

# 含有离散时滞及分布时滞分数阶神经网络的渐近稳定性分析\*

刘 健, 张志信, 蒋 威

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

**摘要:** 研究了含有离散时滞及分布时滞的分数阶神经网络在 Caputo 导数意义下的渐近稳定性问题.通过构造 Lyapunov 函数和利用分数阶 Razumikhin 定理给出了含有离散时滞和分布时滞的分数阶神经网络渐近稳定性的充分条件,并给出 4 个例子验证了定理条件的有效性.

**关键词:** 分数阶神经网络; 时滞; 渐近稳定性; 分数阶 Razumikhin 方法; Lyapunov 函数

**中图分类号:** O175.15      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.400286

## 引 言

分数阶微积分在流体力学、控制系统、人工智能等诸多领域的应用<sup>[1-4]</sup>,引起了学者们对分数阶微积分的广泛关注.与整数阶微积分相比,分数阶微积分可以更精确地描述系统的遗传和记忆特性.基于分数阶微积分的这些特性,相关学者在神经网络中引入了分数阶微积分,从而更好地描述神经元的动态行为.针对分数阶神经网络已经出现了相关的研究背景:文献[5]给出了分数阶神经网络模型,并分析了分数阶神经网络的动力学行为.文献[6]给出了环型和中心结构的分数阶神经网络系统,讨论了该模型的分岔和混沌现象,建立了分岔条件,并给出了系统的稳定性条件.文献[7]通过整数阶神经网络和分数阶神经网络的对比,说明了分数阶神经网络比整数阶神经网络有更好的动力学行为,对系统的动力学行为描述得更加精确.文献[8]研究了分数阶神经网络的修正投影同步问题.

分数阶神经网络的稳定性分析是分数阶神经网络研究的重要课题之一,也取得了丰富的成果:如文献[9]研究了含有单侧 Lipschitz 条件的分数阶脉冲神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性.文献[10]讨论了含有参数扰动的分数阶记忆电阻器神经网络的 Hopfield 鲁棒稳定性.文献[11]给出了含有脉冲的分数阶神经网络全局 Mittag-Leffler 稳定性的 LMI 条件.

\* 收稿日期: 2019-09-23; 修订日期: 2019-10-26

**基金项目:** 国家自然科学基金(11371027;11471015;11601003);安徽省自然科学基金(1608085MA12)

**作者简介:** 刘健(1994—),男,硕士生(E-mail: 1916869562@qq.com);

张志信(1976—),男,副教授,硕士生导师(通讯作者. E-mail: zhang\_zhi\_x@sina.com);

蒋威(1959—),男,教授,博士生导师(E-mail: jiangwei@ahu.edu.cn).

**引用格式:** 刘健, 张志信, 蒋威. 含有离散时滞及分布时滞分数阶神经网络的渐近稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(6): 646-657.

随着人们对神经网络研究的不断深入,特别在具有约束条件的神经网络中,考虑含有时滞的分数阶神经网络具有重要的理论意义和应用价值.到目前为止,考虑含有时滞的分数阶神经网络的稳定性已经取得了若干成果:文献[12]研究了具有多重时间延迟非线性分数阶细胞神经网络的稳定性.文献[13]研究了一类基于记忆电阻器的时滞分数阶神经网络,通过构造 Lyapunov 泛函并应用 Gronwall 积分不等式,提出了一种新的保证全局 Mittag-Leffler 稳定性的准则.文献[14]给出了具有时滞的中立型分数阶神经网络一致稳定性的充分条件.文献[15]研究了含有时滞的分数阶 Hopfield 神经网络的全局稳定性.文献[16]研究了基于忆阻器的分数阶时滞复值神经网络的全局渐近稳定性.基于以上研究成果,本文将研究同时含有离散时滞及分布时滞的分数阶神经网络的渐近稳定性问题.

## 1 准备知识

为了讨论方便,本文给出以下的记号: $R^n$  是  $n$  维 Euclid 空间, $R^{n \times n}$  是所有  $n \times n$  实矩阵的集合, $I$  是  $n$  阶单位矩阵, $U^T$  是实矩阵或向量  $U$  的转置, $\|x\|$  是实向量  $x$  的 Euclid 范数, $A < \mathbf{0}$  表示对称矩阵  $A$  是负定的, $\lambda_{\max}(P)$  与  $\lambda_{\min}(P)$  表示矩阵  $P$  的最大特征值和最小特征值.

**定义 1**<sup>[1]</sup> 设可积函数  $f(t) \in C[t_0, +\infty)$ ,  $\alpha > 0$ , 则当  $t > t_0$  时,记

$${}_{t_0}D_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

为函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶 Riemann-Liouville 分数阶积分.

