

# 不可压缩黏性流体的二维 Navier-Stokes 方程的间断有限元模拟\*

陈亚飞, 郑云英

(淮北师范大学 数学科学学院, 安徽 淮北 235000)

**摘要:** 由于不可压缩 Navier-Stokes 方程由守恒律、扩散及约束发展方程混合构成, 为测试数值方法, 该文基于非结构网格, 对该方程建立了 DG (discontinuous Galerkin) 格式, 讨论了不同黏性系数  $\nu$  在方腔涡流问题的数值结果, 验证了该方法的有效性且不依赖于问题的维数. 圆柱绕流问题的模拟结果进一步表明此方法精度高、可有效求解具有运动界面的不可压缩黏性流体问题, 使得模拟边界层、剪切层及复杂涡流解十分有效, 并可以成功地推广到解决复杂现象数值模拟中的激波结构.

**关键词:** Navier-Stokes 方程; 间断有限元方法; 黏性流体

**中图分类号:** O241.82

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.400379

## 引 言

Navier-Stokes 方程在流体力学中有很重要的意义, 是一个非线性偏微分方程, 对于 Navier-Stokes 方程问题的数值求解, 国内外学者都进行了大量研究. 2004 年, 曹伟<sup>[1]</sup>应用高阶 Taylor 展开式给出了时间增量的 Galerkin 方法, 并对不可压缩流体建立了流动分析模型. 2005 年, Nagrath 等<sup>[2]</sup>通过 SUPG (streamline upwind Petrov Galerkin) 方法数值模拟了不可压缩 Navier-Stokes 方程. 2007 年, 马飞遥等<sup>[3]</sup>基于粗网格及细网格上的函数空间, 将定常的不可压缩的 Navier-Stokes 方程转化为一个线性问题来进行求解. 2008 年, 骆艳、冯民富<sup>[4]</sup>对可压缩线性 Navier-Stokes 方程, 利用压力梯度投影与间断有限元法相结合, 给出了一种求解此方程的稳定格式. 2011 年, Cho 等<sup>[5]</sup>采用 Taylor-Galerkin 方法离散 LS 函数的平流方程, 采用 P1P1 分裂有限元方法求解 Navier-Stokes 方程及基于结构网格模拟了不可压缩问题. 2013 年, Heimann 等<sup>[6]</sup>在结构网格上基于非对称内部惩罚方法, 给出了求解不相容不可压缩两相流问题的间断 Galerkin 方法. 2013 年, 章争荣<sup>[7]</sup>以 Galerkin 加权余量积分式为基础, 对不可压缩黏性流动 Navier-Stokes 方程速度与压力耦合直接数值求解. 2015 年, 郭虹平等<sup>[8]</sup>采用两相流问题的统一间断有限元框架对气泡上升过程进行了模拟. 2016 年, 秦望龙等<sup>[9]</sup>基于六面体网格单元, 采用

\* 收稿日期: 2019-12-24; 修订日期: 2020-06-29

**基金项目:** 安徽省高校自然科学研究重大项目 (KJ2018A0385)

**作者简介:** 陈亚飞 (1992—), 女, 硕士生 (E-mail: 610556349@qq.com);

郑云英 (1973—), 女, 教授, 博士 (通讯作者. E-mail: zhengyunying@eyou.com).

**引用格式:** 陈亚飞, 郑云英. 不可压缩黏性流体的二维 Navier-Stokes 方程的间断有限元模拟 [J]. 应用数学和力学, 2020, 41(8): 844-852.

插值方法将物面的四边形面网格单元构造为弯曲面网格单元,用于三维可压缩 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程的求解,并通过对三维圆球绕流以及旋转流线体绕流进行数值求解,验证了 DG 方法的高精度特性.2018 年,Amrouche 等<sup>[10]</sup>证明了不可压缩 Navier-Stokes 方程关于 Navier 边界条件下的 Stokes 算子与滑移条件有关且在能量空间中收敛到无滑移边界条件的 Navier-Stokes 方程的解,在线性系统和非线性系统的弱解和强解相对于滑移系数都是一致有界的.2019 年,Kirk 等<sup>[11]</sup>提出了压阻混合非连续 Galerkin 法 (pressure-robust hybridized discontinuous Galerkin method) 证明了定常 Navier-Stokes 方程的速度误差估计与压力无关,此外,还表明速度和压力的估计都是最优的,数值算例表明此方法是全局最优收敛的.

