将致力于研究系统(1)的 zero-Hopf 分岔, 在此之前先来引入相关的概念以及定理.

考虑如下形式的微分系统:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}) + \varepsilon \mathbf{F}_1(t, \mathbf{X}) + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2(t, \mathbf{X}, \varepsilon), \quad (2)$$

其中  $\varepsilon$  可以任意小或充分小, 且满足  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 > 0$ , 函数  $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1: \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n, \mathbf{F}_2: \mathbf{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbf{R}^n$  是  $C^2$  光滑函数, 并且关于第一个变量  $t$  是  $T$  周期函数,  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^n$  中的开子集. 利用平均理论, 可以研究系统(2)中  $T$  周期解的分岔问题, 其主要假设是无扰动系统

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}) \quad (3)$$

有一个周期解的子流形.

假设  $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$  是系统(3)的周期解, 且满足  $\mathbf{X}(0, \mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(T, \mathbf{X}_0)$ , 那么系统(3)沿着

它的周期解的线性化系统可以重写为

$$\dot{Y} = D_X F_0(t, X(t, X_0)) Y. \tag{4}$$

记  $M_{X_0}(t)$  为线性微分系统(4)的一个基本矩阵.

假设存在一个开集  $V$ , 满足  $\text{cl}(V) \subset \Omega$  ( $\text{cl}$  即 closure, 闭包), 使得每一个  $X_0 \in \text{cl}(V)$ , 有  $X(t, X_0)$  是系统(3)的  $T$  周期解.  $\text{cl}(V)$  是一个仅由周期解构成的集合, 它被称为系统(3)的同步集. 关于包含周期解  $X(t, X_0)$  的集合  $\text{cl}(V)$  的周期解分岔结论由以下定理给出.

**定理 1**<sup>[11]</sup> (同步集的扰动) 假设存在一个有界开集  $V$ , 满足  $\text{cl}(V) \subset \Omega$ , 使得每一个  $X_0 \in \text{cl}(V)$ , 那么解  $X(t, X_0)$  是以  $T$  为周期的, 考虑函数  $F: \text{cl}(V) \rightarrow R^n$ ,

$$F(X_0) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{X_0}^{-1}(t, X_0) F_1(t, X(t, X_0)) dt.$$

则有下列表达成立:

1) 如果存在  $X^* \in V$  满足  $F(X^*) = 0$ , 且  $\det((\partial F / \partial X_0)(X^*)) \neq 0$ , 那么系统(2)存在一个以  $T$  为周期的解  $X(t, \varepsilon)$ , 且当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $X(0, \varepsilon) \rightarrow X^*$ ;

2) 周期解  $X(t, \varepsilon)$  的稳定性类型由 Jacobi 矩阵  $(\partial F / \partial X_0)(X^*)$  的特征值决定.

**命题 1** 当  $b = 0, a = -\rho r - 1, d = -\omega^2$  时, 系统(1)的原点平衡点为 zero-Hopf 平衡点.

**证明** 考虑系统(1)在原点平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d & -a - \rho r - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(a + b + \rho r + 1) + \lambda(ab + b\rho r + b - d) - bd.$$

为了使得原点平衡点为 zero-Hopf 平衡点, 需要使

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \omega^2).$$

通过比较系数, 可以得到这个等式成立的唯一条件:

$$b = 0, a = -\rho r - 1, d = -\omega^2,$$

即当满足上述条件, 系统(1)的原点平衡点为 zero-Hopf 平衡点.

在得出系统(1)存在 zero-Hopf 平衡点的条件后, 接下来我们分析具体的分岔情况.

**定理 2** 假设系统(1)的参数满足  $b = \varepsilon b_1, r = -(a + 1)/\rho + \varepsilon r_1, d < 0$ , 对任意小的  $\varepsilon$ , 系统(1)在原点平衡点产生的 zero-Hopf 分岔没有分岔出周期解.

