

# 考虑城市住房分布的二维连续型动态交通分配模型及其污染物排放估计\*

李晓洋<sup>1</sup>, 林志阳<sup>2</sup>, 吕瑜佩<sup>1,3</sup>, 张鹏<sup>1,4</sup>

- (1. 上海大学 力学与工程科学学院 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 复旦大学 航空航天系, 上海 200433;
3. 湖州师范学院 理学院, 浙江 湖州 313000;
4. 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

(我刊编委戴世强推荐)

**摘要:** 将城市交通路网抽象为二维连续的平面, 提出一个考虑城市住房分布的二维连续型动态交通分配模型, 并估计了城市交通污染物排放水平. 该模型中, 住房分布影响交通需求, 出行者根据用户最优准则选择出发时间和路径, 可以用于模拟城市交通运行的动态演化过程, 得到密度、速度和流量等物理量. 采用基于车辆速度和加速度的微观污染物排放模型 VT-micro 估计城市交通 CO<sub>2</sub> 动态排放水平. 基于三角网格, 采用有限体积法、投影算法和相继平均法进行数值求解, 给出一个数值算例验证了模型和算法的有效性.

**关键词:** 连续型动态交通分配; 住房分布; 出发时间选择; 路径选择; 污染物排放

**中图分类号:** O35

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.400213

## 引 言

近年来, 我国大气污染问题越来越严重, 而交通污染已成为其重要来源<sup>[1]</sup>. 2016年, 全国机动车排放污染物 4 472.5 万吨, 其中, 一氧化碳(CO) 3 419.3 万吨, 碳氢化合物(HC) 422 万吨, 氮氧化合物(NO<sub>x</sub>) 577.8 万吨, 颗粒物(PM) 43.4 万吨. 根据我国第一批城市大气细颗粒物(PM<sub>2.5</sub>)来源解析结果, 部分城市如北京、上海、杭州、广州和深圳等, 机动车排放已成为 PM<sub>2.5</sub> 的首要来源<sup>[2]</sup>. 一方面, 国家制定了诸多政策减轻交通污染, 如公交优先、低能耗新能源汽车、限号出行等. 另一方面, 基于交通运行状态, 可以对交通污染物排放进行估计, 进而通过合理的交通规划和诱导, 改善交通运行状态, 有效降低交通污染.

\* 收稿日期: 2019-07-15; 修订日期: 2019-09-05

**基金项目:** 国家自然科学基金(面上项目)(11672348; 11972121; 11272199); 中国博士后科学基金(2019M661362); 国家重点研发计划(2018YFB1600900); 云南省交通运输厅科技创新项目(2019303); 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2012CB725404)

**作者简介:** 李晓洋(1989—), 男, 博士生(E-mail: lxs\_lxy@i.shu.edu.cn);

张鹏(1963—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: pzhang@shu.edu.cn).

**引用格式:** 李晓洋, 林志阳, 吕瑜佩, 张鹏. 考虑城市住房分布的二维连续型动态交通分配模型及其污染物排放估计[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(1): 27-41.

城市交通污染物排放估计包括两部分:动态交通分配模型和污染物排放模型.动态交通分配模型用于模拟城市交通演化和运行状态,污染物排放模型基于交通状态估计排放水平.根据交通路网不同的抽象形式,动态交通分配建模方法可分为离散型和连续型的建模方法<sup>[3]</sup>.离散型建模方法认为路网由离散的路段和交叉口构成,是用于研究交通系统的传统方法<sup>[4]</sup>.连续型建模方法则假设路网足够稠密,可被视为二维连续空间,出行者可选任意方向行驶,研究交通路网的宏观特征<sup>[5]</sup>.

根据出行行为准则,动态交通分配模型可以分为动态系统最优(dynamic system-optimal, DSO)模型和动态用户最优(dynamic user-optimal, DUO)模型.DSO模型从交通系统的角度出发,出行者动态选择路径使得整个系统的总费用最小.DUO模型从用户个体的角度出发,出行者选择使得自身到达目的地总费用最小的路径.DUO模型可以分为:基于当前交通状态瞬时旅行总费用的反应型动态用户最优(reactive dynamic user-optimal, RDUO)模型和基于预测实际旅行总费用的预测型动态用户最优(predictive dynamic user-optimal, PDUO)模型.动态交通分配模型大多采用离散建模方法,一般可以描述为非线性互补问题、数学规划问题、不动点问题和变分不等式问题等<sup>[3,6]</sup>.采用连续型建模方法研究动态交通分配问题的工作相对较少.Tao等<sup>[7]</sup>提出了DSO路径选择模型;Jiang等<sup>[8]</sup>提出了多中心城市的RDUO路径选择模型;Du等<sup>[9]</sup>提出了单一中心城市的PDUO路径选择模型;Lin等将PDUO路径选择模型推广到多中心城市<sup>[10]</sup>,并在PDUO模型的基础上考虑出行者出发时间,提出了同时考虑出发时间和路径选择的PDUO模型<sup>[11]</sup>.而考虑住房分布的二维连续型动态交通分配问题还未被研究.

