ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887 http://www.applmathmech.cn

应用 Riccati-Bernoulli 辅助方程求解广义非线性 Schrödinger 方程和(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程*

石兰芳， 王明灿， 钱正雅

(南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210044)

摘要： 研究了 Riccati-Bernoulli 辅助方程法,并应用这种方法得到广义非线性 Schrödinger 方程和(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程的精确行波解.这些解包括有理函数、三角函数、双曲函数和指数函数.应用这种方法求解过程简洁有效.该研究对于数学物理方程领域诸多非线性偏微分方程精确解的探究具有重要的意义.

关 键 词： Riccati-Bernoulli 辅助方程法; 广义非线性 Schrödinger 方程; (2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程; 行波解

中图分类号： O175.29 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.400271

引 言

近年来,非线性科学成为自然科学领域的热点.非线性偏微分方程用于模拟和描述数学物理学科中诸多复杂的非线性现象,被广泛应用于大气科学、非线性光学、流体力学、水系统科学以及物理场论等诸多领域.因此,求解非线性偏微分方程具有广泛的研究和应用价值.目前,已有多位学者提出多种方法求解非线性偏微分方程,如 F 展开法[1-2]、(G'/G) 展开法[3-4]、Hirota 双线性变换法[5-6]、Backlund 变换法[7-8]、Darboux 变换法[9-10]、Jacobi 椭圆函数展开法[11-12]、奇摄动法[13]、同伦映射法[14]、广义变分迭代法[15].然而迄今为止,还没有发现一种统一的非线性偏微分方程求解方法.所以,发现并应用更多的方法来探究非线性偏微分方程的精确解以更好地解释非线性物理现象是当前广大数学、力学、物理工作者的重要课题.

广义非线性 Schrödinger 方程[16-17]为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha_0|u|^2u+\mathrm{i}(\gamma_1u_{xxx}+\gamma_2|u|^2u_x+\gamma_3|u|_x^2u)=0, \tag{1}$$

* 收稿日期： 2019-09-16; 修订日期： 2019-11-19

基金项目： 国家自然科学基金(11202106;61201444);江苏省大学生创新创业训练计划(201810300204)

作者简介： 石兰芳(1976—),女,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail：shilf108@163.com);王明灿(1999—),男(E-mail：mingcan_wl@163.com).

引用格式： 石兰芳, 王明灿 , 钱正雅. 应用 Riccati-Bernoulli 辅助方程求解广义非线性 Schrödinger 方程和(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(7)：786-795.

其中 $\alpha_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为常实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$u=u(x,t)$．方程(1)是数学物理方程中一类重要的非线性演化方程，是现代光孤子通信领域的重要理论基础．随着研究的不断深入，该方程在电磁学、非线性光学、光孤子通信等领域应用广泛，具有重要的研究价值．文献[16]通过改进和推广的映射方法获得了该方程 Jacobi 椭圆函数周期波解；文献[17]应用全新的 $G'/(G+G')$ 展开法求得了该方程双曲余切函数解、余切函数解和有理函数解．当 $\gamma_1=0,\gamma_2=0,\gamma_3=0$ 时，方程(1)退化为标准的 Schrödinger 方程[18]；当 $\gamma_1\neq 0,\gamma_2\neq 0,\gamma_3=0$ 时，方程(1)退化为 Lakshmanan-Porsezian-Daniel 方程[19]．

(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程[18-20]为

$$\mathrm{i}u_z+\frac{1}{2}u_{xx}+\frac{1}{2}(\beta-\mathrm{i})u_{\tau\tau}+\mathrm{i}u+(1-\mathrm{i}r_1)u|u|^2+\mathrm{i}r_2u|u|^4=0, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，β 是色散项系数，r_1 为三次增益系数，r_2 为五次耗散系数，β,r_1,r_2 均为实常数，复函数 $u=u(x,z,\tau)$ 用以描述缓慢变化的电场包络，x 和 z 代表传播坐标，$\tau=t-z/V_0$ 是所谓的减少时间，t 是物理时间，V_0 是载波的组速度．方程(2)用于描述光脉冲在非线性光纤中的传输，在光孤子通信等领域具有重大研究价值．(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程不仅是非线性光学和光孤子通信研究的一个主要课题，同时它还在 Benard 对流问题、Taylor-Conette 流动、量子场论等领域中有着广泛应用，但是它的求解比较繁琐．关于它的求解，学者们做了很多研究：文献[20]应用同解变形法得到包括孤子解和周期解的精确行波解；文献[21]应用 e 展开法得到了一系列广义孤立解和广义扭结型孤立解；文献[22]应用 $(G'/G,1/G)$ 展开法得到了有理函数解、双曲函数解和三角函数解．