本文基于分裂算法,采用 Adams-Bashforth 二阶时间离散格式<sup>[12]</sup>和 IPDG 空间离散格式来求解不可压 Navier-Stokes 方程.需要指出的是,鉴于非结构网格模拟复杂区域上实际问题的最有效技术手段是建立 DG 求解框架,目前基于非结构网格实现 Navier-Stokes 方程问题的统一 DG 求解寥寥无几.所以本文框架将 LDG 通量直接推广到区域,采用 IPDG 方法求解不可压 Navier-Stokes 方程,两端强加 Dirichlet 边界条件似乎破坏了最优收敛阶,但在实际计算中,避免精确计算这些内积,优化了算法实施和编程实现.结果证实达到了最优阶收敛,且收敛到  $O(h^{N+1/2})$ .

## 1 Navier-Stokes 方程 DG 方法

二维不可压缩流体动力学 Navier-Stokes 方程描述的是瞬态、不可压、等温流动问题,其形式如下:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad x \in \Omega,$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0,$$

其中  $\mathbf{u} = (u, v)$  为速度的分量,  $p$  为标量压力场.写成守恒通量形式为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

其中通量  $\mathbf{F}$  为

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] = \begin{bmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{bmatrix}.$$

### 1.1 时间离散

考虑刚性稳定的时间步长法<sup>[12]</sup>,将第  $n$  层到第  $n+1$  层每个时间步的推进分为 3 个阶段.第一步,用 Adams-Bashforth 二阶格式对守恒律部分作显式积分计算预估速度;第二步,将更新的速度分量投影到弱散度为零的空间计算压力;第三步,黏性项用隐式格式处理更新中间速度,最后求解  $\mathbf{u}^{n+1}$ .

定义非线性函数  $N(\mathbf{u}) = (N_x, N_y) = \nabla \cdot \mathbf{F}$ , 则

$$N_x(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}, \quad N_y(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_2 = \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y}. \quad (2)$$

第一步,用二阶 Adams-Bashforth 方法将其表示为

$$\frac{\gamma_0 \tilde{\mathbf{u}} - \alpha_0 \mathbf{u}^n - \alpha_1 \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} = -\beta_0 N(\mathbf{u}^n) - \beta_1 N(\mathbf{u}^{n-1}). \quad (3)$$

当系数  $\gamma_0 = 0, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0$  时,其格式降为向前 Euler 法,这与初始条件  $u^0$  和  $v^0$  保持一致;对以后时间步长取  $\gamma_0 = 3/2, \alpha_0 = 2, \alpha_1 = -1/2, \beta_0 = 2, \beta_1 = -1$ .

第二步,压力投影步.为了系统完备,我们寻求  $\bar{p}^{n+1}$ ,使得中间速度场  $\tilde{\mathbf{u}}$  的散度为零,  $\tilde{\mathbf{u}}$  由  $\gamma_0(\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}})/\Delta t = -\nabla \bar{p}^{n+1}$  来更新,即  $\bar{p}^{n+1}$  满足

$$-\nabla^2 \bar{p}^{n+1} = -\frac{\gamma_0}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \quad (4)$$