**定义 2**<sup>[1]</sup> 设  $0 \leq n-1 < \alpha < n, n \in \mathbf{N}_+, f(t)$  具有  $n$  阶连续导数,记

$${}_{t_0}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad (2)$$

为函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 分数阶导数.

**引理 1**<sup>[17]</sup> 若  $x(t) \in R^n$  是可微函数且  $P \in R^{n \times n}$  是对称正定矩阵,则有下列不等式成立:

$${}_{t_0}D_t^\alpha [x^T(t)Px(t)] \leq 2x^T(t)P {}_{t_0}D_t^\alpha x(t), \quad \forall \alpha \in (0,1). \quad (3)$$

**引理 2**<sup>[18]</sup> 对任意的  $u, v \in R^n, \delta > 0$ , 则  $2u^T v \leq \delta u^T u + (1/\delta)v^T v$  成立.

考虑分数阶时滞方程:

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

这里  $0 < \alpha \leq 1, x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r, 0], f$  是一个连续向量函数满足  $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

**引理 3**<sup>[19]</sup> 如果存在常数  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$  和 Lyapunov 函数  $V: R^n \rightarrow \mathbf{R}$  满足

$$a_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq a_2 \|x\|^2, \quad (5)$$

且当  $V(x(t+\theta)) \leq \gamma V(x(t)), \theta \in [-r, 0], \gamma > 1$  时,沿着方程(4)的  $\alpha$  阶导数满足

$${}_{t_0}D_t^\alpha V(x(t)) \leq -a_3 \|x\|^2, \quad (6)$$

则分数阶时滞方程(4)的零解是渐近稳定的.

**引理 4**(Schur complement)<sup>[20]</sup> 对一个给定的对称矩阵  $S$ , 下列说法是等价的:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (7a)$$

$$S_{11} < \mathbf{0}, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < \mathbf{0}, \quad (7b)$$

$$S_{22} < \mathbf{0}, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < \mathbf{0}. \quad (7c)$$

**引理 5**<sup>[21]</sup> 对任意常矩阵  $W \in R^{m \times m}$ ,  $W = W^T > \mathbf{0}$ , 标量  $0 < r(t) < r$ , 向量函数  $\omega: [0, r] \rightarrow R^m$ , 则有

$$r(t) \int_0^{r(t)} \omega^T(s) W \omega(s) ds \geq \left( \int_0^{r(t)} \omega(s) ds \right)^T W \left( \int_0^{r(t)} \omega(s) ds \right). \quad (8)$$

下面主要考虑含有离散时滞和分布时滞的分数阶神经网络的渐近稳定性:

$${}^c_0 D_t^\alpha y_i(t) = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} g_j(y_j(t - r_1(t))) + I_i, \quad (9)$$

$${}^c_0 D_t^\alpha y_i(t) = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} g_j(y_j(t - r_1(t))) + \int_{t-r_2(t)}^t \sum_{j=1}^n d_{ij} h_j(y_j(s)) ds + I_i, \quad (10)$$

其中  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 或等价于

$${}^c_0 D_t^\alpha \mathbf{y}(t) = -\mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{C} \mathbf{g}(\mathbf{y}(t - r_1(t))) + \mathbf{I}, \quad (11)$$

$${}^c_0 D_t^\alpha \mathbf{y}(t) = -\mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{C} \mathbf{g}(\mathbf{y}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{y}(s)) ds + \mathbf{I}, \quad (12)$$

其中  ${}^c_0 D_t^\alpha \mathbf{y}(t)$  表示  $\mathbf{y}(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 导数,  $0 < \alpha < 1$ ,  $n$  表示神经元的单位数,  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in R^n$  表示在时刻  $t$  的状态向量;  $\mathbf{A} = \text{diag}\{a_i\}$ ,  $a_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $a_i$  表示在断开网络和外部输入时第  $i$  个神经元将其电位重置为静止状态的速率;  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ ,  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ ,  $\mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n}$  代表权重矩阵;  $\mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) = [f_1(y_1(t)), f_2(y_2(t)), \dots, f_n(y_n(t))]^T$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) = [g_1(y_1(t)), g_2(y_2(t)), \dots, g_n(y_n(t))]^T$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{y}(t)) = [h_1(y_1(t)), h_2(y_2(t)), \dots, h_n(y_n(t))]^T$  表示激励函数, 且  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{I} = [I_1, I_2, \dots, I_n]^T$  是神经元的输出;  $r_1(t), r_2(t)$  是时变时滞, 且满足  $0 \leq r_1(t) \leq r_1, 0 \leq r_2(t) \leq r_2$ .

