

# 具有 Holling IV 型功能反应 捕食系统的状态反馈控制\*

王小娥, 蔺小林, 李建全

(陕西科技大学 文理学院, 西安 710021)

**摘要:** 研究了一类具有 Holling IV 型功能反应和状态反馈控制的捕食模型, 利用相似的 Poincaré 准则和半连续动力系统几何理论, 得到了半平凡周期解稳定和阶 1-周期解存在的充分条件. 数值模拟验证了结论的正确性和状态反馈控制的有效性. 同时, 数值模拟揭示了状态反馈控制系统存在着丰富的动力学行为, 比如 fold 分岔、flip 分岔和混沌现象.

**关键词:** Holling IV 型功能反应函数; 状态反馈控制; 后继函数; 阶 1-周期解

**中图分类号:** O175

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.400314

## 引 言

种群动力学模型, 可用于描述种群与环境以及种群与其它种群之间相互作用的动态关系, 并可用于解释、预测、调节和控制物种的发展过程和趋势. 对于种群的研究, 主要关注两个问题: 一是种群随时间的演变规律; 二是如何实施人工干预对种群进行保护和控制<sup>[1]</sup>.

为了加强对种群的保护和控制, Liu 等<sup>[2]</sup>、Lajmiri 等<sup>[3]</sup>和 Sen 等<sup>[4]</sup>利用常微分方程定性理论研究了食饵或捕食者种群具有常数收获率的捕食模型, 他们假设食饵或捕食者的收获是连续的. 然而, 在实际生活中, 人们对种群的保护和控制并非是一个连续的过程, 用脉冲微分方程描述这些系统更合适. 文献[5-7]中控制措施都是在固定时刻进行的, 这种控制策略称为固定时刻控制策略, 其过程可用固定时刻的脉冲微分系统来描述. 虽然该策略考虑了种群数量的瞬间变化, 但忽略了种群的生长规律. 相比之下, 状态脉冲控制策略比固定时刻控制策略更适合描述种群的控制<sup>[8]</sup>.

状态脉冲控制策略是只有种群数量达到一定的经济阈值时才采取控制措施的一种策略<sup>[8-14]</sup>, 文献[9-12]和[13-14]分别考虑了食饵和捕食者数量达到一定阈值的控制策略. 对于状态脉冲动力系统, Yang 等<sup>[9]</sup>、He<sup>[10]</sup>和钱临宁等<sup>[11]</sup>建立 Poincaré 映射, 将周期解问题转化为不动点问题, 推导并给出了阶  $k$ -周期解 ( $k \geq 1$ ) 存在的充分条件. 同时, 数值模拟揭示了状态反馈控制系统存在着复杂的动力学性质, 如混沌现象等. 另外, 白露等<sup>[12]</sup>、Liang 等<sup>[13]</sup>和 Zhou

\* 收稿日期: 2019-10-05; 修订日期: 2020-05-16

基金项目: 国家自然科学基金(11971281)

作者简介: 王小娥(1993—), 女, 硕士生(E-mail: 1255013427@qq.com);

蔺小林(1961—), 男, 博士(通讯作者. E-mail: linxl@sust.edu.cn).

引用格式: 王小娥, 蔺小林, 李建全. 具有 Holling IV 型功能反应捕食系统的状态反馈控制[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(12): 1369-1380.

等<sup>[14]</sup>采用后继函数分析了不同情况下阶 1-周期解的存在性,并用数值模拟验证了结论的正确性.

本文研究一类具有 Holling IV 型的捕食模型,考虑成比例收获食饵和释放捕食者的控制措施,构建具有状态反馈控制的数学模型,研究生物资源充足条件下将食饵控制在某一经济阈值内的防控策略.在后续分析中,利用相似的 Poincaré 准则研究了捕食者消除周期解的稳定性,并借助半连续动力系统几何理论,给出了两物种共存的充分条件.与无状态脉冲控制的捕食系统相比,数值模拟揭示了状态脉冲反馈控制系统存在着复杂的动力学行为,并有效地验证了所得结论的正确性.

## 1 模型的建立

文献[15]采用定性分析、分岔理论和数值模拟的方法,研究了一类具有 Holling IV 型功能反应捕食系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{xy}{a + bx + x^2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{cxy}{a + bx + x^2} - dy \end{cases} \quad (1)$$

的动力学行为.其中,  $x(t), y(t)$  分别为食饵和捕食者的种群密度,参数  $r$  为食饵的最大增长率,  $k$  是食饵的最大环境容纳量,  $a$  为半饱和常数,  $b$  为功能反应常数,  $c$  为捕食者的最大增长率,  $d$  为捕食者的死亡率.对于系统(1), Huang 和 Xiao<sup>[15]</sup>对平衡点和极限环的存在性、稳定性进行了定性分析和数值模拟,同时分岔分析显示了鞍结点分岔、Hopf 分岔、同宿分岔和余维-2 的尖点型分岔,并用数值模拟的方法证明了余维-3 退化平衡点和同宿轨的存在性,得到如下结论.