本文在前人的研究基础上，研究了一种 Riccati-Bernoulli 辅助方程法，并应用这种方法得到广义非线性 Schrödinger 方程和(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程三角函数解、暗孤子解、有理函数解和指数函数解，既获得了原有解的结果，又得出一些新形式的解．广义非线性 Schrödinger 方程的解为研究光纤中亚皮秒或飞秒光脉冲的传播机制提供理论依据，同时所得结果也可应用于其他物理领域如 Bose-Einstein 凝聚和等离子物理，为进一步研究相关实验提供理论基础；(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程的解在研究与设计光纤扩大器(optical fiber amplifiers)和光脉冲压缩器(optical pulse compressors)中有特别重要的意义．

1　Riccati-Bernoulli 辅助方程法

考虑具有如下形式的偏微分方程：

$$P(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xt},\cdots)=0, \tag{3}$$

其中下标代表偏导数，P 是 u 及其偏导数的多项式．下面介绍 Riccati-Bernoulli 辅助方程法的详细步骤．

步骤 1　对方程(3)做行波变换：

$$u(x,t)=u(\xi),\qquad \xi=x+Vt. \tag{4}$$

将方程(3)转化为常微分方程

$$H(u,Vu',u'',Vu'',\cdots)=0, \tag{5}$$

其中 V 是待定常数，$u'=\mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi$．

步骤 2　设 u 是 Riccati-Bernoulli 辅助方程

$$u'=au^{2-m}+bu+cu^m \tag{6}$$

的解，其中 a,b,c,m 为待定常数．

由式(6)求导得

$$u'' = ab(3-m)u^{2-m} + a^2(2-m)u^{3-2m} + mc^2u^{2m-1} + bc(m+1)u^m + (2bc+b^2)u. \tag{7}$$

同时,方程(6)具有如下 6 种解:

① 当 $m=1$ 时,方程(6)的解为

$$u(\xi) = C\mathrm{e}^{(a+b+c)\xi}; \tag{8}$$

② 当 $m \neq 1, b=c=0$ 时,方程(6)的解为

$$u(\xi) = (a(m-1)(\xi+C))^{1/(m-1)}; \tag{9}$$

③ 当 $m \neq 1, c=0, b \neq 0$ 时,方程(6)的解为

$$u(\xi) = \left(-\frac{a}{b} + C\mathrm{e}^{b(m-1)\xi}\right)^{1/(m-1)}; \tag{10}$$

④ 当 $m \neq 1, a \neq 0, b^2-4ac<0$ 时,方程(6)的解为

$$u(\xi) = \left(\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\tan((1/2)(1-m)\sqrt{4ac-b^2}(\xi+C))}{2a}\right)^{1/(1-m)}, \tag{11a}$$

$$u(\xi) = \left(\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\cot((1/2)(1-m)\sqrt{4ac-b^2}(\xi+C))}{2a}\right)^{1/(1-m)}; \tag{11b}$$

⑤ 当 $m \neq 1, a \neq 0, b^2-4ac>0$ 时,方程(6)的解为

$$u(\xi) = \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}\tanh((1/2)(1-m)\sqrt{b^2-4ac}(\xi+C))}{2a}\right)^{1/(1-m)}, \tag{12a}$$

$$u(\xi) = \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}\coth((1/2)(1-m)\sqrt{b^2-4ac}(\xi+C))}{2a}\right)^{1/(1-m)}; \tag{12b}$$

⑥ 当 $m \neq 1, a \neq 0, b^2-4ac=0$ 时,方程(6)的解为

$$u(\xi) = \left(\frac{1}{a(m-1)(\xi+C)} - \frac{b}{2a}\right)^{1/(1-m)}. \tag{13}$$

步骤 3　最后将 u 及其各阶偏导数代入方程(5),令 $u^j(j=0,1,2,\cdots)$ 的系数均为 0,得到一组关于 m,a,b,c,V 的代数方程组.求解这组代数方程组,并将 m,a,b,c,V 代入式(8)~(13)中,结合式(4),便可得到偏微分方程(3)的精确行波解.