交通污染物排放模型可分为宏观模型和微观模型两类<sup>[12]</sup>.宏观模型通常依据交通流平均速度来评估排放总量和平均排放因子,如被广泛应用的MOBILE模型<sup>[13]</sup>、EMFAC模型<sup>[14]</sup>和MOVES模型<sup>[15]</sup>等.此类模型适用于大规模城市区域,宏观上定量估计交通污染物排放水平.微观模型基于车辆个体,研究不同行驶模式下的车辆排放水平,如CMEM模型<sup>[16]</sup>、VT-micro模型<sup>[17]</sup>和VERSIT+模型<sup>[18]</sup>等.微观模型考虑了车辆个体的行驶状态,适用于微观上详细估计交通污染物排放水平.采用连续型动态交通分配模型研究交通污染物排放问题的研究工作相对较少.Jiang等<sup>[19]</sup>将连续型RDUO模型与Panis等<sup>[20]</sup>提出的微观污染物排放模型相结合,用于城市交通污染物排放水平估计.Yang等<sup>[21]</sup>将连续型RDUO模型与VT-micro模型相结合,估计交通污染物排放率,并建立对流扩散方程描述污染物扩散和分布.

本文首先提出一个同时考虑出发时间和路径选择的二维连续型动态交通分配模型,然后将住房分布考虑到该模型中,采用VT-micro模型估计CO<sub>2</sub>排放水平.

## 1 模型方程

如图1所示,考虑具有单个中心商业区(CBD)的城市.城市区域 $\Omega$ 的边界为 $\Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_i \cup \Gamma_{\text{CBD}}$ ,其中 $\Gamma_o$ 为外边界, $\Gamma_i$ 为内边界(表示湖泊、公园等障碍物), $\Gamma_{\text{CBD}}$ 表示CBD的边界.假设城市 $\Omega$ 内的路网足够稠密可视为二维连续体,出行用户分布在城市区域内.在研究时段 $[0, t_{\text{end}}]$ 内,用户基于DUO准则选择到达目的地(CBD)费用最小的出行时间和路径.模型中用到的主要变量如下:

1)  $\rho(x, y, t)$  (veh/km<sup>2</sup>) 表示交通流在 $(x, y)$ 处 $t$ 时刻的密度.

2)  $\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$  表示交通流在 $(x, y)$ 处 $t$ 时刻的速度向量. $|\mathbf{v}|$  (km/h)为速度的大小,是由 $(x, y)$ 处 $t$ 时刻的密度决定的,即 $|\mathbf{v}| = U_f(x, y) e^{-\beta \rho^2(x, y, t)}$ , $U_f(x, y)$  (km/h)为交通流在 $(x, y)$ 处的自由流速度, $\beta$ 是反映道路状况的参数.

3)  $\mathbf{F} = (f_1(x, y, t), f_2(x, y, t))$  为交通流在  $(x, y)$  处  $t$  时刻的流量, 大小为  $|\mathbf{F}| = \rho |\mathbf{v}|$ .

4)  $c(x, y, t)$  ( $\$/\text{km}$ ) 表示交通流的费用分布函数, 定义为

$$c(x, y, t) = \kappa \left( \frac{1}{|\mathbf{v}|} + \pi \rho(x, y, t) \right), \quad (1)$$

其中,  $\kappa$  ( $\$/\text{h}$ ) 表示时间费用,  $\kappa/|\mathbf{v}|$  表示与出行时间相关的费用,  $\kappa\pi(\rho(x, y, t))$  表示其他费用, 如出行者倾向避免高密度区域等.

5)  $\phi(x, y, t)$  ( $\$$ ) 表示交通流在  $(x, y)$  处  $t$  时刻前往 CBD 所需要的旅行费用.

6)  $T(x, y, t)$  (h) 表示交通流在  $(x, y)$  处  $t$  时刻前往 CBD 所需要的总时间.

7)  $p(x, y, t)$  ( $\$$ ) 为交通流在  $(x, y)$  处  $t$  时刻前往 CBD 的惩罚函数, 表示对迟到或者早到目的地所产生的惩罚费用, 依赖于到达时间  $t + T(x, y, t)$ .