**证明** 做变换  $b \rightarrow \varepsilon b_1, r \rightarrow -(a + 1)/\rho + \varepsilon r_1$ , 其中  $0 < \varepsilon \ll 1, b_1, r_1$  是非零实数, 系统(1)变成

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = dx - axz - 3k\rho x^2 y - \varepsilon\rho r_1 y, \\ \dot{z} = x^2 + \frac{xy}{a} - \varepsilon b_1 z. \end{cases} \tag{5}$$

进一步重新调整变量, 令  $(x, y, z)^T = (\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w)$ , 再重新令变量  $(u, v, w)^T = (x, y, z)^T$ , 则系统(5)变成

$$\dot{X} = F_0(t, X) + \varepsilon F_1(t, X) + \varepsilon^2 F_2(t, X, \varepsilon) =$$

$$\begin{pmatrix} y \\ dx \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -axz - \rho r_1 y \\ b_1 z + x^2 + \frac{x y}{a} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3kpx^2 y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

在定理 1 中描述的平均理论的帮助下,可以研究系统(6)的行为.考虑如下无扰动系统的初值问题:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}), \mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0). \quad (7)$$

无扰动系统(7)的解是  $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0) = (x(t), y(t), z(t))$ , 其中

$$x(t) = x_0 \cosh(mt) + \frac{y_0 \sinh(mt)}{m}, \quad y(t) = mx_0 \sinh(mt) + y_0 \cosh(mt), \quad z(t) = z_0,$$

$$m = \sqrt{d}.$$

值得注意的是,系统(7)所有满足  $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{0}$  的解  $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$  都是周期的,且周期都为  $T = 2\pi/m$ .沿着系统(7)的周期解  $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$ ,可以把线性化系统  $\dot{\mathbf{Y}} = D_{\mathbf{X}}(\mathbf{F}_0(t, \mathbf{X}_0))$  的基本矩阵  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_0}(t)$  写成如下形式:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}_0}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(mt) & \frac{\sinh(mt)}{m} & 0 \\ m \sinh(mt) & \cosh(mt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

它的逆矩阵为

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}_0}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(mt) & -\frac{\sinh(mt)}{m} & 0 \\ -m \sinh(mt) & \cosh(mt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算定理 1 中积分可得

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_0}^{-1}(t, \mathbf{X}_0) \mathbf{F}_1(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)) dt = (f_1(\mathbf{X}_0), f_2(\mathbf{X}_0), f_3(\mathbf{X}_0)),$$

其中

$$f_1(\mathbf{X}_0) = -\frac{1}{2} \left( \rho r_1 x_0 + \frac{a y_0 z_0}{d} \right), \quad f_2(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{2} (-a x_0 z_0 - \rho r_1 y_0),$$

$$f_3(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{2} \left( -2b_1 z_0 + x_0^2 - \frac{y_0^2}{d} \right).$$

求解非线性方程  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$ , 只能得到下面一个解:

$$\mathbf{S}_0 = (0, 0, 0),$$

故系统(1)在原点处发生 zero-Hopf 分岔时,没有产生周期解.

## 2 Double-zero 分岔

本节将研究系统(1) double-zero 平衡点的动力学行为,基于文献[12]中定理 7.2 和 7.3,我们得知:

**引理 1**<sup>[12]</sup> 假设原点是系统

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = Q(u, v) \end{cases}$$

的孤立奇点,故原系统可写成

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = Q(u, v) = \alpha_r u^r (1 + \varphi(u)) + \beta_n u^n v (1 + \phi(u)) + v^2 \psi(u, v), \end{cases}$$

其中  $\varphi(u), \phi(u), \psi(u, v)$  是解析函数,  $\varphi(0) = \phi(0) = 0, r \geq 2, \alpha_r \neq 0, \beta_n$  可为零, 当  $\beta_n \neq 0$  时,  $n \geq 1$ . 则奇点  $O$  的性态如下:

1) 当  $r = 2m + 1$  时, 令  $\Delta_r = \beta_n^2 + 4(m + 1)\alpha_r$ , 那么下列表达成立:

(a) 如果  $\alpha_r > 0$ , 那么奇点  $O$  是鞍点;

(b) 如果  $\alpha_r < 0, \beta_n \neq 0, n$  是偶数, 当  $n < m$ , 或  $n = m$  且  $\Delta_r \geq 0$ , 那么奇点  $O$  是结点;

(c) 如果  $\alpha_r < 0, \beta_n \neq 0, n$  是奇数, 当  $n < m$ , 或  $n = m$  且  $\Delta_r \geq 0$ , 那么奇点  $O$  的邻域由一个双曲扇形和一个椭圆扇形组成;

(d) 如果  $\alpha_r < 0$ , 当  $\beta_n = 0$ , 或  $\beta_n \neq 0, n > m, \Delta_r < 0$ , 或  $\beta_n \neq 0, n = m, \Delta_r < 0$ , 那么奇点  $O$  是中心或焦点.

2) 当  $r = 2m$  时, 那么下列表达成立:

(a) 如果  $\beta_n = 0$ , 或  $\beta_n \neq 0, n \geq m$ , 那么奇点  $O$  是退化奇点;

(b) 如果  $\beta_n \neq 0, n < m$ , 那么奇点  $O$  是鞍结点.

基于引理 1, 系统(1)在原点处的 double-zero 局部动力学行为由如下定理给出.

**定理 3** 当参数值经过临界值  $b = 0, \rho r = -1$  时, 系统(1)在原点平衡点处会发生 double-zero 分岔, 且有以下 4 种情况:

1) 当  $b > 0, \rho r > -1$  时, 平衡点  $E_0$  是鞍点, 且有一维稳定流形和二维不稳定流形;

2) 当  $b > 0, \rho r < -1$  时, 平衡点  $E_0$  是中心或焦点, 且有三维稳定流形;

3) 当  $b < 0, \rho r < -1$  时, 平衡点  $E_0$  是鞍点, 且有三维不稳定流形;

4) 当  $b < 0, \rho r > -1$  时, 平衡点  $E_0$  是中心或焦点, 且有一维不稳定流形和二维稳定流形.

**证明** 令  $a = -1 - \rho r, d = 0$ , 系统(1)转换为如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -(-1 - \rho r)xz - 3\rho kx^2y, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + \frac{xy}{-1 - \rho r} + x^2. \end{cases}$$

其在原点平衡点处的 Jacobi 矩阵为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

矩阵  $A_1$  的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -b,$$

对应的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

运用中心流形定理,将三维流形限制在特征值为零所对应的中心流形上,平衡点  $E_0$  在  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  附近的稳定性由  $\alpha_r, \beta_n$  的符号,  $n, m$  的大小及  $r$  的奇偶性决定.通过计算,可以得到中心流形为

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = y, \\ \dot{y} = Q(x, y) = \frac{(1 + \rho r)x^3}{b} - \frac{(2 + b + 9b^2\rho + 2\rho r)x^2y}{b^2} + \\ \frac{(2 + b + 2\rho r)xy^2}{b^3} + O(\| (x, y) \|^5). \end{cases}$$

根据上式,可以得到

$$Q(x, y) = \alpha_3 x^3(1 + \varphi(x)) + \beta_2 x^2 y(1 + \phi(x)) + y^2 \psi(x, y),$$

其中,  $\varphi(x), \phi(x), \psi(x, y)$  是解析函数,  $\alpha_3 = (1 + \rho r)/b, \beta_2 = -(2 + b + 9b^2\rho + 2\rho r)/b^2$ , 通过讨论  $\alpha_3$  和  $\beta_2$  的符号即可得到定理 3.