2　广义非线性 Schrödinger 方程的行波解

标准非线性 Schrödinger 方程是描述光孤子在理想无损耗单模皮秒光纤中传输的模型,满足该方程的光孤子在远距离光纤传播中波形、波速、振幅始终保持不变,不会发生波形畸变和信息失真,传输码率高.但是在某些特定情况下,一方面,标准非线性 Schrödinger 方程在描述光脉冲传输时显得无能为力;另一方面,近年来,为了进一步提高光纤通信系统容量,对超短光脉冲的传输研究越来越引起人们的重视,而光纤中脉冲宽度在亚皮秒和飞秒量级的超短脉冲,标准非线性 Schrödinger 方程模型已经不再适应,需要采用含有高阶非线性效应如三阶色散、自陡峭和自频移修正非线性 Schrödinger 方程.为了研究脉冲光孤子的动力学机制,本文研究了一类带有高阶非线性效应的广义非线性 Schrödinger 方程:

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_0|u|^2u + \mathrm{i}(\gamma_1 u_{xxx} + \gamma_2|u|^2u_x + \gamma_3|u|^2_x u) = 0. \tag{14}$$

对于方程(14),首先需要对其虚部进行处理.

首先引入一个变换:

$$u=\varphi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\qquad \xi=x-Vt. \tag{15}$$

将式(15)代入式(14)得

$$\mathrm{i}(\gamma_1\varphi'''-3\gamma_1k^2\varphi'+\gamma_2\varphi^2\varphi'+2\gamma_3\varphi^2\varphi'-V\varphi'+2k\varphi')+\\(\omega\varphi+\varphi''-k^2\varphi+\alpha_0\varphi^3-3\gamma_1k\varphi''+\gamma_1k^3\varphi-\gamma_2k\varphi^3)=0. \tag{16}$$

令方程(16)等号左侧实部和虚部分别为0,则有

$$\gamma_1\varphi'''-3\gamma_1k^2\varphi'+\gamma_2\varphi^2\varphi'+2\gamma_3\varphi^2\varphi'-V\varphi'+2k\varphi'=0, \tag{17}$$

$$\omega\varphi+\varphi''-k^2\varphi+\alpha_0\varphi^3-3\gamma_1k\varphi''+\gamma_1k^3\varphi-\gamma_2k\varphi^3=0. \tag{18}$$

对方程(17)进行一次积分得

$$\gamma_1\varphi''+(-V-3\gamma_1k^2+2k)\varphi+\left(\frac{1}{3}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3\right)\varphi^3=t_0, \tag{19}$$

t_0 为积分常量.对比式(18)和(19)得

$$\begin{cases}t_0=0,\\ \dfrac{\gamma_1}{1-3\gamma_1k}=\dfrac{2k-V-3\gamma_1k^2}{\omega-k^2+\gamma_1k^3}=\dfrac{\frac{1}{3}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3}{\alpha_0-\gamma_2k}.\end{cases} \tag{20}$$

由式(20)得

$$k=\frac{\gamma_2+2\gamma_3-3\gamma_1\alpha_0}{6\gamma_1\gamma_3},\ \omega=\frac{(1-3\gamma_1k)(2k-V-3\gamma_1k^2)}{\gamma_1}+k^2-k^3\gamma_1. \tag{21}$$

在式(20)和(21)的条件下,为了解方程(19),不妨设

$$\alpha=\gamma_1,\ \eta=V+3\gamma_1k^2-2k,\ \beta=\frac{1}{3}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3, \tag{22}$$

则方程(19)可化为

$$\alpha\varphi''-\eta\varphi+\beta\varphi^3=0, \tag{23}$$

其中 α,β 为已知常数, η 为待定常数(V 未知).