8)  $C(x, y, t)$  ( $\$$ ) 为交通流在  $(x, y)$  处  $t$  时刻前往 CBD 的总费用:

$$C(x, y, t) = \phi(x, y, t) + p(x, y, t). \quad (2)$$

9)  $q(x, y, t)$  ( $\text{veh}/(\text{km}^2 \cdot \text{h})$ ) 为交通流在  $(x, y)$  处  $t$  时刻的交通需求,  $q(x, y)$  ( $\text{veh}/\text{km}^2$ ) 为交通流在  $(x, y)$  处的交通需求,  $Q$  ( $\text{veh}$ ) 为交通总需求, 满足

$$q(x, y, t) \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, t \in [0, t_{\text{end}}],$$

$$\int_0^{t_{\text{end}}} q(x, y, t) dt = q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

$$\int_{\Omega} q(x, y) dx dy = Q.$$

本文中“veh”为交通量的单位, 表示车辆数; “\$”为费用的单位, 表示元.

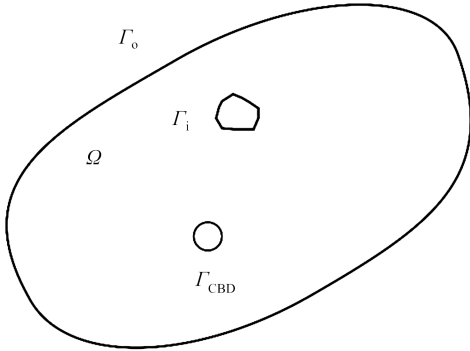


图 1 任意形状的单中心城市

Fig. 1 A city with arbitrary configuration

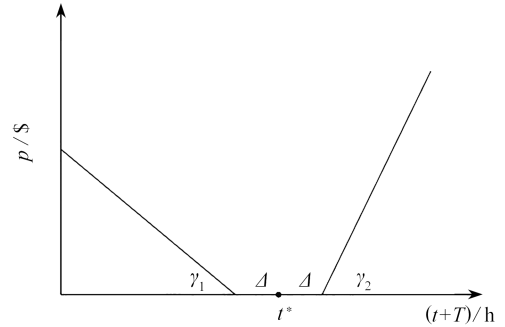


图 2 惩罚函数

Fig. 2 The penalty function

### 1.1 RDUO 路径选择模型

若已知交通需求  $q(x, y, t)$ , 即已知出行者出发时间分布, 采用如下 RDUO 路径选择模型描述交通均衡问题:

$$\begin{cases} \rho_i(x, y, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, t) = q(x, y, t), & \forall (x, y) \in \Omega, \\ \mathbf{F}(x, y, t) = -\frac{\rho(x, y, t) |\mathbf{v}| \nabla \phi(x, y, t)}{\|\nabla \phi(x, y, t)\|}, & \forall (x, y) \in \Omega, \\ \mathbf{F}(x, y, t) \cdot \mathbf{n} = 0, & \forall (x, y) \in \Gamma \setminus \Gamma_{\text{CBD}}, \\ \rho(x, y, 0) = \rho_0(x, y), & \forall (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \|\nabla\phi(x,y,t)\| = c(x,y,t), & \forall (x,y) \in \Omega, \\ \phi(x,y,t) = \phi_{\text{CBD}}, & \forall (x,y) \in \Gamma_{\text{CBD}}. \end{cases} \quad (4)$$

模型主要包括描述车流密度的质量守恒方程(3)和描述旅行费用势函数的 Eikonal 方程(4)。出行者选择费用势函数下降最快的方向行驶,即  $F//-\nabla\phi$ 。此时,可证明交通系统满足 RDUO 准则<sup>[8]</sup>。假定没有车辆可通过城市障碍物或离开城市区域,因此有边界条件:  $F(x,y,t) \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\forall (x,y) \in \Gamma \setminus \Gamma_{\text{CBD}}$ , 其中,  $\mathbf{n}$  表示边界外法向量。用  $\rho_0(x,y)$  表示已知的交通流的初始密度,则有初始条件:  $\rho(x,y,0) = \rho_0(x,y)$ 。假设进入 CBD 所需要的费用为  $\phi_{\text{CBD}}$ , 则有边界条件:  $\phi(x,y,t) = \phi_{\text{CBD}}, \forall (x,y) \in \Gamma_{\text{CBD}}$ 。

通过求解上述 RDUO 模型,可以得到车流密度、速度和旅行费用等。同时,旅行时间  $T(x,y,t)$  可以由以下 Eikonal 方程描述:

$$\begin{cases} \|\nabla T(x,y,t)\| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}, & \forall (x,y) \in \Omega, \\ T(x,y,t) = 0, & \forall (x,y) \in \Gamma_{\text{CBD}}. \end{cases} \quad (5)$$