已知系统(11)和(12)至少存在一个平衡点, 可以将系统(11)和(12)的平衡点  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^T$  平移到原点. 通过变换  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*$  将系统(11)和(12)转化为下面的形式:

$${}^c_0 D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))), \quad (13)$$

$${}^c_0 D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad (14)$$

其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  是变换后的系统的状态向量, 且  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}^*)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{y}^*)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{h}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{h}(\mathbf{y}^*)$ .

## 2 主要结果

### 2.1 含有离散时滞的分数阶神经网络的稳定性

考虑含有离散时滞的分数阶神经网络:

$${}^c_0 D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (15)$$

这里  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,  $r_1(t)$  是变时滞且满足  $0 \leq r_1(t) \leq r_1$ ,  $\mathbf{A}$  是正定对角矩阵,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in R^{n \times n}$  且  $\mathbf{f}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot) \in R^n$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

为了研究系统(15), 做如下假设:

(H1) 假设存在非负常数  $l_1, l_2$  使得对任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  满足

$$\|f(u) - f(v)\| \leq l_1 \|u - v\|, \|g(u) - g(v)\| \leq l_2 \|u - v\|. \quad (16)$$

**定理 1** 如果条件(H1)成立,且存在常数  $k > 0$  和对称正定矩阵  $P$  满足

$$\begin{pmatrix} -PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P + kP & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 I - kP \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (17)$$

那么分数阶时滞神经网络(15)的零解是渐近稳定的.

**证明** 构造一个 Lyapunov 函数  $V(t) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)$ , 这里  $P = P^T > \mathbf{0}$ . 则

$$\lambda_{\min}(P) \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|\mathbf{x}(t)\|^2. \quad (18)$$

由引理 1 可以得到沿着方程(15)的  $V(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 导数:

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha V(t) &\leq 2\mathbf{x}^T(t)P {}_0^c D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = \\ &2\mathbf{x}^T(t)P[-A\mathbf{x}(t) + Bf(\mathbf{x}(t)) + Cg(\mathbf{x}(t - r_1(t)))] . \end{aligned} \quad (19)$$

又由条件(H1)和引理 2 有

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T(t)PBf(\mathbf{x}(t)) &\leq \mathbf{x}^T(t)PBB^T P\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(t))f(\mathbf{x}(t)) \leq \\ &\mathbf{x}^T(t)PBB^T P\mathbf{x}(t) + l_1^2 \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)(PBB^T P + l_1^2 I)\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T(t)PCg(\mathbf{x}(t - r_1(t))) &\leq \\ &\mathbf{x}^T(t)PCC^T P\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t - r_1(t)))g(\mathbf{x}(t - r_1(t))) \leq \\ &\mathbf{x}^T(t)PCC^T P\mathbf{x}(t) + l_2^2 \mathbf{x}^T(t - r_1(t))\mathbf{x}(t - r_1(t)). \end{aligned} \quad (21)$$

所以

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha V(t) &\leq \mathbf{x}^T(t)(-PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P)\mathbf{x}(t) + \\ &l_2^2 \mathbf{x}^T(t - r_1(t))\mathbf{x}(t - r_1(t)). \end{aligned} \quad (22)$$

存在常数  $\gamma > 1$ , 当  $\mathbf{x}_t$  满足  $V(\mathbf{x}(t + \xi)) < \gamma V(\mathbf{x}(t))$ ,  $\xi \in [-r_1, 0]$  时, 对任意  $k > 0$  有

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha V(t) &\leq \mathbf{x}^T(t)(-PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P)\mathbf{x}(t) + \\ &l_2^2 \mathbf{x}^T(t - r_1(t))\mathbf{x}(t - r_1(t)) + k[\gamma \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - r_1(t))P\mathbf{x}(t - r_1(t))] = \\ &(\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - r_1(t))) \times \\ &\begin{pmatrix} -PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P + k\gamma P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 I - kP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t - r_1(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

由式(17)表明:对充分小的  $\delta > 0, \gamma = 1 + \delta$ , 有

$$\begin{pmatrix} -PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P + k\gamma P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 I - kP \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (24)$$

记

$$\Omega = \begin{pmatrix} -PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P + k\gamma P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 I - kP \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$\lambda_{\min}(-\Omega) = \lambda_0$ , 则  $\lambda_0 > 0$ , 可以得到

$${}_0^c D_t^\alpha V(t) \leq -\lambda_0 (\|\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}(t - r_1(t))\|^2) \leq -\lambda_0 \|\mathbf{x}(t)\|^2. \quad (26)$$

则由引理 3 可知, 分数阶时滞神经网络(15)的零解是渐近稳定的, 定理得证.