依据 Riccati-Bernoulli 辅助方程法及式(7)得

$$\varphi''=ab(3-m)\varphi^{2-m}+a^2(2-m)\varphi^{3-2m}+mc^2\varphi^{2m-1}+\\bc(m+1)\varphi^m+(2bc+b^2)\varphi. \tag{24}$$

把式(24)代入式(23)得

$$\alpha[ab(3-m)\varphi^{2-m}+a^2(2-m)\varphi^{3-2m}+mc^2\varphi^{2m-1}+\\bc(m+1)\varphi^m+(2bc+b^2)\varphi]-\eta\varphi+\beta\varphi^3=0. \tag{25}$$

观察方程(25), 为了能够使其满足齐次平衡原理,令 $m=0$, 并令 $\varphi^j(j=0,1,2,3)$ 的系数均为0,得到如下代数方程组:

$$bc=0,\ 3ab=0,\ 2a^2\alpha+\beta=0,\ \alpha(2bc+b^2)-\eta=0. \tag{26}$$

解代数方程组(26)得

$$\eta=0,\ a=\pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}},\ b=0,\ c=\mathrm{const}. \tag{27}$$

又由式(22)得

$$\alpha=\gamma_1,\ V=-3\gamma_1k^2+2k,\ \beta=\frac{1}{3}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3. \tag{28}$$

结合 Riccati-Bernoulli 辅助方程的通解(8)~(13),我们得到:

① 当 $a\neq0,b^2-4ac>0$,即 $ac<0$ 时

$$\varphi(\xi)=\mp\sqrt{\mp c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\tanh\left(\sqrt{\mp\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_1)}\right)},\tag{29a}$$

$$\varphi(\xi)=\mp\sqrt{\mp c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\coth\left(\sqrt{\mp\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_1)}\right)},\tag{29b}$$

其中 α,β 由式(28)给出, c,C_1 为任意常量.考虑到方程(15),我们得到

$$u(\xi)=\mp\sqrt{\mp c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\tanh\left(\sqrt{\mp\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_1)}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{30a}$$

$$u(\xi)=\mp\sqrt{\mp c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\coth\left(\sqrt{\mp\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_1)}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{30b}$$

$$\xi=x-(-3\gamma_1k^2+2k)t,\tag{31}$$

其中 α,β 由式(28)给出, k,ω 由式(21)给出, c,C_1 为任意常量.

② 当 $a\neq0,b^2-4ac<0$, 即 $ac>0$ 时

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\pm c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\tan\left(\sqrt{\pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_2)}\right)},\tag{32a}$$

$$\varphi(\xi)=\pm\sqrt{\pm c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\cot\left(\sqrt{\pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_2)}\right)},\tag{32b}$$

其中 α,β 由式(28)给出, c,C_2 为任意常量.考虑到方程(15),我们得到

$$u(\xi)=\pm\sqrt{\pm c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\tan\left(\sqrt{\pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_2)}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{33a}$$

$$u(\xi)=\pm\sqrt{\pm c\sqrt{\frac{2\alpha}{-\beta}}\cot\left(\sqrt{\pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}c(\xi+C_2)}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{33b}$$

$$\xi=x-(-3\gamma_1k^2+2k)t,\tag{34}$$

其中 α,β 由式(28)给出, k,ω 由式(21)给出, c,C_2 为任意常量.

③ 当 $a\neq0,b^2-4ac=0$, 即 $c=0$ 时

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\mp\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}\xi+C_3},\tag{35}$$

其中 α,β 由式(28)给出, c,C_3 为任意常量.考虑到方程(15),我们得到

$$u(\xi)=\frac{1}{\mp\sqrt{\frac{-\beta}{2\alpha}}\xi+C_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{36}$$

$$\xi=x-(-3\gamma_1k^2+2k)t,\tag{37}$$

其中 α,β 由式(28)给出, k,ω 由式(21)给出, C_3 为任意常量.

④ 当 $a=b=0$ 时

$$\varphi(\xi)=c\xi+C_4,\tag{38}$$

其中 c,C_4 为任意常量.考虑到方程(15),我们得到

$$u(\xi)=(c\xi+C_4)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},\tag{39}$$

$$\xi = x - (-3\gamma_1 k^2 + 2k)t, \tag{40}$$

其中 c, C_4 为任意常量.