### 3 无穷远处的动力学行为

这一节将研究系统(1)的流在其无穷远处的动力学行为,为方便研究,我们将系统(1)重写为

$$\dot{x}_1 = f_1, \dot{x}_2 = f_2, \dot{x}_3 = f_3,$$

其中

$$\begin{cases} f_1 = x_2, \\ f_2 = -x_2 t(a + 3k\rho x_1^2 + \rho r + 1) - ax_1 x_3 + dx_1, \\ f_3 = \frac{x_1 x_2}{a} - bx_3 + x_1^2. \end{cases} \quad (8)$$

根据  $R^3$  空间中的 Poincaré 紧致化方法<sup>[13]</sup>,通过可逆的坐标变换,将原系统(1)在其相空间  $R^3$  中的向量场投影到坐标卡  $U_i, V_i (i = 1, 2, 3)$  上,然后分析坐标卡上的新向量场即可.下面分别在坐标卡  $U_i, V_i (i = 1, 2, 3)$  上研究系统(1)的动力学行为<sup>[14]</sup>.

#### 3.1 局部坐标卡 $U_1$ 及 $V_1$

系统(1)在局部坐标卡  $U_1$  下的 Poincaré 紧致化的表达式为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_3^2(z_1(az_3 - d + z_2(3k\rho z_1 + 1)) + z_2(a + \rho r + 1)), \\ \dot{z}_2 = \frac{z_3^2(-a(bz_3 + z_2^2) + az_1^2 + z_2 z_1)}{a}, \\ \dot{z}_3 = -z_2 z_3^3. \end{cases} \quad (9)$$

空间  $\{(z_1, z_2, z_3) \in R^3 \mid z_3 = 0\}$  在系统(9)的作用下保持不变,其对应于系统(8)相空间  $R^3$  的无穷远处.系统(9)具有一个二维平衡点平面,整个  $z_1$ - $z_2$  平面上的点  $(z_1^*, z_2^*, 0)$  都是系统(9)的平衡点,并且系统(9)在这些平衡点处的 Jacobi 矩阵的三个特征值全为零.

为了完全描述系统(8)在无穷远球面上的动力学性质,限制在空间  $\{(z_1, z_2, z_3) \in R^3 \mid z_3 = 0\}$  上,系统(9)被约化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0, \\ \dot{z}_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

当  $t = 0$  时,令初始条件  $(z_1, z_2) = (z_1(0), z_2(0))$ , 可得系统(10)具有如下形式的解:

$$z_1 = z_1(0), z_2 = z_2(0).$$

由于在坐标卡  $V_1$  上的紧致化向量场与坐标卡  $U_1$  上的紧致化向量场只差一个符号  $(-1)$ , 即系统(8)在局部坐标卡  $V_1$  上的流与在局部坐标卡  $U_1$  上的流相反.

### 3.2 局部坐标卡 $U_2$ 及 $V_2$

系统(1)在局部坐标卡  $U_2$  下的 Poincaré 紧致化的表达式为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3^2(z_1(z_1(az_3 - d + 3kpz_1z_2) + z_2(a + \rho r + 1)) + z_2), \\ \dot{z}_2 = \frac{z_3^2(z_2z_1(a^2z_3 - ad + 1) - abz_3 + z_1^2(3ak\rho z_2^2 + a) + az_2^2(a + \rho r + 1))}{a}, \\ \dot{z}_3 = z_3^3(z_1(az_3 - d + 3kpz_1z_2) + z_2(a + \rho r + 1)). \end{cases} \quad (11)$$

空间  $\{(z_1, z_2, z_3) \in R^3 \mid z_3 = 0\}$  在系统(11)的作用下保持不变, 其对应于系统(8)相空间  $R^3$  的无穷远处. 系统(11)具有一个一维平衡点直线,  $z_2$  轴上的点  $(0, z_2^*, 0)$  都是系统(11)的平衡点, 并且系统(11)在这些平衡点处的 Jacobi 矩阵的三个特征值全为零.