## 2.2 含有分布时滞分数阶神经网络的稳定性

下面考虑含有分布时滞分数阶神经网络:

$${}^C D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (27)$$

这里  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,  $r_1(t), r_2(t)$  是时变时滞且满足  $0 \leq r_1(t) \leq r_1, 0 \leq r_2(t) \leq r_2$ ,  $\mathbf{A}$  是正定对角矩阵,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in R^{n \times n}$  且  $\mathbf{f}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot), \mathbf{h}(\cdot) \in R^n, \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

为了研究系统(27), 做如下假设:

(H2) 假设存在非负常数  $l_1, l_2, l_3$  使得对任意  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  满足

$$\begin{cases} \|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{v})\| \leq l_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \\ \|\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{v})\| \leq l_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \\ \|\mathbf{h}(\mathbf{u}) - \mathbf{h}(\mathbf{v})\| \leq l_3 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \end{cases} \quad (28)$$

**定理 2** 如果条件(H2)成立, 且存在对称正定矩阵  $\mathbf{P}$  和常数  $k_1 > 0, k_3 > k_2 > 0$  满足

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + l_1^2\mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P} + (k_3r_2 + k_1)\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2\mathbf{I} - k_1\mathbf{P} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} (k_2 - k_3)\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_2l_3^2\mathbf{I} - k_2\mathbf{P} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (30)$$

那么分数阶时滞神经网络(27)的零解是渐近稳定的.

**证明** 构造一个 Lyapunov 函数  $V(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ . 这里  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$ , 则

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}(t)\|^2. \quad (31)$$

由引理 1 可以得到沿着方程(27)的  $V(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 导数:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha V(t) &\leq 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P} {}^C D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = \\ &2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P} \left[ -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds \right] = \\ &2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(-\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \\ &2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds. \end{aligned} \quad (32)$$

又由条件(H2)和引理 2 有

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) &\leq \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \leq \\ &\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + l_1^2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + l_1^2\mathbf{I})\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) &\leq \\ &\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t - r_1(t)))\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) \leq \\ &\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + l_2^2\mathbf{x}^T(t - r_1(t))\mathbf{x}(t - r_1(t)), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds &\leq \\ &\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \left( \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds \right)^T \left( \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds \right) \leq \\ &\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + r_2(t) \left( \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}^T(\mathbf{x}(s))\mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds \right) \leq \\ &\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + r_2 \left( \int_{t-r_2(t)}^t l_3^2\mathbf{x}^T(s)\mathbf{x}(s) ds \right). \end{aligned} \quad (35)$$

存在常数  $\gamma > 1$ , 当  $V(\mathbf{x}(t + \xi)) < \gamma V(\mathbf{x}(t))$ ,  $\xi \in [-r, 0]$  时, 这里  $r = \max(r_1, r_2)$ , 对任意  $k_1, k_2 > 0$  时, 有

$$\begin{aligned}
 & {}_0^c D_t^\alpha V(t) \leq \\
 & 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P} \left[ -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds \right] \leq \\
 & 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P} \left[ -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds \right] + \\
 & k_1 [\gamma \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - r_1(t)) \mathbf{P} \mathbf{x}(t - r_1(t))] + \\
 & \int_{t-r_2(t)}^t k_2 [\gamma \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(s) \mathbf{P} \mathbf{x}(s)] ds \leq \\
 & \mathbf{x}^T(t) \left[ -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + \right. \\
 & \left. (k_3 r_2(t) + k_1 \gamma) \mathbf{P} \right] \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t - r_1(t)) (l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P}) \mathbf{x}(t - r_1(t)) + \\
 & \int_{t-r_2(t)}^t [(k_2 \gamma - k_3) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(s) (r_2 l_3^2 \mathbf{I} - k_2 \mathbf{P}) \mathbf{x}(s)] ds \leq \\
 & \mathbf{x}^T(t) \left[ -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + \right. \\
 & \left. (k_3 r_2 + k_1 \gamma) \mathbf{P} \right] \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t - r_1(t)) (l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P}) \mathbf{x}(t - r_1(t)) + \\
 & \int_{t-r_2(t)}^t [(k_2 \gamma - k_3) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(s) (r_2 l_3^2 \mathbf{I} - k_2 \mathbf{P}) \mathbf{x}(s)] ds = \\
 & (\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - r_1(t))) \times \\
 & \begin{pmatrix} -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + (k_3 r_2 + k_1 \gamma) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P} \end{pmatrix} \times \\
 & \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t - r_1(t)) \end{pmatrix} + \\
 & \int_{t-r_2(t)}^t (\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(s)) \begin{pmatrix} (k_2 \gamma - k_3) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_2 l_3^2 \mathbf{I} - k_2 \mathbf{P} \end{pmatrix} (\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(s))^T ds. \quad (36)
 \end{aligned}$$

由式(29)和(30)表明对充分小的  $\delta > 0, \gamma = 1 + \delta$ , 有

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + (k_3 r_2 + k_1 \gamma) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} (k_2 \gamma - k_3) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_2 l_3^2 \mathbf{I} - k_2 \mathbf{P} \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (38)$$