3　(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程的行波解

下面考虑著名的(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程：

$$\mathrm{i}u_z + \frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}(\beta - \mathrm{i})u_{\tau\tau} + \mathrm{i}u + (1 - \mathrm{i}r_1)u|u|^2 + \mathrm{i}r_2 u|u|^4 = 0. \tag{41}$$

设

$$u(x,z,\tau) = \phi(x,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz+\psi(x,\tau))}, \tag{42}$$

其中 $\phi(x,\tau)$ 和 $\psi(x,\tau)$ 是关于 x 和 τ 的实函数，k 为实参数.

把式(42)代入式(41)中，并令实部和虚部分别等于 0，得

$$\mathrm{Im}: \psi_x\phi_x + \frac{1}{2}\psi_{xx}\phi - \frac{1}{2}\phi_{\tau\tau} + \frac{1}{2}\psi_\tau^2\phi + \frac{1}{2}\beta\psi_{\tau\tau}\phi + \beta\psi_\tau\phi_\tau + \phi - r_1\phi^3 + r_2\phi^5 = 0, \tag{43}$$

$$\mathrm{Re}: -k\phi + \frac{1}{2}\phi_{xx} - \frac{1}{2}\psi_x^2\phi + \frac{1}{2}\beta\phi_{\tau\tau} - \frac{1}{2}\beta\psi_\tau^2\phi + \psi_x\phi_x + \frac{1}{2}\psi_{\tau\tau}\phi + \phi^3 = 0. \tag{44}$$

令

$$\phi(x,\tau) = \phi(\xi),\ \psi(x,\tau) = \psi(\eta),\ \xi = l_0 x - l_1\tau,\ \eta = h_0 x - h_1\tau, \tag{45}$$

其中 l_0, l_1, h_0, h_1 是待定的实常数.把式(45)分别代入式(43)和(44)得

$$(l_0h_0 + \beta l_1h_1)\psi'\phi' + \left(\frac{1}{2}(h_0^2 + \beta h_1^2)\psi'' + 1 + \frac{1}{2}h_1^2\psi'^2\right)\phi - \frac{1}{2}l_1^2\phi'' - r_1\phi^3 + r_2\phi^5 = 0, \tag{46}$$

$$\left(-\frac{1}{2}(h_0^2 + \beta h_1^2)\psi'^2 + \frac{1}{2}h_1^2\psi'' - k\right)\phi + \frac{1}{2}(l_0^2 + \beta l_1^2)\phi'' + l_1h_1\psi'\phi' + \phi^3 = 0. \tag{47}$$

不妨令

$$h_1 = \frac{h_0}{\sqrt{-\beta}},\ l_1 = \frac{l_0}{\sqrt{-\beta}},$$

得到

$$\frac{1}{2}(h_0^2 + \beta h_1^2) = 0,\ \frac{1}{2}(l_0^2 + \beta l_1^2) = 0,\ l_0h_0 + \beta l_1h_1 = 0, \tag{48}$$

则式(46)和(47)可以写成如下形式：

$$\left(1 + \frac{1}{2}h_1^2\psi'^2\right)\phi - \frac{1}{2}l_1^2\phi'' - r_1\phi^3 + r_2\phi^5 = 0, \tag{49}$$

$$\left(\frac{1}{2}h_1^2\psi'' - k\right)\phi + l_1h_1\psi'\phi' + \phi^3 = 0. \tag{50}$$

再令

$$\psi(\eta) = \eta = h_0x - h_1\tau, \tag{51}$$

则 $\psi' = 1, \psi'' = 0$.由式(50)得

$$\phi' = \frac{k\phi - \phi^3}{l_1h_1}, \tag{52}$$

则

$$\phi'' = \frac{(k - 3\phi^2)\phi'}{l_1 h_1}. \tag{53}$$

通过式(52)和(53),得到

$$\left(\frac{k}{h_1}\right)^2 \phi - \frac{4k}{h_1^2}\phi^3 + \frac{3}{h_1^2}\phi^5 - l_1^2\phi'' = 0. \tag{54}$$

同时式(49)可以写成

$$(h_1^2 + 2)\phi - 2r_1\phi^3 + 2r_2\phi^5 - l_1^2\phi'' = 0. \tag{55}$$

不难发现方程(54)和(55)具有相同的形式,比较其系数得

$$\left(\frac{k}{h_1}\right)^2 = h_1^2 + 2,\ \frac{4k}{h_1^2} = 2r_1,\ 2r_2 = \frac{3}{h_1^2}. \tag{56}$$