**引理 1<sup>[15]</sup>** (a) 如果  $d_1 < 0$  或  $d_2 \leq 0$ , 系统(1)没有正平衡点,而平衡点  $(0,0)$  是鞍点,  $(k,0)$  是全局稳定的结点.

(b) 如果  $d_1 = 0, 0 < d_3 < k$ , 系统(1)有三个平衡点:鞍点  $(0,0)$ 、稳定结点  $(k,0)$  和唯一正平衡点  $(x_0, y_0)$ , 而且系统(1)没有闭轨.当  $k \neq d_4$  时,  $(x_0, y_0)$  是鞍结点;当  $k = d_4$  时,  $(x_0, y_0)$  是尖点.其中,  $x_0 = d_3, y_0 = r(1 - x_0/k)(a + bx_0 + x_0^2)$ .

(c) 如果  $d_1 > 0, d_2 > 0$ , 系统(1)最多有四个平衡点:  $(0,0), (k,0), (x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ . 当  $k \leq x_1$  时,系统(1)只有两个平衡点:鞍点  $(0,0)$ 、稳定结点  $(k,0)$ ;当  $x_1 < k \leq x_2$  时,有三个平衡点:鞍点  $(0,0)$  和  $(k,0)$ , 焦点或结点  $(x_1, y_1)$ ;当  $k > x_2$  时,有四个平衡点:鞍点  $(0,0)$  和  $(x_2, y_2)$ , 稳定结点  $(k,0)$  和  $k < d_0 (k > d_0)$  的稳定(不稳定)焦点或结点  $(x_1, y_1)$ . 其中

$$\begin{aligned} d_0 &= (a + 2bx_1 + 3x_1^2)/(b + 2x_1), \quad d_1 = (c - bd)^2 - 4ad^2, \\ d_2 &= c - bd, \quad d_3 = (c - bd)/2d, \quad d_4 = 2d_3. \end{aligned}$$

基于系统(1),考虑成比例收获食饵和释放捕食者的控制措施,构建具有状态反馈控制的捕食模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{xy}{a + bx + x^2}, & x \neq h, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{cxy}{a + bx + x^2} - dy, \\ \Delta x = -px, & x = h, \\ \Delta y = qy, \end{cases} \quad (2)$$

研究在生物资源充足条件下将食饵控制在某一经济阈值内的防控策略.其中,  $0 \leq p < 1, q \geq 0$  分别表示食饵数量达到阈值  $h > 0$  时,因采取控制措施导致食饵和捕食者变化的比例.也就是说,在  $t_i(h)$  时刻食饵数量  $x(t)$  达到阈值  $h$  时,经脉冲控制食饵数量  $x(t)$  减少为  $(1 - p)h$ ,捕食者的数量  $y(t)$  因释放变化为  $(1 + q)y(t_i(h))$ .

设模型(2)的解定义在  $\mathbf{R}_+$  上,并在  $\mathbf{R}_+ - \{t_i(h)\}$  上连续可微.若  $y(t) = 0$ ,那么解  $(x(t), y(t))$  称为系统(2)的半平凡解<sup>[10]</sup>.由于  $k$  是食饵  $x(t)$  的环境容纳量,所以本文假设  $h < k$ .另外,为了保证  $x(t)$  的非负性,假定不等式  $b > -2\sqrt{a}$  成立.进一步考虑其生物意义,本文在  $\Omega = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  上研究系统(2)的动力学行为.

## 2 定性分析

### 2.1 半平凡周期解的存在性和稳定性

对所有的  $t \geq 0, y(t) = 0$  时,系统(2)变为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), & x \neq h, \\ \Delta x = -px, & x = h. \end{cases}$$

令  $x_0 = x(0) = (1 - p)h$ , logistic 方程  $x' = rx(1 - x/k)$  的解为

$$x(t) = \frac{k}{1 + Ae^{-rt}}, \quad A = \frac{k - (1 - p)h}{(1 - p)h}.$$

记

$$T = \frac{1}{r} \ln \frac{k - (1 - p)h}{(k - h)(1 - p)},$$

则  $x(T) = h, x(T^+) = x_0$ .于是,系统(2)存在半平凡周期解:

$$\begin{cases} \xi(t) = \frac{k}{1 + Ae^{-r(t - (k-1)T)}}, & (k - 1)T < t \leq kT, k \in \mathbf{N}. \\ \eta(t) = 0, \end{cases}$$

下面考虑一个平面自治脉冲微分系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad \phi(x, y) \neq 0, \\ \Delta x = \alpha(x, y), \quad \Delta y = \beta(x, y), \quad \phi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

如果系统(3)有一个周期解  $x = \xi(t), y = \eta(t)$ ,而且关于该周期解的变分系统有乘数  $\mu_1 = 1$  和

$$\mu_2 = \prod_{k=1}^n \Delta_k \exp \left[ \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t), \eta(t)) \right) dt \right], \quad (4)$$

其中

$$\Delta_k = \frac{P_+ \times \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q_+ \times \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y}},$$

而  $P, Q, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$  在点  $(\xi(\tau_k), \eta(\tau_k))$  处取值,  $P_+ = P(\xi(\tau_k^+), \eta(\tau_k^+)), Q_+ =$

$Q(\xi(\tau_k^+), \eta(\tau_k^+))$ .

**引理 2**<sup>[8]</sup> (相似的 Poincaré 准则) 如果式(4)满足  $|\mu_2| < 1$ , 那么系统(3)的  $T$  周期解  $x = \xi(t), y = \eta(t)$  是轨道渐近稳定的.