记

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + (k_3 r_2 + k_1 \gamma) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} (k_2 \gamma - k_3) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_2 l_3^2 \mathbf{I} - k_2 \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$\lambda_{\min}(-\Phi) = \mu_0, \lambda_{\min}(-\Theta) = \omega_0$ , 则  $\mu_0 > 0, \omega_0 > 0$ . 可以得到

$${}_0^c D_t^\alpha V(t) \leq -\mu_0 (\|\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}(t - r_1(t))\|^2) +$$

$$\int_{t-r_2(t)}^t (-\omega_0) (\|\mathbf{x}(t)\|^2 + \|\mathbf{x}(s)\|^2) ds \leq -\mu_0 \|\mathbf{x}(t)\|^2. \quad (41)$$

则由引理 3 可知, 分数阶时滞神经网络(27)的零解是渐近稳定的, 定理得证.

### 3 数值例子

**例 1** 考虑含有离散时滞的分数阶神经网络系统:

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (42)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

这里

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\sin x_1, \sin x_2)^\top,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) = \frac{1}{2} (\tanh(x_1(t - r_1(t))), \tanh(x_2(t - r_1(t))))^\top, \quad r_1(t) > 0.$$

显然  $l_1 = 1, l_2 = 1/2$ . 取  $k = 1, \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$ , 直接计算得到  $l_2^2 \mathbf{I} - k\mathbf{P} = -(3/4)\mathbf{I}_2 < \mathbf{0}$ , 且有

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^\top \mathbf{P} + k\mathbf{P} - \mathbf{0} = \begin{pmatrix} -1.7 & -0.08 \\ -0.08 & -1.81 \end{pmatrix} < \mathbf{0}.$$

根据引理 4 (Schur 引理) 可知式(17)成立, 这表明系统(42)的解是渐近稳定的.

下面的图像是在初值  $x_1 = 0.1 \times (t + 1), x_2 = 0.1 \times (t + 1), t \in [-1, 0]$  时,  $\alpha = 0.5$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\sin x_1, \sin x_2)^\top,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) = \frac{1}{2} (\tanh(x_1(t - r_1(t))), \tanh(x_2(t - r_1(t))))^\top,$$

$$r_1(t) = 1 > 0,$$

这些条件下对系统(42)解的数值模拟(见图 1 和图 2). 算法参考了文献[22].

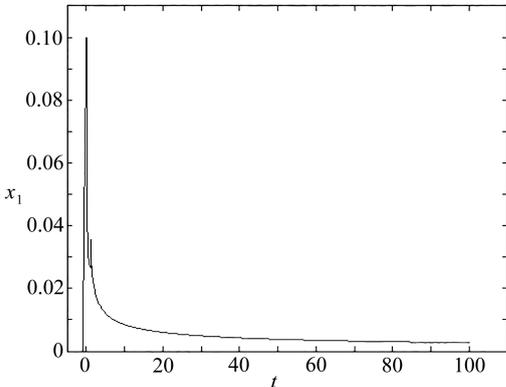


图 1 方程(42)的  $x_1$  状态轨迹

Fig. 1 The  $x_1$  state trace of eq. (42)

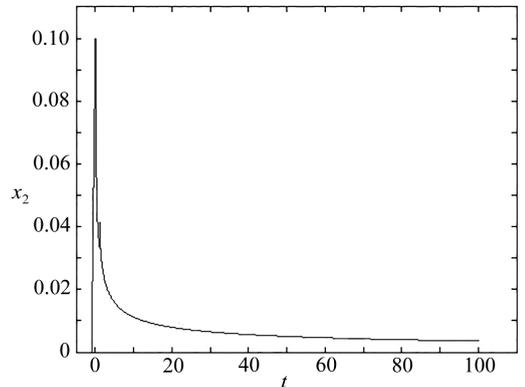


图 2 方程(42)的  $x_2$  状态轨迹

Fig. 2 The  $x_2$  state trace of eq. (42)

下面给出不满足定理 1 的判定条件时,分数阶时滞神经网络的解的数值模拟.

**例 2** 考虑含有离散时滞的分数阶神经网络系统:

$${}^C D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (43)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

这里

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\sin x_1, \sin x_2)^\top,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) = \frac{1}{2}(\tanh(x_1(t - r_1(t))), \tanh(x_2(t - r_1(t))))^\top, \quad r_1(t) > 0.$$

显然  $l_1 = 1, l_2 = 1/2$ . 取  $k = 1, \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$ , 直接计算得到  $l_2^2 \mathbf{I} - k\mathbf{P} = -(3/4)\mathbf{I}_2 < \mathbf{0}$ , 且有

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{C}^\top \mathbf{P} + k\mathbf{P} - \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 2.26 & -0.08 \\ -0.08 & -1.81 \end{pmatrix}$$

不是负定矩阵.