所以

$$k = \frac{3r_1}{4r_2},\ \frac{9r_1^2}{16r_2^2} = h_1^2(h_1^2 + 2), \tag{57}$$

其中 r_1, r_2 满足如下关系:

$$3r_1^2 = 16r_2 + 12, \tag{58}$$

r_1, r_2 不能同时为 0.所以方程(54)和(55)可以写成

$$3r_1^2\phi - 16r_1r_2\phi^3 + 16r_2^2\phi^5 - 8r_2l_1^2\phi'' = 0. \tag{59}$$

至此,我们将带有虚部单位的非线性 Schrödinger 方程转化为形如式(5)的常微分方程.由 Riccati-Bernoulli 辅助方程法和方程(7)得到

$$\begin{aligned}\phi'' = {} & ab(3 - m)\phi^{2-m} + a^2(2 - m)\phi^{3-2m} + \\ & mc^2\phi^{2m-1} + bc(m + 1)\phi^m + (2bc + b^2)\phi.\end{aligned} \tag{60}$$

把方程(60)代入方程(59)得

$$\begin{aligned}& -8r_2l_1^2[ab(3 - m)\phi^{2-m} + a^2(2 - m)\phi^{3-2m} + mc^2\phi^{2m-1} + \\ & bc(m + 1)\phi^m + (2bc + b^2)\phi] + 3r_1^2\phi - 16r_1r_2\phi^3 + 16r_2^2\phi^5 = 0.\end{aligned} \tag{61}$$

由齐次平衡法则确定 $m = -1$.令方程(61)中 $\phi^j (j = 0, 1, 2, \cdots)$ 的系数均为 0,得到代数方程组如下:

$$\begin{cases} c = 0, \\ 3r_1^2 - 8r_2l_1^2(2bc + b^2) = 0, \\ -2r_1 - l_1^2 4ab = 0, \\ 2r_2 - l_1^2 3a^2 = 0, \end{cases} \tag{62}$$

解得

$$a = \pm\sqrt{\frac{2r_2}{3l_1^2}},\ b = \mp\sqrt{\frac{3r_1^2}{8r_2l_1^2}},\ c = 0. \tag{63}$$

把式(63)中 a, b, c 的值代入辅助方程的通解(8)~(13)中,同时考虑方程(42)和(45),可以得到原方程(41)的精确行波解.

① 当 $a \neq 0, b^2 - 4ac > 0$ 时

$$u(\xi) = \left(\pm\frac{3r_1}{8r_2}\left[1 \mp \tanh\left(\sqrt{\frac{3r_1^2}{8r_2l_1^2}}(\xi + C_1)\right)\right]\right)^{1/2} \times$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{3r_1}{4r_2}z \pm \left(\sqrt{\frac{-3\beta}{2r_2}}x - \sqrt{\frac{3}{2r_2}}\tau\right)\right)\right], \tag{64a}$$

$$u(\xi) = \left(\pm\frac{3r_1}{8r_2}\left[1 \mp \coth\left(\sqrt{\frac{3r_1^2}{8r_2l_1^2}}(\xi + C_1)\right)\right]\right)^{1/2} \times$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{3r_1}{4r_2}z \pm \left(\sqrt{\frac{-3\beta}{2r_2}}x - \sqrt{\frac{3}{2r_2}}\tau\right)\right)\right], \tag{64b}$$

$$\xi = \sqrt{-\beta}l_1x - l_1\tau, \tag{65}$$

其中 l_1,C_1 为任意常数.

② 当 $a \neq 0, b^2 - 4ac < 0$ 时

$$u(\xi) = \left(\pm\frac{3r_1}{4r_2}\left[1 \pm \sqrt{-1}\tan\left(\sqrt{-\frac{3r_1^2}{8r_2l_1^2}}(\xi + C_2)\right)\right]\right)^{1/2} \times$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{3r_1}{4r_2}z \pm \left(\sqrt{\frac{-3\beta}{2r_2}}x - \sqrt{\frac{3}{2r_2}}\tau\right)\right)\right], \tag{66a}$$

$$u(\xi) = \left(\pm\frac{3r_1}{4r_2}\left[1 \pm \sqrt{-1}\cot\left(\sqrt{-\frac{3r_1^2}{8r_2l_1^2}}(\xi + C_2)\right)\right]\right)^{1/2} \times$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{3r_1}{4r_2}z \pm \left(\sqrt{\frac{-3\beta}{2r_2}}x - \sqrt{\frac{3}{2r_2}}\tau\right)\right)\right], \tag{66b}$$

$$\xi = \sqrt{-\beta}l_1x - l_1\tau, \tag{67}$$

其中 l_1,C_2 为任意常数.