**定理 1** 当  $b^2 < 4a, 0 < h < k$  且  $0 < q < q^*$  时, 系统(2)的半平凡周期解  $(\xi(t), \eta(t))$  是轨道渐近稳定的. 其中

$$q^* = \left[ \frac{(k-h)(1-p)}{k-(1-p)h} \right]^{-d/r} \times \left[ \frac{k-(1-p)h}{k-h} \sqrt{\frac{a+bh+h^2}{a+b(1-p)h+(1-p)^2h^2}} \right]^{-ck/(r(a+bk+k^2))} \times \exp \left\{ -\frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \frac{b+2k}{\sqrt{4a-b^2}} \times \arctan \left[ \frac{2ph\sqrt{4a-b^2}}{4a-b^2+(2(1-p)h+b)(2h+b)} \right] \right\} - 1.$$

**证明** 将引理 2 应用于系统(2), 有

$$P(x, y) = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{xy}{a+bx+x^2}, \quad Q(x, y) = \frac{cxy}{a+bx+x^2} - dy,$$

$$\alpha(x, y) = -px, \quad \beta(x, y) = qy, \quad \phi(x, y) = x - h,$$

$$(\xi(T), \eta(T)) = (h, 0), \quad (\xi(T^+), \eta(T^+)) = ((1-p)h, 0).$$

于是

$$\frac{\partial P}{\partial x} = r \left( 1 - \frac{2x}{k} \right) + \frac{(x^2-a)y}{(a+bx+x^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{cx}{a+bx+x^2} - d,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -p, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

而且

$$\Delta_1 = \frac{P_+ \times \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q_+ \times \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{P(\xi(T^+), \eta(T^+))(1+q)}{P(\xi(T), \eta(T))} = \frac{(1+q)(1-p)[k-(1-p)h]}{k-h}.$$

另外

$$\exp \left[ \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t), \eta(t)) \right) dt \right] = \exp \left[ \int_0^T (G_1(t) + G_2(t)) dt \right],$$

式中

$$\int_0^T G_1(t) dt = \int_0^T \left[ r - d - \frac{2r}{k} \xi(t) \right] dt = (r-d)T - 2 \ln \left[ \frac{k-(1-p)h}{k-h} \right] = \ln \left[ \frac{k-h}{(1-p)(k-(1-p)h)} \right] - \frac{d}{r} \ln \left[ \frac{k-(1-p)h}{(k-h)(1-p)} \right],$$

$$\int_0^T G_2(t) dt = \int_0^T \frac{c\xi(t)}{a + b\xi(t) + \xi(t)^2} dt, \quad \xi(t) = \frac{ke^{rt}}{A + e^{rt}},$$

其中  $t \in [0, T]$ .

做变量代换

$$u = \frac{ke^{rt}}{A + e^{rt}}, \quad t \in [0, T],$$

则  $u \in [(1-p)h, h] < k, dt = \frac{k}{ru(k-u)} du$ , 并且

$$\begin{aligned} \int_0^T G_2(t) dt &= c \int_{(1-p)h}^h \frac{k}{r(k-u)(a+bu+u^2)} du = \\ &= \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \int_{(1-p)h}^h \left( \frac{1}{k-u} + \frac{u+b+k}{a+bu+u^2} \right) du = \\ &= \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \int_{(1-p)h}^h \left( \frac{1}{k-u} + \frac{1}{2} \frac{2u+b}{a+bu+u^2} + \frac{b/2+k}{a+bu+u^2} \right) du = \\ &= \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \ln(a+bu+u^2) - \ln(k-u) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{2(b/2+k)}{\sqrt{4a-b^2}} \arctan \frac{2u+b}{\sqrt{4a-b^2}} \right] \Big|_{(1-p)h}^h \right\} = \\ &= \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{a+bh+h^2}{a+b(1-p)h+(1-p)^2h^2} \right] - \ln \left[ \frac{k-h}{k-(1-p)h} \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{b+2k}{\sqrt{4a-b^2}} \left[ \arctan \frac{2h+b}{\sqrt{4a-b^2}} - \arctan \frac{2(1-p)h+b}{\sqrt{4a-b^2}} \right] \right\} = \\ &= \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{a+bh+h^2}{a+b(1-p)h+(1-p)^2h^2} \right] - \ln \left[ \frac{k-h}{k-(1-p)h} \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{b+2k}{\sqrt{4a-b^2}} \arctan \left[ \frac{2ph\sqrt{4a-b^2}}{4a-b^2+(2(1-p)h+b)(2h+b)} \right] \right\}, \quad b^2 < 4a. \end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned} \exp \left[ \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t), \eta(t)) \right) dt \right] &= \exp \left[ \int_0^T (G_1(t) + G_2(t)) dt \right] = \\ &= \frac{k-h}{(1-p)(k-(1-p)h)} \left[ \frac{(k-h)(1-p)}{k-(1-p)h} \right]^{d/r} \times \\ &\quad \left[ \frac{k-(1-p)h}{k-h} \sqrt{\frac{a+bh+h^2}{a+b(1-p)h+(1-p)^2h^2}} \right]^{ck/(r(a+bk+k^2))} \times \\ &\quad \exp \left\{ \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \frac{b+2k}{\sqrt{4a-b^2}} \arctan \left[ \frac{2ph\sqrt{4a-b^2}}{4a-b^2+(2(1-p)h+b)(2h+b)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