下面的图像是在初值  $x_1 = 0.1 \times (t + 1), x_2 = 0.1 \times (t + 1), t \in [-1, 0], \alpha = 0.5, r_1(t) = 1$  时,对系统(43)解的数值模拟(见图 3 和图 4).

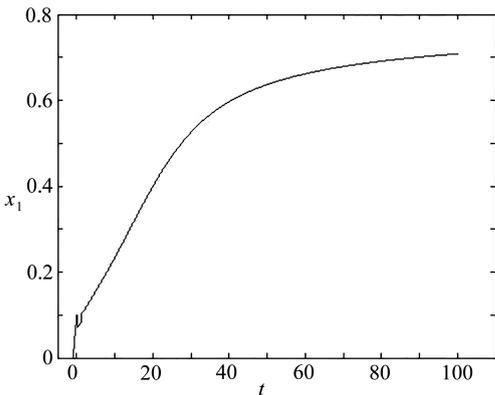


图 3 方程(43)的  $x_1$  状态轨迹

Fig. 3 The  $x_1$  state trace of eq. (43)

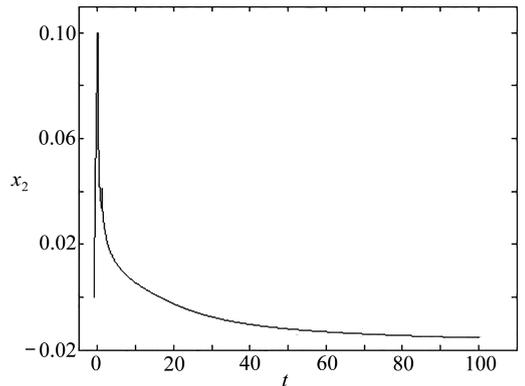


图 4 方程(43)的  $x_2$  状态轨迹

Fig. 4 The  $x_2$  state trace of eq. (43)

由系统(43)的数值模拟结果可知系统(43)的解不是渐近稳定的.

**例 3** 考虑含有离散时滞和分布时滞的分数阶神经网络系统:

$${}^C D_{t_0}^\alpha \mathbf{x}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (44)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix},$$

这里  $r_1(t) > 0, r_2(t) = 0.5\sin^2 t \leq 0.5 = r_2$  且

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\sin x_1, \sin x_2)^\top,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) = \frac{1}{2}(\tanh(x_1(t - r_1(t))), \tanh(x_2(t - r_1(t))))^T,$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) = (\tanh x_1(s), \tanh x_2(s))^T.$$

显然  $l_1 = 1, l_2 = 1/2, l_3 = 1$ . 这里取  $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 2, \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$ , 直接计算得到  $l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P} = -(3/4) \mathbf{I}_2 < \mathbf{0}$ , 且有

$$-\mathbf{PA} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{PBB}^T \mathbf{P} + l_1^2 \mathbf{I} + \mathbf{PCC}^T \mathbf{P} + \mathbf{PDD}^T \mathbf{P} + (k_1 + k_3 r_2) \mathbf{P} - \mathbf{0} = \begin{pmatrix} -0.57 & 0.01 \\ 0.01 & -0.72 \end{pmatrix} < \mathbf{0}.$$

显然  $(k_2 - k_3) \mathbf{P} = -\mathbf{I}_2 < \mathbf{0}$ , 且  $r_2 l_3^2 \mathbf{I} - k_2 \mathbf{P} = -0.5 \mathbf{I}_2 < \mathbf{0}$ .

根据引理 4 (Schur 引理) 可知, 式 (29) 和 (30) 成立, 这表明系统 (44) 的解是渐近稳定的.

下面的图像是在初值  $x_1 = 1 \times (t + 0.5), x_2 = 1 \times (t + 0.5), t \in [-0.5, 0], \alpha = 0.5, r_1(t) = r_2(t) = 0.5$  时, 对系统 (44) 解的数值模拟 (见图 5 和图 6).