进一步地,惩罚函数定义为

$$p(x,y,t) = \begin{cases} \gamma_1((t^* - \Delta) - (t + T(x,y,t))), & t + T(x,y,t) < t^* - \Delta, \\ 0, & t^* - \Delta \leq t + T(x,y,t) \leq t^* + \Delta, \\ \gamma_2((t + T(x,y,t)) - (t^* + \Delta)), & t + T(x,y,t) > t^* + \Delta, \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $t^*$  表示交通流期望到达时间,  $\Delta$  为早到或迟到的容忍时间,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  为早到和迟到的惩罚参数(如图 2)。

## 1.2 同时考虑出发时间和路径选择模型

一般情况下,出行者出行会同时考虑出发时间和路径的选择。如果仅已知交通需求空间分布  $q(x,y)$ , 则需要在路径选择模型的基础上进一步考虑出发时间,建立同时考虑出发时间和路径选择(SDTRC)模型。Lin 等<sup>[11]</sup>将出发时间选择和 PDUO 路径选择模型相结合,建立了同时考虑出发时间和路径选择预测型动态用户最优(SDTRC-PDUO)模型。该模型满足出发时间动态用户最优准则,采用等价的连续变分不等式进行描述。实际上,将出发时间与 1.1 小节中的 RDUO 路径选择模型结合,可以建立同时考虑出发时间和路径选择反应型动态用户最优(SDTRC-RDUO)模型。与 SDTRC-PDUO 模型相比,此模型同样可以很好地描述动态交通演化过程,且可以大大减少计算量。

在已知交通需求时空分布  $q(x,y,t)$  的情况下,通过求解 RDUO 模型(1.1 小节)可以得到总费用  $C(x,y,t)$ 。因此可记  $C(x,y,t) = C(x,y,t,q)$ 。定义  $C(x,y,q) = \min_{0 \leq t \leq t_{\text{end}}} C(x,y,t,q)$ 。出行者根据用户最优准则选择出发时间,即出行者任意时刻出发所产生的费用相等且最小,出行者无法通过改变出发时间降低其费用。出行时间用户最优准则定义如下。

**定义 1** 若对所有  $(x,y) \in \Omega$ , 满足以下条件:

$$\begin{cases} C(x,y,t,q) = C(x,y,q), & q(x,y,t) > 0, \\ C(x,y,t,q) \geq C(x,y,q), & q(x,y,t) = 0, \end{cases}$$

其中,  $q \in V$ ,

$$V = \left\{ q: q(x, y, t) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega, \forall t \in [0, t_{\text{end}}]; \right. \\ \left. \int_0^{t_{\text{end}}} q(x, y, t) dt = q(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \right\},$$

则满足出行时间用户最优准则。

与文献[10]中建立的 SDTRC-PDUO 模型类似,存在如下定理。

**定理 1** 出行时间用户最优准则等价于如下变分不等式问题:寻找  $q^* \in V$ , 使得对所有  $q \in V$ , 满足

$$\iint_{\Omega} \int_0^{t_{\text{end}}} C(x, y, t, q^*) (q(x, y, t) - q^*(x, y, t)) dt d\Omega \geq 0. \quad (7)$$

定理 1 的证明与文献[10]中定理 1 的证明本质上相同,此处省略证明步骤。

Gap 函数常可用于衡量交通均衡问题数值解的精度,定义为

$$F_{\text{gap}} = \iint_{\Omega} \int_0^{t_{\text{end}}} q(x, y, t) (C(x, y, t, q) - C(x, y, q)) dt d\Omega.$$

不难证明:1)  $F_{\text{gap}} \geq 0$ ; 2)  $F_{\text{gap}} = 0$  等价于满足出行时间用户最优条件,等价于  $q$  是变分不等式问题的一个解。

### 1.3 考虑住房分布的 SDTRC-RDUO 模型

在 SDTRC-RDUO 模型中,交通需求  $q(x, y)$  是给定的.实际上,出行者一般会根据住房费用和交通费用选择居住地.假设住房分布与交通需求  $q(x, y)$  之间满足以下关系<sup>[22]</sup>:

$$q(x, y) = Q \frac{\exp(-\gamma U(x, y))}{\iint_{\Omega} \exp(-\gamma U(x, y)) d\Omega}, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (8)$$