在流出边界取 Dirichlet 压力边界条件;在流入边界取 Neumann 边界条件,即有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \bar{p}^{n+1} &= \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = -\beta_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \frac{D\mathbf{u}^n}{Dt} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n \right) - \beta_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \frac{D\mathbf{u}^{n-1}}{Dt} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n-1} \right) = \\ &= -\beta_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \frac{D\mathbf{u}^n}{Dt} + \nu \nabla \times \mathbf{w}^n \right) - \beta_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \frac{D\mathbf{u}^{n-1}}{Dt} + \nu \nabla \times \mathbf{w}^{n-1} \right), \end{aligned}$$

其中,  $D\mathbf{u}/Dt = \partial \mathbf{u}/\partial t + \nabla \cdot F(\mathbf{u})$  为质量导数,  $\mathbf{w}^n := \nabla \times \mathbf{u}^n$  是时间  $t = t^n$  时的涡度.再用  $\bar{p}^{n+1}$  更新中间速度场  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} - (\Delta t/\gamma_0) \nabla \bar{p}^{n+1}$ .

第三步,对速度分量方程  $-\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + (\gamma_0/(\nu \Delta t)) \mathbf{u}^{n+1} = (\gamma_0/(\nu \Delta t)) \tilde{\mathbf{u}}$  求解,即

$$\gamma_0 \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}. \quad (5)$$

将对流方程(3)、压力投影方程(4)及黏性方程(5)相加,得

$$\frac{\gamma_0 \mathbf{u}^{n+1} - \alpha_0 \mathbf{u}^n - \alpha_1 \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1} - \beta_0 N(\mathbf{u}^n) - \beta_1 N(\mathbf{u}^{n-1}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}.$$

## 1.2 空间离散

利用迎风 DG 方法来提高非线性对流方程(3)对流占优的稳定性,用内部惩罚 DG 方法处理压力投影方程(4)及黏性方程(5),可以避免单元间的混杂解跳跃.

第一步,对非线性对流方程(3)选 Lax-Friedrichs 通量,利用迎风 DG 方法<sup>[12]</sup>得

$$\begin{aligned} (\phi_h, N)_{\Omega^k} &= (\phi_h, \nabla \cdot I_N F(\mathbf{u}_h))_{\Omega^k} - \frac{1}{2} (\phi_h, \llbracket I_N F(\mathbf{u}_h) \rrbracket \rrbracket)_{\partial \Omega^k} + \\ &= \frac{\lambda}{2} (\phi_h, \hat{\mathbf{n}} \cdot \llbracket \mathbf{u}_h \rrbracket)_{\partial \Omega^k}, \quad \forall \phi_h \in V_h, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $V_h = \bigoplus_{k=1}^K P_N(\Omega^k)$ ,  $\Omega$  被三角剖分成  $k$  个单元  $\Omega^k$ ,  $P_N(\Omega^k)$  为定义在  $\Omega^k$  上的  $N$  阶多项式空间,跳跃为  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \hat{\mathbf{n}}^- \cdot \mathbf{u}^- + \hat{\mathbf{n}}^+ \cdot \mathbf{u}^+$ , 流入边界条件由  $\mathbf{u}^+$  给定,  $I_N f$  是  $f$  的  $N$  阶插值.

第二步,对压力投影方程(4)利用内部惩罚方法<sup>[12]</sup>处理,记  $\Gamma^D$  和  $\Gamma^N$  分别为 Dirichlet 和 Neumann 边界条件,且  $\Gamma$  为  $\Omega^k$  中单元边界的集合,  $\partial \Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ ,  $\Gamma^0 = \Gamma \setminus \partial \Omega$ , 取内部惩罚通量为  $\mathbf{q}_h^* = \{ \{ \nabla u_h \} \} - \tau \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ ,  $\mathbf{u}_h^* = \{ \{ \mathbf{u}_h \} \}$ , 对压力  $p_h \in V_h$ ,  $\forall \phi_h \in V_h$  得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^k} \nabla \phi_h \cdot \nabla p_h \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega^k \setminus \partial \Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot \llbracket p_h \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\partial \Omega^k \setminus \partial \Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \{ \{ \nabla p_h \} \} \cdot \phi_h \, d\Gamma + \\ &\int_{\partial \Omega^k \setminus \partial \Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \phi_h \cdot \llbracket p_h \rrbracket \cdot \tau^k \, d\Omega - \int_{\partial \Omega^k \cap \partial \Gamma^D} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot p_h^- \, d\Gamma - \\ &\int_{\partial \Omega^k \cap \partial \Gamma^N} 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p_h^- \cdot \phi_h \, d\Gamma + \int_{\partial \Omega^k \cap \partial \Gamma^D} \phi_h \cdot p_h^- \cdot \tau^k \, d\Gamma = \\ &\int_{\Omega^k} -\frac{\gamma_0}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \phi_h \, d\Omega - \int_{\partial \Omega^k \cap \partial \Gamma^D} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot p^0 \, d\Gamma + \end{aligned}$$