于是, 乘数  $\mu_2$  的值为

$$\begin{aligned} \mu_2 = \Delta_1 \exp & \left[ \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t), \eta(t)) \right) dt \right] = \\ & (1+q) \left[ \frac{(k-h)(1-p)}{k-(1-p)h} \right]^{d/r} \times \\ & \left[ \frac{k-(1-p)h}{k-h} \sqrt{\frac{a+bh+h^2}{a+b(1-p)h+(1-p)^2h^2}} \right]^{ck/(r(a+bk+k^2))} \times \\ & \exp \left\{ \frac{ck}{r(a+bk+k^2)} \frac{b+2k}{\sqrt{4a-b^2}} \arctan \left[ \frac{2ph\sqrt{4a-b^2}}{4a-b^2+(2(1-p)h+b)(2h+b)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

由引理 2 知, 当且仅当  $0 < q < q^*$  时, 即  $|\mu_2| < 1$  时, 系统 (2) 的半平凡周期解是轨道渐近稳定的. 证毕.

注 当  $q = q^*$  时, 系统 (2) 出现 fold 分岔.

说明 采用文献 [8] 的方法, 可得系统 (2) 的一类 Poincaré 映射为

$$\begin{aligned} \delta y_1 = f(q, \delta y_0) &= (1+q)v(T)\delta y_0 = \\ & (1+q) \exp \left[ \int_0^T \left( \frac{c\xi(t)}{a+b\xi(t)+\xi(t)^2} - d \right) dt \right] \delta y_0 = \\ & (1+q) \left[ \frac{(k-h)(1-p)}{k-(1-p)h} \right]^{d/r} \times \\ & \left[ \frac{k-(1-p)h}{k-h} \sqrt{\frac{a+bh+h^2}{a+b(1-p)h+(1-p)^2h^2}} \right]^{ck/(r(a+bk+k^2))} \times \\ & \exp \left\{ \frac{kc}{r(a+bk+k^2)} \frac{b+2k}{\sqrt{4a-b^2}} \times \right. \\ & \left. \arctan \left[ \frac{2ph\sqrt{4a-b^2}}{4a-b^2+(2(1-p)h+b)(2h+b)} \right] \right\} \delta y_0. \end{aligned}$$

因  $\delta y_0 = 0$  是映射  $f(q, \delta y_0)$  的一个不动点, 并且  $D_{\delta y_0} f(q^*, 0) = 1$ , 所以在  $q = q^*$  处系统 (2) 出现 fold 分岔. 详细的分析类似于文献 [8].

## 2.2 阶 1-周期解的存在性

对于系统 (1), 由引理 1(b) 知: 当  $d_1 = 0, 0 < d_3 < k$  时, 系统 (1) 有鞍点  $(0, 0)$ 、稳定结点  $(k, 0)$  和唯一正平衡点  $(x_0, y_0)$ . 其中,  $(x_0, y_0)$  的动力学性态取决于  $k$  与  $d_4$ . 下面讨论  $d_1 = 0, 0 < d_3 < k$  时, 系统 (2) 正周期的存在性. 其中, 系统 (2) 的脉冲集为  $S_1 = \{(x, y) \mid x = h, y \geq 0\}$ , 脉冲映射为  $\phi: (x, y) \in S_1 \rightarrow ((1-p)h, y) \in R_+^2$ , 相集为  $S_0 = \phi(M) = \{(x, y) \mid x = (1-p)h, y \geq 0\}$ .

**定理 2** 对任意的  $q > 0$ , 当  $h < d_3$  时, 系统 (2) 存在阶 1-周期解.

**证明** 当  $h < d_3$  时, 从  $(x, y) (x < h)$  出发的轨线与脉冲集  $S_1$  相交无数次, 并且不受奇点  $(x_0, y_0)$  动力学性态的影响. 设点  $A_1((1-p)h, \varepsilon)$  在相集  $S_0$  上,  $\varepsilon > 0$  且充分小. 如图 1 所示, 轨线弧  $A_1B_1$  与脉冲集  $S_1$  交于点  $B_1(h, \hat{\varepsilon})$ , 而点  $A_2((1-p)h, (1+q)\hat{\varepsilon})$  是点  $B_1$  的相点, 轨线弧  $A_2B_2$  与脉冲集  $S_1$  交于点  $B_2(h, \varepsilon_1)$ . 因  $(1+q)\hat{\varepsilon} > \varepsilon$ , 故  $A_2$  和  $B_2$  分别在  $A_1$  和  $B_1$  的上方. 其中, 点  $B_2$  是点  $B_1$  的后继点, 而且点  $B_1$  的后继函数满足  $F(B_1) = \varepsilon_1 - \hat{\varepsilon} > 0$ .