为了完全描述系统(8)在无穷远球面上的动力学性质, 限制在空间  $\{(z_1, z_2, z_3) \in R^3 \mid z_3 = 0\}$  上, 系统(11)被约化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0, \\ \dot{z}_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

系统(12)与系统(10)是完全一样的.

系统(8)在局部坐标卡  $V_2$  上的流也与在局部坐标卡  $U_2$  上的流相反.

### 3.3 局部坐标卡 $U_3$ 及 $V_3$

系统(1)在局部坐标卡  $U_3$  下的 Poincaré 紧致化的表达式为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{z_3^2(abz_3z_1 - az_1^3 + az_2 - z_2z_1^2)}{a}, \\ \dot{z}_2 = -\frac{z_3^2(az_2(a - bz_3 + \rho r + 1) + z_1(a(az_3 - d) + z_2^2) + az_2z_1^2(3k\rho + 1))}{a}, \\ \dot{z}_3 = \frac{z_3^3(abz_3 - z_1(az_1 + z_2))}{a}. \end{cases} \quad (13)$$

当  $z_3 = 0$  时, 与坐标卡  $U_2$  的情形类似, 原点  $(0, 0, 0)$  为系统(13)的平衡点, 并且在该平衡点处, 系统(13)的 Jacobi 矩阵的三个特征值全为零.

限制在空间  $\{(z_1, z_2, z_3) \in R^3 \mid z_3 = 0\}$  上, 系统(13)被约化为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0, \\ \dot{z}_2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

系统(14)与系统(12)也是完全一样的.

系统(8)在局部坐标卡  $V_3$  上的流也与在局部坐标卡  $U_3$  上的流相反.

**定理 4** 对任意实参数  $a, b, d, \rho, r, k$ , 系统(1)在无穷远处具有如下动力学性质:

- 1) 系统(1)的所有无穷远奇点都落在空间  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x \neq 0\}$  的无穷远处, 反之也成立, 即, 空间  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x \neq 0\}$  无穷远处的所有点都是系统(1)的无穷远奇点;
- 2) 限制在空间  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0, y \neq 0\}$  无穷远处, 系统(1)与系统(12)拓扑共轭;
- 3) 限制在空间  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0, y = 0, z \neq 0\}$  无穷远处, 系统(1)与系统(14)拓扑共轭.

## 4 结 论

本文研究了一类具有忆阻器的 Lorenz 型系统的余维二分岔及无穷远处动力学行为问题,利用平均理论得到了系统发生 zero-Hopf 分岔的条件以及分岔情况,在中心流形定理的基础上给出了系统发生 double-zero 分岔时的稳定性分析,最后根据 Poincaré 映射在四维空间的三组坐标卡上分析了系统的无穷远处的动力学行为.关于无穷远处动力学的研究,弥补了系统局部分析的不足,丰富了系统全局动力学行为.通过以上研究,表明忆阻器混沌系统的高余维分岔与余维一分岔差异巨大,丰富了我们对于忆阻器混沌系统高余维分岔特性的认识.在以后的研究中,高余维分岔或将成为分析忆阻器混沌系统中必不可少的一环.