$$\int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \phi_h \left( \beta_0 \frac{\partial p_h^n}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + \beta_1 \frac{\partial p_h^{n-1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^D} \phi_h \cdot p^0 \cdot \tau^k d\Gamma, \quad (7)$$

其中,惩罚因子<sup>[13]</sup>

$$\tau^k = \tau \frac{(N+1)^2}{h^k}.$$

第三步,对式(5)利用内部惩罚方法<sup>[12]</sup>,对  $\forall \phi_h \in V_h$ , 速度的  $x$  分量  $u_h \in V_h$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^k} \nabla \phi_h \cdot \nabla u_h d\Omega + \int_{\Omega^k} \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} \phi_h \cdot u_h d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot \llbracket u_h \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma - \\ & \int_{\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \{ \{ \nabla u_h \} \} \cdot \phi_h d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \phi_h \cdot \llbracket u_h \rrbracket \cdot \tau^k d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot u_h^- d\Gamma - \\ & \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^D} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u_h^- \cdot \phi_h d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \phi_h \cdot u_h^- \cdot \tau^k d\Gamma = \\ & \int_{\Omega^k} \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} \tilde{u}_h \cdot \phi_h d\Omega - \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot u^N d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^D} \phi_h \frac{\partial p_h^{n+1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\Gamma + \\ & \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} -u^D \cdot \phi_h \cdot \tau^k d\Gamma; \end{aligned} \quad (8)$$

速度的  $y$  分量  $v_h \in V_h$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^k} \nabla \phi_h \cdot \nabla v_h d\Omega + \int_{\Omega^k} \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} \phi_h \cdot v_h d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot \llbracket v_h \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma - \\ & \int_{\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \{ \{ \nabla v_h \} \} \cdot \phi_h d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \setminus \partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \phi_h \cdot \llbracket v_h \rrbracket \cdot \tau^k d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot v_h^- d\Gamma - \\ & \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^D} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla v_h^- \cdot \phi_h d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \phi_h \cdot v_h^- \cdot \tau^k d\Gamma = \\ & \int_{\Omega^k} \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} \tilde{v}_h \cdot \phi_h d\Omega - \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_h \cdot v^N d\Gamma + \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^D} \phi_h \frac{\partial p_h^{n+1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} d\Gamma + \\ & \int_{\partial\Omega^k \cap \partial\Gamma^N} -v^D \cdot \phi_h \cdot \tau^k d\Gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

## 2 数值算例

### 2.1 时间依赖流

当非线性项与压力梯度相平衡,黏性项与动量方程的时间导数相平衡时,方程精确解为

$$u = -\sin(2\pi y) e^{-\nu \cdot 4\pi^2 t}, \quad v = \sin(2\pi x) e^{-\nu \cdot 4\pi^2 t}, \quad p = -\cos(2\pi x) \cos(2\pi y) e^{-\nu \cdot 8\pi^2 t}.$$