设垂直等倾线  $l_1: y = r(a + bx + x^2)(1 - x/k)$  与相集  $S_0$  相交于点  $N((1-p)h, r[1 - (h(1$

$-p)/k][a + bh(1 - p) + (h(1 - p))^2]$ 。从点  $N$  出发的轨线交脉冲集  $S_1$  于点  $M(h, m_0)$ , 点  $M^+((1 - p)h, (1 + q)m_0)$  是点  $M$  的相点, 从点  $M^+$  出发的轨线交  $S_1$  于点  $M_1(h, \bar{m}_0)$ 。

若存在某一  $q_0 > 0$ , 使得点  $N$  恰好为点  $M$  的相点, 即

$$(1 + q_0)m_0 = r \left[ 1 - \frac{(1 - p)h}{k} \right] [a + bh(1 - p) + (1 - p)^2 h^2].$$

也就是说, 当  $q = q_0$  时, 点  $M^+$  与点  $N$  重合。当  $0 < q < q_0$  时, 点  $M^+$  位于点  $N$  的下方; 当  $q > q_0$  时, 点  $M^+$  位于点  $N$  的上方。而且对任意的  $q > 0$ , 由系统(1)的向量场知, 点  $M_1$  始终在  $M$  的下方, 即  $\bar{m}_0 \leq m_0$ 。

1) 如果  $\bar{m}_0 = m_0$ , 那么轨道  $NMN$  即为系统(2)的阶 1-周期解。

2) 如果  $\bar{m}_0 < m_0$ , 点  $M$  的后继函数满足  $F(M) = \bar{m}_0 - m_0 < 0$ 。由后继函数的连续性知, 在脉冲集  $S_1$  上点  $M$  和点  $B_1$  之间至少存在一点  $C$ , 使得  $F(C) = 0$ , 即系统(2)存在阶 1-周期解<sup>[16]</sup>。证毕。

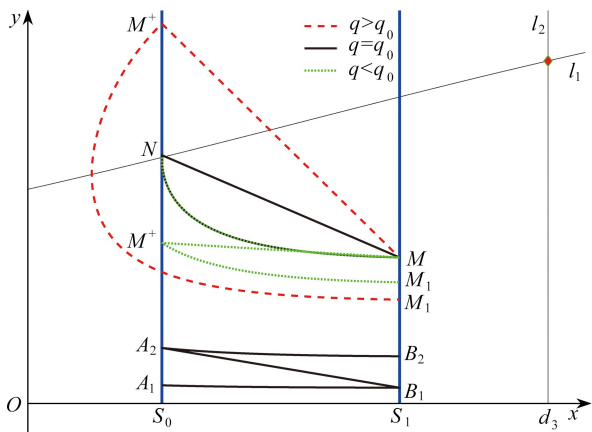


图 1 当  $h < d_3$  时, 系统(2)阶 1-周期解的存在性

Fig. 1 The existence of the order-1 periodic solution to system (2) for  $h < d_3$

### 3 数值模拟

为了验证系统(2)结论的正确性, 考虑如下具有 Holling IV型功能反应和状态反馈控制的捕食模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.75x \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{xy}{1 + x + x^2}, & x \neq h, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{6xy}{1 + x + x^2} - 2y, & \\ \Delta x = -px, & x = h, \\ \Delta y = qy, & \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $r = 0.75, a = 1, b = 1, c = 6, d = 2$ 。简单计算, 易知  $d_1 = 0, d_3 = 1, d_4 = 2$ 。当  $d_3 < k$  时, 由引理 1(b) 知无状态脉冲控制系统(5)有鞍点  $(0, 0)$ 、稳定结点  $(k, 0)$  和正平衡点  $(1, 2.25(1 - 1/k))$ 。如图 2 所示: (a)  $k = 1.25$  时, 奇点  $(1, 0.45)$  是鞍结点; (b)  $k = 2$  时, 奇点  $(1, 1.125)$  是尖点; (c)  $k = 3$  时, 奇点  $(1, 1.5)$  是鞍结点。

当  $p = 0.6, h = 0.8$  时, 系统(5)的两个 Poincaré 截面分别为  $S_0 = \{(x, y) \mid x = 0.8, y \geq 0\}$ ,

$S_1 = \{(x, y) \mid x = 0.32, y \geq 0\}$ . 当  $k$  分别取 1.25, 2 和 3 时, 由定理 1 可得  $q^*$  分别为 0.776 6, 0.600 1 和 0.534 6. 如图 3(a) ~ (c) 所示, 当  $q^* > q = 0.3$  且  $k = 1.25, 2$  和 3 时, 系统(5)过初值  $(0.3, 0.1)$  的解随着时间的增加而趋于半平凡周期解, 即半平凡周期解是稳定的; 当  $q^* < q = 1$  时, 半平凡周期解失去稳定性, 通过 fold 分岔, 分岔出阶 1-周期解 (见图 3(d) ~ (f)). 显然, 数值模拟有效地验证了定理 1 的正确性.