### 参考文献 (References):

- [1] BAO B C, XU J P, LIU Z. Initial state dependent dynamical behaviors in a memristor based chaotic circuit[J]. *Chinese Physics Letters*, 2010, **27**(7): 070504.
- [2] LIN Z H, WANG H X. Efficient image encryption using a chaos-based PWL memristor[J]. *IE-TE Technical Review*, 2010, **27**(4): 318-325.
- [3] SUN J W, SHEN Y, YIN Q, et al. Compound synchronization of four memristor chaotic oscillator systems and secure communication[J]. *Chaos*, 2013, **23**(1): 013140.
- [4] 王伟, 曾以成, 陈争, 等. 忆阻器混沌电路产生的共存吸引子与 Hopf 分岔[J]. 计算物理, 2017, **34**(6): 747-756. (WANG Wei, ZENG Yicheng, CHEN Zheng, et al. Coexisting attractors and Hopf bifurcation in floating memristors based chaotic circuit[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2017, **34**(6): 747-756. (in Chinese))
- [5] 陈秋杰, 李文. 忆阻器混沌电路的硬件实现[J]. 工业控制计算机, 2018, **31**(11): 155-156. (CHEN Qiujie, LI Wen. Hardware implementation of memristor chaotic circuit[J]. *Industrial Control Computer*, 2018, **31**(11): 155-156. (in Chinese))
- [6] 周颢. 余维 2 的叉形分岔[J]. 力学与实践, 1996, **18**(1): 26-27. (ZHOU Kun. The fork bifurcation of codimension 2[J]. *Mechanics in Engineering*, 1996, **18**(1): 26-27. (in Chinese))
- [7] 黄俊, 陈玉明. 一类具有忆阻器的 Lorenz 型混沌系统稳定性及余维一分岔分析[J]. 应用数学进展, 2019, **8**(4): 858-867. (HUANG Jun, CHEN Yuming. Stability and co-dimension one bifurcation analysis of a class of Lorenz chaotic systems with memristor[J]. *Advances in Applied Mathematics*, 2019, **8**(4): 858-867. (in Chinese))
- [8] 张海龙, 闵富红, 王恩荣. 关于 Lyapunov 指数计算方法的比较[J]. 南京师范大学学报(工程技术版), 2012, **12**(1): 5-9. (ZHANG Hailong, MIN Fuhong, WANG Enrong. The comparison for Lyapunov exponents calculation methods[J]. *Journal of Nanjing Normal University (Engineering and Technology Edition)*, 2012, **12**(1): 5-9. (in Chinese))
- [9] GUCKENHEIMER J. On a codimension two bifurcation[J]. *Lecture Notes in Mathematics*, 1981, **898**: 99-142.
- [10] 韩茂安. 三维系统余维二分支中周期轨道与不变环面的存在性[J]. 系统科学与数学, 1998, **18**(4): 403-409. (HAN Maoan. Existence of periodic orbits and invariant tori in co-dimension two bifurcations of three dimensional systems[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1998, **18**(4): 403-409. (in Chinese))
- [11] CHEN Y M, LIANG H H. Zero-zero-Hopf bifurcation and ultimate bound estimation of a generalized Lorenz-Stenflo hyperchaotic system[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, **40**: 3424-3432.

- [12] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997. (ZHANG Zhifen, DING Tongren, HUANG Wenzao, et al. *Qualitative Theory of Differential Equations* [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese))
- [13] CIMA A, LLIBRE J. Bounded polynomial vector fields[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1990, **318**: 557-579.
- [14] 陈玉明. 基于 Lorenz 型系统的四维超混沌系统的复杂动力学研究[D]. 博士学位论文. 广州: 华南理工大学, 2014. (CHEN Yuming. Research on complex dynamics of four-dimensional hyperchaotic systems based on Lorenz-type systems[D]. PhD Thesis. Guangzhou: South China University of Technology, 2014. (in Chinese))

## Codimension-2 Bifurcation Dynamics and Infinity Analysis of a Class of Lorenz Chaos Systems With Memristors

HUANG Jun, CHEN Yuming

(School of Mathematics and Systems Science, Guangdong Polytechnic  
Normal University, Guangzhou 510665, P.R.China)

**Abstract:** Based on the classical Lorenz system, a class of 3D memristive chaotic systems were obtained through feedback control, and the local high codimensional bifurcation and the infinite global dynamic behavior of the system were studied. Firstly, according to the average theory, the zero-Hopf bifurcation behavior at the origin equilibrium point was analyzed. Secondly, with the center manifold theory, the double-zero bifurcation at the origin of the system was investigated. Finally, according to the Poincaré compactification method, the dynamics at infinity of the system was discussed.

**Key words:** Lorenz system; zero-Hopf bifurcation; double-zero bifurcation; dynamics at infinity

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11701104)