当  $\nu$  很小时,时间依赖流具有解析解,可以定量检验数值算法的稳定性和精度.图 1 是时间依赖流的计算区域、边界条件及网格剖分<sup>[14]</sup>.图 2 给出了  $\nu = 1/100, 1/1\,000, 1/3\,200, 1/5\,000$  时时间依赖流的流线分布.观察图 2 可知  $\nu$  取不同值时,方腔涡流左、右下角均出现一级涡,且随着  $\nu$  的减小,涡的尺寸在增加,原始涡流慢慢基本趋于方腔的几何中心.当  $\nu = 1/3\,200$  时,方腔右下角既出现一级涡还出现了一个较小的次级涡;当  $\nu = 1/5\,000$  时,方腔右下角除了一级涡外还出现了两个很小的次级涡;由此说明模拟结果可准确地捕捉方腔右下角出现次级涡的

现象.而表 1 表明当  $N = 8$  时,由于时间误差的主导,使收敛阶为次优,当  $N$  为其他值时,几乎达到了最优收敛阶.该算例验证了本文方法具有很好的稳定性和较高的计算精度.

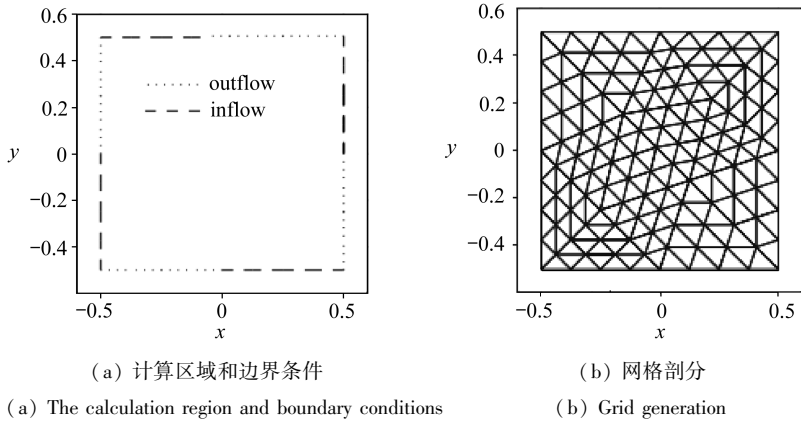


图 1 求解涡流问题示意图

Fig. 1 Schematic diagram for solving the eddy current problem

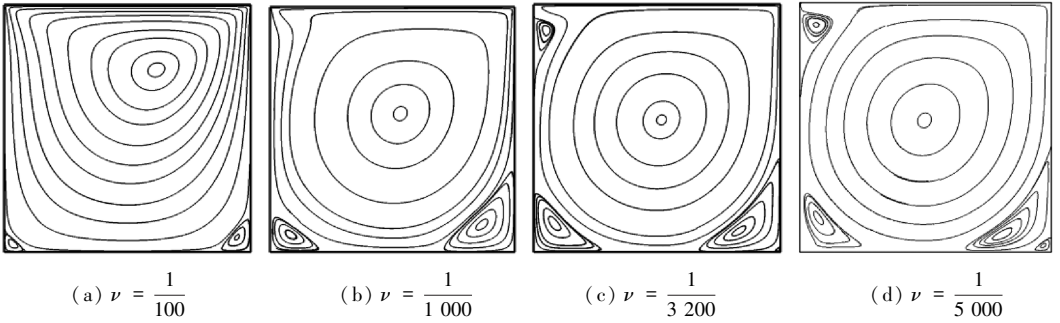


图 2 不同黏性系数  $\nu$  下时间依赖流的流线分布

Fig. 2 Streamline distributions of time-dependent flow under different viscosity coefficients  $\nu$

表 1 涡流问题的不同逼近阶对应  $u$  与  $p$  最大节点误差及收敛阶

Table 1 Maximum  $u$  and  $p$  nodal errors of the vortex solution corresponding to different approximation orders