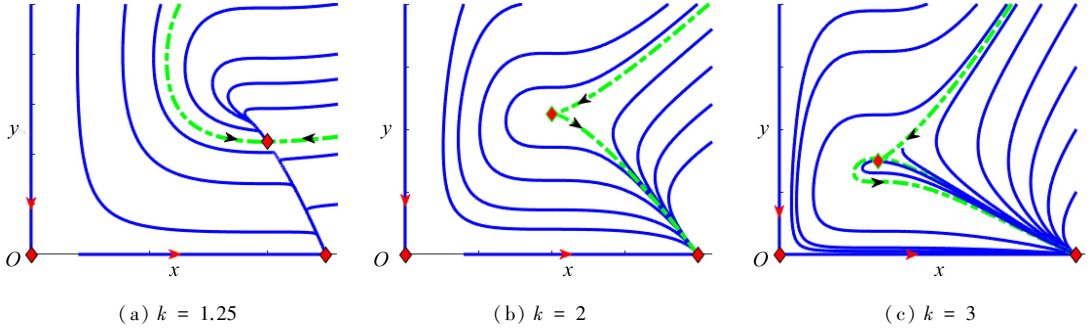


图 2 无状态脉冲控制时, 系统(5)的相图

Fig. 2 The phase portraits of system (5) without state feedback control

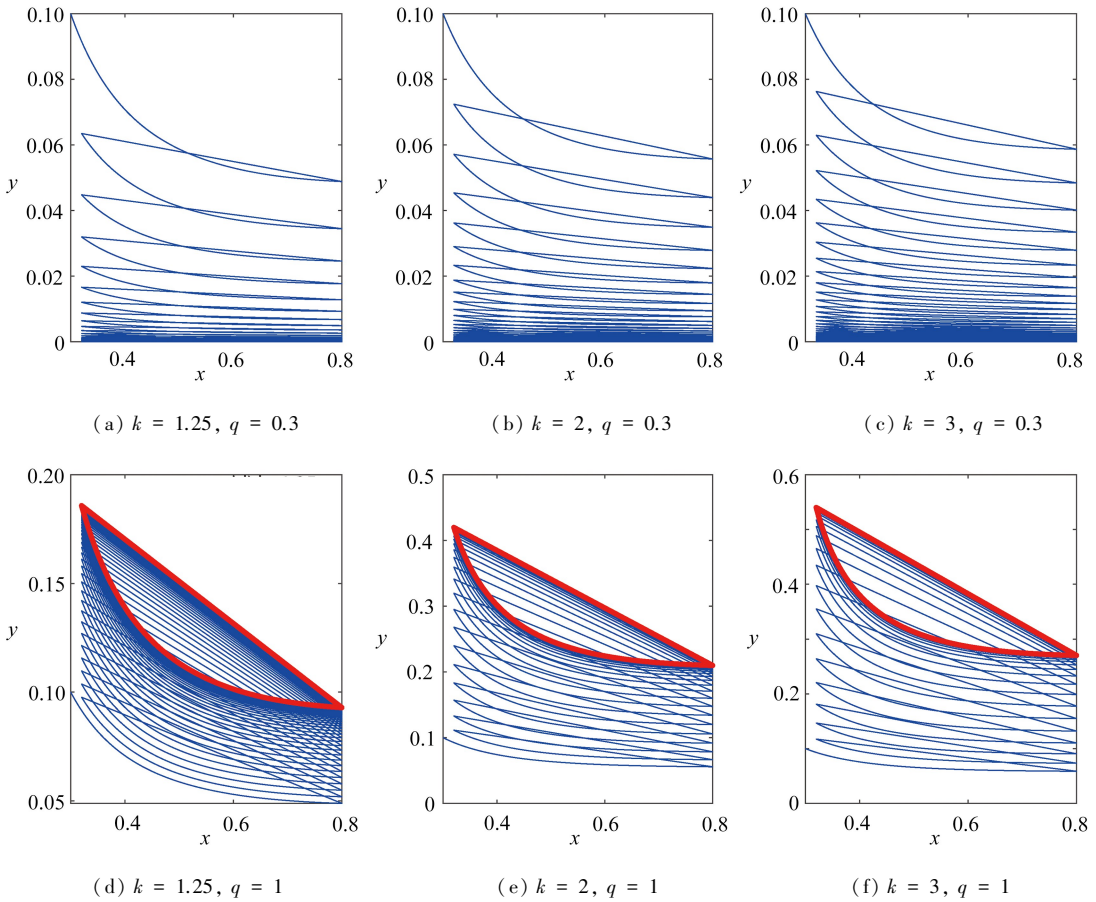


图 3 当  $q = 0.3$  和 1 且  $k = 1.25, 2, 3$  时, 系统(5)的相图

Fig. 3 The phase portraits of system (5) with  $q = 0.3$  and  $q = 1$  for  $k = 1.25, 2, 3$

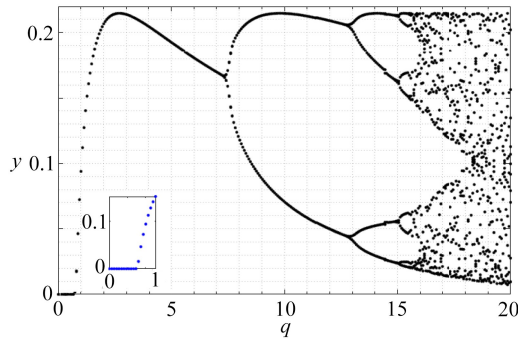
为了进一步了解参数  $q$  对系统(5)动力学性态的影响, 以  $q$  为分支参数绘制捕食者  $y$  关于



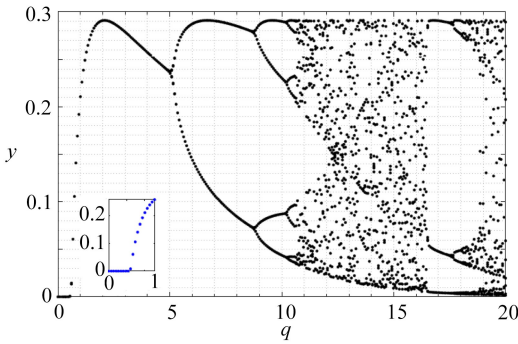
$q$  的分支图(见图 4),并得到不同  $k$  值对应的分支临界值(见表 1).随着  $q$  在  $[0, 20]$  的不断  
增加,系统(5)呈现复杂的动力学性态.当  $k = 1.25$  时,系统(5)始终存在半平凡周期解

$$\begin{cases} \xi(t) = \frac{1.25}{1 + 2.906 3e^{-0.75(t-2.189 6(k-1))}}, & 2.189 6(k-1) < t \leq 2.189 6k, k \in \mathbf{N}. \\ \eta(t) = 0, \end{cases}$$