③ 当 $a \neq 0, b^2 - 4ac = 0$ 时

$$u(\xi) = \left(\pm 2\sqrt{\frac{2r_2}{3l_1^2}}(\xi + C_3)\right)^{-1/2}\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{3r_1}{4r_2}z \pm \left(\sqrt{\frac{-3\beta}{2r_2}}x - \sqrt{\frac{3}{2r_2}}\tau\right)\right)\right], \tag{68}$$

$$\xi = \sqrt{-\beta}l_1x - l_1\tau, \tag{69}$$

其中 l_1,C_3 为任意常数.

④ 当 $a = 0, b \neq 0$ 时

$$u(\xi) = C_4\exp\left[\pm\sqrt{\frac{3r_1^2}{8r_2l_1^2}} + \mathrm{i}\left(\frac{3r_1}{4r_2}z \pm \left(\sqrt{\frac{-3\beta}{2r_2}}x - \sqrt{\frac{3}{2r_2}}\tau\right)\right)\right], \tag{70}$$

$$\xi = \sqrt{-\beta}l_1x - l_1\tau, \tag{71}$$

其中 l_1,C_4 为任意常数.

4 总 结

本文基于 Riccati-Bernoulli 辅助方程法,探究了广义非线性 Schrödinger 方程和(2+1)维非线性 Ginzburg-Landau 方程的精确解.这种方法不仅重新发现了上述两类方程的已知解,还发现了一些全新的解,从而拓展了它们解的范围.上述结论验证了 Riccati-Bernoulli 辅助方程法的可行性.该辅助方程法简洁高效,可以通过 m 的不同取值平衡目标微分方程的最高次项,再通过解代数方程组和一系列合理的代换得到非线性偏微分方程的精确行波解.将这种方法应用于探究更多非线性偏微分方程的精确解具有重大意义.同时,在 MATHEMATICA 等数学软件的帮助下,Riccati-Bernoulli 辅助方程法可以更加便捷高效地求解多种非线性偏微分方程.

参考文献(References):

[1] ABDOU M A. The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, **31**(1): 95-104.

[2] ABDOU M A. An improved generalized F-expansion method and its applications[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **214**(1): 202-208.

[3] WANG M L, ZHANG J L, LI X Z. Application of the (G'/G)-expansion to travelling wave solutions of the Broer-Kaup and the approximate long water wave equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **206**(1): 321-326.

[4] WANG M L, LI X Z, ZHANG J L. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(4): 417-423.

[5] LI L, DUAN C N, YU F J. An improved Hirota bilinear method and new application for a nonlocal integrable complex modified Korteweg-de Vries (MKdV) equation[J]. *Physics Letters A*, 2019, **383**(14): 1578-1582.

[6] GUO D, TIAN S F, ZHANG T T. Integrability, soliton solutions and modulation instability analysis of a (2+1)-dimensional nonlinear Heisenberg ferromagnetic spin chain equation[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2019, **77**(3): 770-778.

[7] CHENG J P, HE J S. Miura and auto-Baecklund transformations for the discrete KP and mKP hierarchies and their constrained cases[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **69**: 187-197.

[8] LIU X Z, YU J, LOU Z M. New Bäcklund transformations of the (2+1)-dimensional Bogoyavlenskii equation via localization of residual symmetries[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2018, **76**(7): 1669-1679.

[9] MA L Y, ZHAO H Q, SHEN S F, et al. Abundant exact solutions to the discrete complex mKdV equation by Darboux transformation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **68**: 31-40.

[10] WANG X, WANG L. Darboux transformation and nonautonomous solitons for a modified Kadomtsev-Petviashvili equation with variable coefficients[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2018, **75**: 4201-4213.

[11] PARKES E J, DUFFY B R, ABBOTT P C. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations[J]. *Physics Letters A*, 2002, **295**(5/6): 280-286.