$N$	$u$ error				$p$ error			
	$h$	$h/2$	$h/4$	convergence order	$h$	$h/2$	$h/4$	convergence order
1	8.4E-1	2.9E-1	5.4E-2	2.0	2.1E-0	5.4E-1	9.4E-2	2.2
2	7.4E-2	3.6E-2	1.0E-2	1.4	3.1E-1	8.8E-2	1.8E-8	2.0
3	1.2E-1	4.7E-3	5.6E-4	3.9	2.3E-1	1.6E-2	8.8E-4	4.0
4	1.0E-2	2.1E-3	4.5E-5	3.9	2.8E-2	4.1E-3	1.2E-4	3.9
5	1.8E-2	7.5E-5	3.0E-6	6.3	3.2E-2	3.3E-4	6.8E-6	6.1
6	6.0E-4	4.1E-5	1.7E-7	5.9	9.7E-4	6.7E-5	4.9E-7	5.5
7	1.4E-3	6.3E-7	4.5E-8	7.5	1.9E-3	3.9E-6	4.1E-8	7.7
8	1.8E-5	3.3E-7	2.7E-8	4.7	2.7E-5	5.4E-7	2.8E-8	5.0

## 2.2 圆柱绕流

考虑稍微复杂的流体问题,给出依赖时间的二维渠道流,在渠道中间有一圆形障碍物,此圆柱放置在偏离渠道中心线处,因此,一旦由零初始条件慢慢形成抛物型流时,就开始产生涡

流.初始时刻  $T = 0$ , 流体假设为零, 流入边界条件为

$$u(x, y, t) = 0.41^{-2} \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) 6(y + 0.2)(0.21 - y), v(x, y, t) = 0,$$

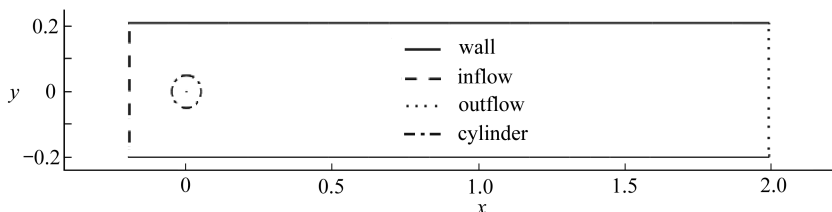
流出边界假设压力为零. 因此此问题不存在解析解, 定义圆柱的阻力系数为圆柱体上总力在水平方向分量, 即

$$C_d(t) = \oint \left( -p \hat{n}_x + \nu \left( \hat{n}_x 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{n}_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right) ds;$$

圆柱的升力系数为圆柱体上总力在垂直方向分量, 即

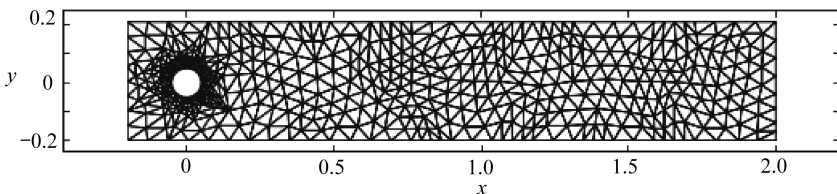
$$C_l(t) = \oint \left( -p \hat{n}_y + \nu \left( \hat{n}_x \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \hat{n}_y 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) ds,$$

其中  $(\hat{n}_x, \hat{n}_y)$  为沿圆柱表面的外法向量, 取压力差为  $\Delta p = p(-0.05, 0) - p(0.05, 0)$ . 图 3 是圆柱绕流的计算区域、边界条件及网格剖分. 图 4 给出了单元  $K = 236$ , 每个单元用  $N = 10$  阶逼近非稳态圆柱流的模拟结果, 将文献[15-16]的结果作为标准的基础进行比较, 表 2 显示了识别最大升力与阻力及何时达到这些极大值.