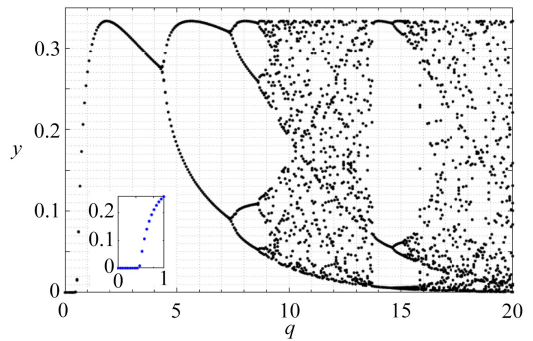
当  $q$  足够小时,半平凡周期解( $\xi(t), \eta(t)$ ) 是稳定的,该周期解保持其稳定性直到达到临界点  $q^*$ .在  $q \approx q^*$  处,半平凡周期解通过 fold 分岔出阶 1-周期解.该阶 1-周期解在  $q \in (q^*, q_1)$  时是稳定的,而在  $q > q_1$  时是不稳定的.即当  $q$  增加到  $q_1$  时,阶 1-周期解失稳,出现阶 2-周期解;当  $q$  增大到  $q_2$  时,出现阶 4-周期解,周期翻倍;当  $q$  达到  $q_3$  时,出现阶 8-周期解,周期再翻倍,这种现象叫做倍周期分岔(flip 分岔);当  $q$  达到  $q_4$  时,倍周期分岔现象突然中断,过渡到混沌运动状态.



(a)  $k = 1.25$



(b)  $k = 2$



(c)  $k = 3$

图 4 当  $q \in [0, 20]$  且  $k = 1.25, 2, 3$  时,系统(5)的分支图

Fig. 4 The bifurcations of system (5) for  $k = 1.25, 2, 3$  and  $q \in [0, 20]$

表 1 分支临界值

Table 1 Critical bifurcation values

$k$	$q^*$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$
1.25	0.776 6	7.458	12.78	15.00	15.45	-	-	-
2	0.600 1	5.017	8.696	10.17	10.57	16.52	17.53	18.00
3	0.534 6	4.281	7.358	8.629	8.896	13.65	14.65	15.18

对于  $k = 2$  和  $k = 3$  这两种情形,虽然无状态反馈控制下正平衡点的类型不同,但状态反馈控制下系统(5)有着相似的动力学性态.当  $q$  从 0 趋于  $q_4$  时,系统(5)历经了稳定的半平凡周期

解→fold 分岔→flip 分岔.随着  $q$  的继续增大,从 flip 分岔过渡到混沌.当  $q$  进一步增加时,稳定的周期窗口再次出现:在  $q \approx q_5$  处出现周期 3 窗口;在  $q \approx q_6$  处出现周期 5 窗口.之后,稳定周期性态再次中断,进入新的混沌运动状态.

由图 4 可以看出,系统(5)总在  $q$  的某一范围内出现混沌运动状态.那么混沌状态的出现对生物学有什么影响呢?混沌的出现对生物学捕捞有着负面影响,它的出现导致我们无法定性地考虑(食饵)捕获率或(捕食者)释放率.本文考虑了捕食者  $y(t)$  关于释放率  $q$  的分支图,故当系统(5)处于混沌状态时,无法确定释放率,进而难以制定合理有效且经济的控制措施.同时,混沌状态的出现打破了两物种间的平衡.为此,我们对混沌进行控制,即混沌控制.混沌控制,简言之从混沌到有序<sup>[17]</sup>.如:固定  $k = 2$ ,当  $q_4 < q < q_5$  时,系统处于混沌状态;当  $q_5 < q < q_6$  时,系统处于有序状态.因此,可以通过调节参数  $k$  和  $q$  对混沌进行控制.

依上述分析,参数  $k$  和  $q$  影响着系统(5)解的性态,有效地验证了系统(2)结论的正确性.同时,分支图 4 揭示了状态反馈控制系统存在着复杂的动力学行为:半平凡周期解通过 fold 分岔分岔出阶 1-周期解,阶 1-周期解以周期不断加倍的 flip 分岔方式逐步过渡到混沌运动状态.综合其生物意义:通过状态反馈控制使食饵密度不超过某一阈值的同时释放一定量的捕食者,这一措施可使两物种共存,有效地保护了物种的多样性,维持了生态系统的平衡.

## 4 总 结

对于具有 Holling IV 型功能反应的捕食系统,当  $d_1 = 0, 0 < d_3 < k$  时该连续捕食系统存在唯一的正平衡点  $(d_3, r(1 - d_3/k)(a + bd_3 + d_3^2))$ .对于状态脉冲反馈控制捕食系统,本文推导并给出了半平凡周期解稳定的充分条件,并利用半连续动力系统几何理论详细分析了  $h < d_3$  时正周期解的存在性.数值模拟揭示了  $h < d_3$  时状态脉冲反馈控制系统存在着复杂的动力学行为:半平凡周期解通过 fold 分岔分岔出阶 1-周期解,阶 1-周期解以周期不断加倍的 flip 分岔方式逐步过渡到混沌运动状态.然而,对状态脉冲控制系统  $h < d_3$  时混沌的存在性以及  $(1 - p)h < d_3 < h$  和  $d_3 < (1 - p)h$  的动力学尚未给出具体的理论分析,需后续进一步研究.