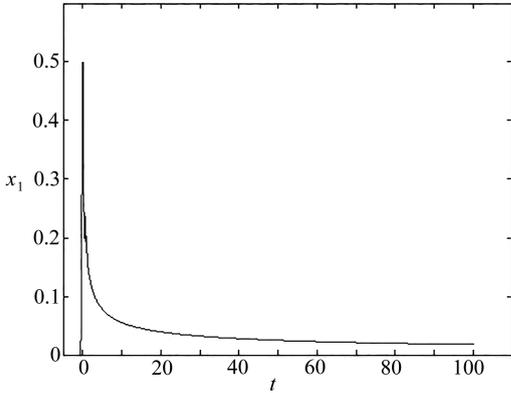


图 5 方程 (44) 的  $x_1$  状态轨迹

Fig. 5 The  $x_1$  state trace of eq. (44)

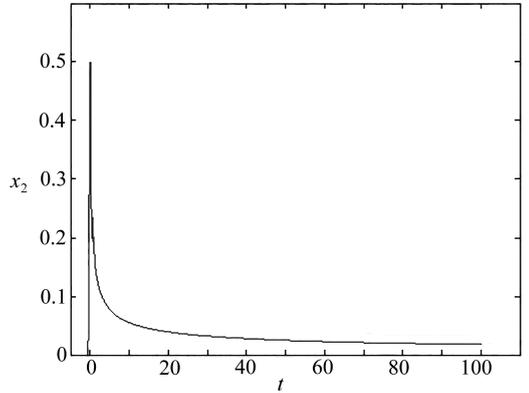


图 6 方程 (44) 的  $x_2$  状态轨迹

Fig. 6 The  $x_2$  state trace of eq. (44)

下面给出不满足定理 2 的判定条件时, 分数阶时滞神经网络解的数值模拟.

**例 4** 考虑含有离散时滞和分布时滞的分数阶神经网络系统:

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = & -\mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bf}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{Cg}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) + \\ & \mathbf{D} \int_{t-r_2(t)}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (45)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix},$$

这里  $r_1(t) > 0, r_2(t) = 0.5 \sin^2 t \leq 0.5 = r_2$  且

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\sin x_1, \sin x_2)^T,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t - r_1(t))) = \frac{1}{2}(\tanh(x_1(t - r_1(t))), \tanh(x_2(t - r_1(t))))^T,$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(s)) = (\tanh x_1(s), \tanh x_2(s))^T.$$

显然  $l_1 = 1, l_2 = 1/2, l_3 = 1$ . 这里取  $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 2, \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$ . 直接计算得到  $l_2^2 \mathbf{I} - k_1 \mathbf{P} = -(3/4) \mathbf{I}_2 < \mathbf{0}$ , 且有

$$-PA - A^T P + PBB^T P + l_1^2 I + PCC^T P + PDD^T P + (k_1 + k_3 r_2)P - 0 = \begin{pmatrix} 3.39 & 0.01 \\ 0.01 & -0.72 \end{pmatrix}$$

不是负定的,此时不满足定理 2 的判定条件.

下面的图像是在初值  $x_1 = -t, x_2 = -t, t \in [-0.5, 0], \alpha = 0.5, r_1(t) = r_2(t) = 0.5$  时,对系统(45)解的数值模拟(见图 7 和图 8).

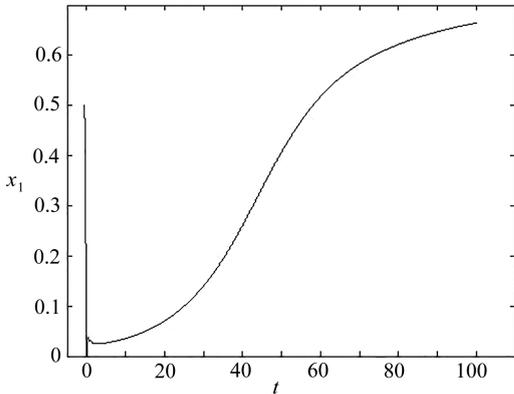


图 7 方程(45)的  $x_1$  状态轨迹

Fig. 7 The  $x_1$  state trace of eq. (45)

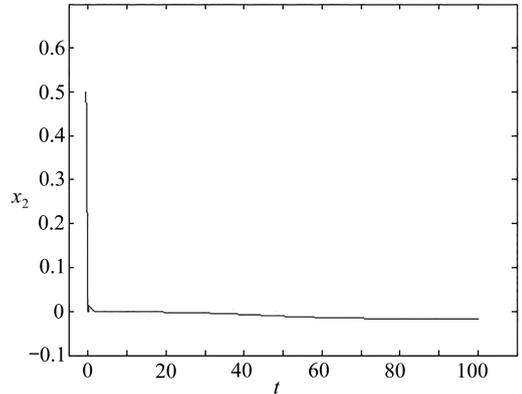


图 8 方程(45)的  $x_2$  状态轨迹

Fig. 8 The  $x_2$  state trace of eq. (45)

由系统(45)的数值模拟可知,系统(45)的解不是渐近稳定的.