(a) 计算区域和边界条件

(a) The calculation region and boundary conditions

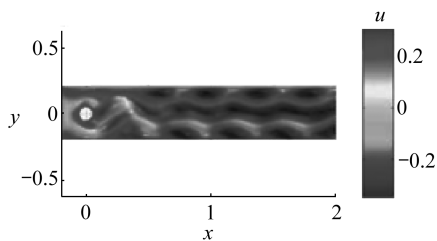


(b) 网格剖分

(b) Grid generation

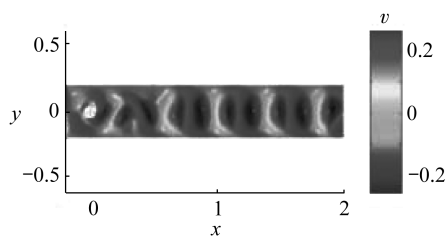
图 3 求解管道问题示意图

Fig. 3 Schematic diagram for solving pipeline problems



(a) x-速度

(a) The x-velocity



(b) y-速度

(b) The y-velocity

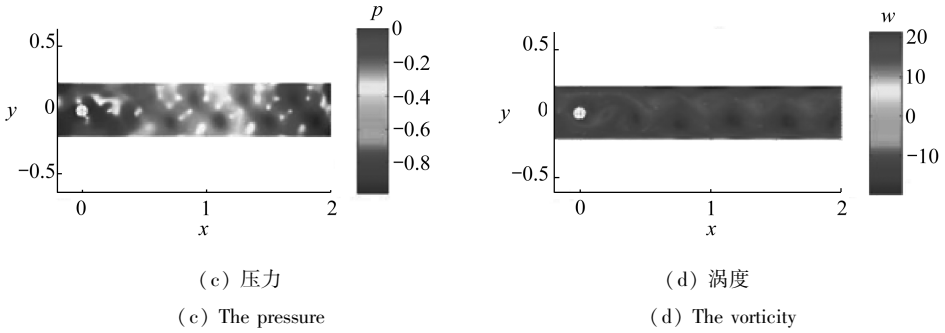


图 4 非稳态圆柱流对应单元个数  $K = 236$ ,  $N = 10$  阶的模拟结果

Fig. 4 Simulation results for  $K = 236$ ,  $N = 10$  in the unsteady pipe flow case

表 2 圆柱管道流问题的最大升力、阻力系数及在  $t = 8$  时的压力差

Table 2 Maximum lift, drag coefficients and final pressure drops in the pipe flow case for  $t = 8$

$K$	$N$	$C_d$	$C_l$	$\Delta p(t = 8)$
115	6	2.953	0.497	-0.110
236	8	2.942	0.488	-0.112
236	10	2.955	0.479	-0.112
ref. [16]	-	2.950	0.478	-0.111

### 3 结 论

本文建立了一种求解二维 Navier-Stokes 方程黏弹流体流动的 DG 方法,采用非结构网格进行数值模拟,对于圆形障碍物,首先计算速度的梯度,再抽出在圆柱边上的速度,然后估计积分,最后计算出围绕圆柱的积分来估计升力及阻力.然而对大型时间问题的模拟存在很多挑战,二阶微分算子的存在可引进很小时间步长,对不可压缩 Navier-Stokes 情形,采用半隐式时间积分可避免小步长问题.

#### 参考文献 (References):

- [1] 曹伟. 黏性不可压缩流体流动前沿的数值模拟[J]. 力学学报, 2004, **36**(5): 583-588. (CAO Wei. Numerical simulation for the flow front of viscous incompressible fluid [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004, **36**(5): 583-588. (in Chinese))
- [2] NAGRATH S, JANSEN K E, JR LAHEY R T. Computation of incompressible bubble dynamics with a stabilized finite element level set method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(42/44): 4565-4587.
- [3] 马飞遥, 马逸尘, 沃维丰. 基于二重网格的定常 Navier-Stokes 方程的局部和并行有限元算法[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(1): 25-33. (MA Feiyao, MA Yichen, WO Weifeng. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretization for steady Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(1): 25-33. (in Chinese))
- [4] 骆艳, 冯民富. 可压缩 Navier-Stokes 方程的压力梯度局部投影间断有限元法[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(2): 157-168. (LUO Yan, FENG Minfu. Discontinuous element pressure gradient stabilizations for the compressible Navier-Stokes equations based on local projections[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(2): 157-168. (in Chinese))
- [5] CHO M H, CHOI H G, YOO J Y. A direct reinitialization approach of level-set/splitting finite