**致谢** 本文作者衷心感谢陕西科技大学学术团队项目(2013XSD39)对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996. (MA Zhien. *Mathematical Modeling and Research of Population Ecology*[M]. Hefei: Anhui Education Press, 1996. (in Chinese))
- [2] LIU X X, HUANG Q D. The dynamics of a harvested predator-prey system with Holling type IV functional response[J]. *Biosystems*, 2018, **169/170**: 26-39.
- [3] LAJMIRI Z, KHOSHSHIAR G R, ORAK I. Bifurcation and stability analysis of a ratio-dependent predator-prey model with predator harvesting rate[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, **106**: 193-200.
- [4] SEN M, SRINIVASU P D N, BANERJEE M. Global dynamics of an additional food provided predator-prey system with constant harvest in predators[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **250**: 193-211.
- [5] LI S Y, XIONG Z L, WANG X. The study of a predator-prey system with group defense and impulsive control strategy[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, **34**(9): 2546-2561.
- [6] TIAN Y, TANG S Y, CHEKEC R A. Dynamic complexity of a predator-prey model for IPM

- with nonlinear impulsive control incorporating a regulatory factor for predator releases [J]. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2019, **24**(1): 134-154.
- [7] 焦建军, 陈兰荪, J·J·尼托, 等. 连续收获捕食者与脉冲存放食饵的阶段结构捕食-食饵模型的全局吸引和一致持久[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(5): 589-600. (JIAO Jianjun, CHEN Lansun, NIETO J J, et al. Permanence and global attractivity of a stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(5): 589-600. (in Chinese))
- [8] 蒋贵荣, 刘期怀, 龙腾飞, 等. 脉冲动力系统的分岔混沌理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2015. (JIANG Guirong, LIU Qihuai, LONG Tengfei, et al. *Bifurcation Chaos Theory of Impulsive Dynamic Systems and Application* [M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese))
- [9] YANG J, TANG G Y, TANG S Y. Holling-Tanner predator-prey model with state-dependent feedback control [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2018. DOI: 10.1155/2018/3467405.
- [10] HE Z M. Impulsive state feedback control of a predator-prey system with group defense [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **79**(4): 2699-2714.
- [11] 钱临宁, 陆启韶. 一类自治脉冲微分方程的动力学研究 [J]. 动力学与控制学报, 2008, **6**(2): 97-101. (QIAN Linning, LU Qishao. Dynamics of a class of autonomous impulsive equations [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, **6**(2): 97-101. (in Chinese))
- [12] 白露, 刘琼, 陈武大仁. 一类捕食-食饵系统的状态依赖反馈控制模型 [J]. 应用数学进展, 2018, **7**(10): 1340-1348. (BAI Lu, LIU Qiong, CHEN Wudaren. A predator-prey model with state-dependent feedback control [J]. *Advances in Applied Mathematics*, 2018, **7**(10): 1340-1348. (in Chinese))
- [13] LIANG Z Q, ZENG X P, PANG G P, et al. Periodic solution of a Leslie predator-prey system with ratio-dependent and state impulsive feedback control [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **89**(4): 2941-2955.
- [14] ZHOU Z W, LIANG Z Q, ZENG X P, et al. Periodic solution of Holling-Tanner model with impulsive state feedback control [J]. *Mathematica Applicata*, 2017, **30**(3): 576-588.
- [15] HUANG J C, XIAO D M. Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with Holling type-IV functional response [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2004, **20**(1): 167-178.
- [16] 陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论 [J]. 北华大学学报(自然科学版), 2011, **12**(1): 1-9. (CHEN Lansun. Pest control and geometric theory of semi-continuous dynamical system [J]. *Journal of Beihua University (Natural Science)*, 2011, **12**(1): 1-9. (in Chinese))
- [17] 张建树. 前沿与交叉科学-混沌生物学 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1998. (ZHANG Jian-shu. *Frontiers and Crossover Science-Chaos Biology* [M]. Xi'an: Shaanxi Science and Technology Press, 1998. (in Chinese))

# State Feedback Control of Predator-Prey Systems With Holling IV Functional Responses

WANG Xiaoe, LIN Xiaolin, LI Jianquan

(*School of Arts and Sciences, Shaanxi University of Science and Technology,  
Xi'an 710021, P.R.China*)

**Abstract:** A class of predator-prey systems with Holling IV functional responses under state feedback control were studied. The sufficient conditions for the existence and stability of semi-trivial solutions and order-1 periodic solutions were obtained by means of the analogue of the Poincaré criterion and the geometric theory for semi-continuous dynamical systems. The numerical simulation verifies the correctness of the conclusion and the effectiveness of the state feedback control, and reveals abundant dynamic behaviors of the state feedback control system, such as the fold bifurcation, the flip bifurcation and chaos.

**Key words:** Holling IV functional response; state feedback control; successor function; order-1 periodic solution

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11971281)