[12] ZAYED E M E, ALURRFI K A E. A new Jacobi elliptic function expansion method for solving a nonlinear PDE describing the nonlinear low-pass electrical lines[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2015, **78**: 148-155.

[13] 石兰芳, 莫嘉琪. 一类强非线性非自治方程的奇摄动 Robin 边值问题[J]. 应用数学, 2017, **30**(2): 247-251. (SHI Lanfang, MO Jiaqi. A class of singular perturbation solutions to strong nonlinear equation Robin problems[J]. *Mathematica Applicata*, 2017, **30**(2): 247-251. (in Chinese))

[14] 石兰芳, 周先春. 一类扰动 Burgers 方程的孤子同伦映射解[J]. 物理学报, 2010, **59**(5): 2915-2918. (SHI Lanfang, ZHOU Xianchun. Homotopic mapping solution of soliton for a class of disturbed Burgers equation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(5): 2915-2918. (in Chinese))

[15] 欧阳成, 石兰芳, 汪维刚, 等. 非线性强迫扰动 Klein-Gordon 方程的孤波渐进解法[J]. 数学年刊, 2017, **38**(A): 43-52. (OUYANG Cheng, SHI Lanfang, WANG Weigang, et al. The asymp-

totic solving method of solitary wave for the nonlinear forced disturbed Klein-Gordon equation [J]. *Chinese Annals of Mathematics*, 2017, **38**(A): 43-52.(in Chinese))

[16] PENG Y Z, SHEN M, WANG Z J. Exact solutions to the higher order nonlinear Schrödinger equation[J]. *Mathematica Applicata*, 2007, **20**(3): 505-511.

[17] 石兰芳, 聂子文. 应用全新 $G'/(G+G')$ 展开方法求解广义非线性 Schrödinger 方程和耦合非线性 Schrödinger 方程组[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 539-552.(SHI Lanfang, NIE Ziwen. Solutions to the nonlinear Schrödinger equation and coupled nonlinear Schrödinger equations with a new $G'/(G+G')$ -expansion method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 539-552.(in Chinese))

[18] ANKIEWICZ A, SOTO-CRESPO J M, AKHMEDIEV N. Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation[J]. *Physical Review E*, 2010, **81**: 046602.

[19] PORSEZIAN K, LAKSHMANAN M. On the dynamics of the radially symmetric Heisenberg ferromagnetic spin system[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1991, **32**(10): 2923-2928.

[20] 施业琼. (2+1)维 Ginzburg-Landau 方程的精确波解[J]. 数学的实践与认识, 2009, **39**(16): 247-251.(SHI Yeqiong. The exact wave solutions for 2+1 dimensional cubic-quintic Ginzburg-Landau equation[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2009, **39**(16): 247-251.(in Chinese))

[21] SHI Y, DAI Z, LI D. Application of exp-function method for 2D cubic-quintic Ginzburg-Landau equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **210**(1): 269-275.

[22] ZAYED E M E, ALURRFI K A E. The $(G'/G, 1/G)$-expansion method and its applications to two nonlinear Schrödinger equations describing the propagation of femtosecond pulses in nonlinear optical fibers[J]. *Optic*, 2016, **127**(4): 1581-1589.

Solution of Generalized Nonlinear Schrödinger Equations and (2+1)-Dimensional Nonlinear Ginzburg-Landau Equations With a Riccati-Bernoulli Auxiliary Equation Method

SHI Lanfang,　WANG Mingcan,　QIAN Zhengya

(*School of Mathematics and Statistics*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing* 210044, *P.R.China*)

Abstract: The Riccati-Bernoulli auxiliary equation method was proposed to seek the exact travelling solutions to the generalized nonlinear Schrödinger equation and the (2+1)-dimensional nonlinear Ginzburg-Landau equation. The solutions can be expressed with the rational functions, the trigonometric functions, the hyperbolic functions and the exponential functions. Being effective and concise, the method is important to obtain the exact travelling solutions for more nonlinear partial differential equations in the field of mathematics and physics.

Key words: Riccati-Bernoulli auxiliary equation method; generalized nonlinear Schrödinger equation; (2+1)-dimensional nonlinear Ginzburg-Landau equation; travelling wave solution

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202106;61201444)