## 4 结 论

本文研究了含有离散时滞和分布时滞的分数阶神经网络在 Caputo 导数意义下的渐近稳定性问题.通过构造 Lyapunov 函数,并利用分数阶 Razumikhin 定理分别讨论了含有离散时滞和分布时滞的分数阶神经网络渐近稳定性的充分条件.最后通过数值例子仿真验证了所得结果的有效性.事实上,在神经网络中普遍存在时滞、脉冲等复杂现象,研究含有时滞的分数阶神经网络具有很重要的理论意义和应用价值,也是一项具有挑战性的工作.在将来的研究工作中,本研究团队将进一步分析时滞对分数阶神经网络性态的影响.

## 参考文献 (References):

- [1] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [2] OLDHAM K B, SPANIER J. *The Fractional Calculus*[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [3] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 2006.
- [4] MILLER K S, ROSS B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1993.
- [5] ARENA P, FORTUNA L, PORTO L. Chaotic behavior in noninteger-order cellular neural networks[J]. *Physical Review E*, 2000, **61**(1): 776-781.
- [6] KASLIK E, SIVASUNDARAM S. Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2012, **32**: 245-256.
- [7] HUANG X, ZHAO Z, WANG Z, et al. Chaos and hyperchaos in fractional-order cellular neural

- networks[J]. *Neurocomputing*, 2012, **94**: 13-21.
- [8] 张平奎, 杨绪君. 基于激励滑模控制的分数阶神经网络的修正投影同步研究[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(3): 343-354. (ZHANG Pingkui, YANG Xujun. Modified projective synchronization of a class of fractional-order neural networks based on active sliding mode control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 343-354. (in Chinese))
- [9] ZHANG X X, NIU P F, MA Y P, et al. Global Mittag-Leffler stability analysis of fractional-order impulsive neural networks with one-side Lipschitz condition[J]. *Neural Networks*, 2017, **94**: 67-75.
- [10] LIU S X, YU Y G, ZHANG S, et al. Robust stability of fractional-order memristor-based Hopfield neural networks with parameter disturbances[J]. *Physica A*, 2018, **509**: 845-854.
- [11] WU H Q, ZHANG X X, XUE S H, et al. LMI conditions to global Mittag-Leffler stability of fractional-order neural networks with impulses[J]. *Neurocomputing*, 2016, **193**: 148-154.
- [12] LIANG S, WU R C, CHEN L P. Comparison principles and stability of nonlinear fractional-order cellular neural networks with multiple time delays[J]. *Neurocomputing*, 2015, **168**: 618-625.
- [13] LIU W Z, JIANG M H, YAN M. Stability analysis of memristor-based time-delay fractional-order neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2019, **323**: 117-127.
- [14] LI Y, JIANG W, HU B B. Stability of neutral fractional neural networks with delay[J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 2016, **31**(4): 422-429.
- [15] WANG H, YU Y G, WEN G G, et al. Global stability analysis of fractional-order Hopfield neural networks with time delay[J]. *Neurocomputing*, 2015, **154**: 15-23.
- [16] 王利敏, 宋乾坤, 赵振江. 基于忆阻的分数阶时滞复值神经网络的全局渐近稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(3): 333-346. (WANG Limin, SONG Qiankun, ZHAO Zhenjiang. Global asymptotic stability of memristor-based fractional-order complex-valued neural networks with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(3): 333-346. (in Chinese))
- [17] DUARTE-MERMOUND M A, AGUILA-CAMACHO N, GALLEGOS J A, et al. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, **22**: 650-659.
- [18] LIU S, ZHOU X F, LI X Y, et al. Asymptotical stability of Riemann-Liouville fractional singular systems with multiple time-varying delays[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2017, **65**: 32-39.
- [19] WEN Y H, ZHOU X F, ZHANG Z X, et al. Lyapunov method for nonlinear fractional differential systems with delay[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **82**(1): 1015-1025.
- [20] BOYD S, EL-GHAOU L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994 .
- [21] GU K Q, KHARITONOV V L, CHEN J. *Stability of Time-Delay Systems*[M]. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.
- [22] BHALEKAR S, GEJJI V. A predictor-corrector scheme for solving nonlinear delay differential equations of fractional order[J]. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 2011, **1**(5): 1-9.

# Asymptotic Stability Analysis of Fractional Neural Networks With Discrete Delays and Distributed Delays

LIU Jian, ZHANG Zhixin, JIANG Wei

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University,  
Hefei 230601, P.R.China*)

**Abstract:** The asymptotic stability of fractional-order neural networks with discrete delays and distributed delays in the sense of Caputo derivatives was studied. Through construction of the Lyapunov function and with the fractional Razumikhin theorem, sufficient conditions for asymptotic stability of fractional-order neural networks with discrete and distributed delays were given, and 4 examples were given to illustrate the validity of the proposed theorem conditions.

**Key words:** fractional neural network; delay; asymptotic stability; fractional Razumikhin method; Lyapunov function

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11371027; 11471015; 11601003)