- element method for simulating incompressible two-phase flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, **67**(11): 1637-1654.
- [6] HEIMANN F, ENGWER C, IPPISCH O, et al. An unfitted interior penalty discontinuous Galerkin method for incompressible Navier-Stokes two-phase flow[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013, **71**(3): 269-293.
- [7] 章争荣. 不可压缩黏性流动 N-S 方程直接耦合数值求解的流形方法[C]//中国力学大会: 2013 论文摘要集. 西安, 2013.(ZHANG Zhengrong. Manifold method for directly coupled numerical solution of N-S equations of incompressible viscous flow [C]//*China Mechanics Conference: 2013 Abstracts*. Xi'an, 2013.(in Chinese))
- [8] 郭虹平, 欧阳洁. 气液两相流的间断有限元模拟[J]. 计算物理, 2015, **32**(2): 160-168.(GUO Hongping, OUYANG Jie. Simulation of gas-liquid two-phase flows with discontinuous Galerkin method[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2015, **32**(2): 160-168.(in Chinese))
- [9] 秦望龙, 吕宏强, 伍贻兆, 等. 三维可压缩 Navier-Stokes 方程的间断 Galerkin 有限元方法研究[J]. 空气动力学学报, 2016, **34**(5): 617-624.(QIN Wanglong, LÜ Hongqiang, WU Yizhao, et al. Discontinuous Galerkin method for 3-D compressible Navier-Stokes equations[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2016, **34**(5): 617-624.(in Chinese))
- [10] AMROUCHE C, ESCOBEDO M, GHOSH A. Semigroup theory for the Stokes operator with Navier boundary condition on spaces[J]. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, 2018, **223**(2): 1-60.
- [11] KIRK K, RHEBERGEN S. Analysis of a pressure-robust hybridized discontinuous Galerkin method for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, **81**(2): 881-897.
- [12] KARNIADAKIS G E, ISRAELI M, ORSZAG S A. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1991, **97**(2): 414-443.
- [13] YACOUBI A E, XU S, WANG Z J. A new method for computing particle collisions in Navier-Stokes flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, **399**: 108919.
- [14] PAL S, HALOI R. On solution to the Navier-Stokes equations with Navier slip boundary condition for three dimensional incompressible fluid[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2019, **39**(6): 1628-1638.
- [15] SHAHBAZI K, FISCHER P F, ETHIER C R. A high-order discontinuous Galerkin method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, **222**(1): 391-407.
- [16] JOHN V. Reference values for drag and lift of a two-dimensional time-dependent flow around a cylinder[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, **44**(7): 777-788.



# A Discontinuous Galerkin FEM for 2D Navier-Stokes Equations of Incompressible Viscous Fluids

CHEN Yafei, ZHENG Yunying

(*School of Mathematical Science, Huaibei Normal University,  
Huaibei, Anhui 235000, P.R.China*)

**Abstract:** The incompressible Navier-Stokes equations are composed of the conservation law and the diffusion and constrained development equations. To test the numerical method, based on the unstructured grid, a discontinuous Galerkin scheme was established. The numerical results of the eddy current problem for different viscosity coefficients  $\nu$  were discussed. The simulation results show that, the method has high precision and can solve the incompressible viscous fluid problem with moving interface, which makes the simulation boundary layer, the shear layer and the complex vortex solution be very effective, and the shock structure can be successfully extended to the numerical simulation of complex phenomena.

**Key words:** Navier-Stokes equation; discontinuous Galerkin finite element method; viscous flow