其中,  $U(x, y)$  为负效用函数,包括住房费用  $r(x, y)$  和交通费用  $C(x, y, q)$ ,  $\gamma$  为正值的敏感性参数.住房费用与交通需求分布  $q(x, y)$  和住房分布函数  $H(x, y)$  有关,定义为

$$r(x, y) = \alpha(x, y) \left( 1 + \frac{\beta(x, y) q(x, y)}{H(x, y) - q(x, y)} \right), \quad (9)$$

其中,  $\alpha(x, y)$  和  $\beta(x, y)$  为参函数。

由方程(8)可知,用户根据负效用  $U(x, y)$  选择居住地,负效用越大,交通需求越小.根据方程(9),住房供给越多,居住者越少,住房费用越小.方程(8)、(9)和 SDTRC-RDUO 模型(方程(3)和(4))构成完整的考虑住房分布的 SDTRC-RDUO 模型。

### 1.4 交通污染物排放模型

SDTRC-RDUO 描述了交通需求空间分布  $q(x, y)$  已知的条件下,同时考虑出发时间和路径选择的动态交通分配问题,通过求解该模型可以得到交通状态动态演化过程.而交通污染物排放模型则可以根据交通状态估计交通污染物排放水平,这里采用如下基于车辆速度-加速度的微观 VT-micro 污染物排放模型:

$$E^k = \exp \left( \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \omega_{i,j}^k |\mathbf{v}|^i a^j \right), \quad (10)$$

其中,  $\omega_{i,j}^k$  为速度  $|\mathbf{v}|^i$  (km/h) 和加速度  $a^j$  (km/h<sup>2</sup>) 对应的回归系数,  $E^k$  表示油耗和污染物的排放率,具体参数见表 1.车辆速度  $\mathbf{v} = (u, v)$  可由 SDTRC-RDUO 模型直接求得,车辆加速度  $\mathbf{a} = (a_x(x, y, t), a_y(x, y, t))$  则可以基于速度通过以下公式得到

$$\begin{cases} a_x = u_t + uu_x + vu_y, \\ a_y = v_t + uv_x + vv_y. \end{cases}$$

移动方向上加速度大小为

$$a(x, y) = \frac{a_x u + a_y v}{|\mathbf{v}|}. \quad (11)$$

该模型可以用于估计污染物 HC (mg/s), CO (mg/s) 和能耗  $F$  (gal/s), 而  $\text{CO}_2$  (mg/s) 排放率则可以根据碳守恒通过以下公式得到:

$$E^{\text{CO}_2} = 2.464F - 3.175E^{\text{HC}} - 1.57E^{\text{CO}}, \quad (12)$$

其中,  $F = E^1, E^{\text{HC}} = E^2, E^{\text{CO}} = E^3$ . 在时刻  $t$ , 城市交通单位面积单位时间  $\text{CO}_2$  排放量为

$$z(x, y, t) = E^{\text{CO}_2}(x, y, t)\rho(x, y, t),$$

时刻  $t$ ,  $\text{CO}_2$  的总排放量为

$$Q_{\text{TE}}(t) = \iint_{\Omega} z(x, y, t) dx dy,$$

时刻  $t$ ,  $\text{CO}_2$  的累计排放量为

$$M_{\text{CE}}(t) = \int_0^t Q_{\text{TE}}(\xi) d\xi.$$

表 1 VT-micro 污染物排放模型参数

Table 1 Parameters for the VT-micro model

$(i, j)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
(0,0)	-6.79E-1	8.87E-1	-7.28E-1
(0,1)	3.42E-5	3.77E-5	0.00
(0,2)	1.02E-9	1.96E-9	1.50E-9
(0,3)	-1.93E-14	-2.19E-14	-1.51E-15
(1,0)	2.70E-2	6.47E-2	2.27E-2
(2,0)	-2.33E-4	-6.56E-4	-1.74E-4
(3,0)	1.13E-6	3.50E-6	1.48E-6
(1,1)	1.11E-6	8.93E-7	2.34E-6
(2,1)	-4.42E-9	1.96E-8	-2.10E-8
(3,1)	1.06E-11	-1.36E-10	1.18E-10
(1,2)	4.87E-12	-5.43E-11	-3.21E-11
(2,2)	4.99E-14	2.62E-12	2.00E-12
(3,2)	-1.21E-15	-1.50E-14	-1.02E-14
(1,3)	-9.02E-16	0.00	-1.63E-15
(2,3)	4.10E-18	-1.89E-17	4.46E-17
(3,3)	-5.53E-20	0.00	-2.09E-19

## 2 求解算法

对计算区域  $\Omega$  进行三角网格剖分. 令  $X_i (i = 1, 2, \dots, N_p)$  和  $T_i (i = 1, 2, \dots, N_T)$  分别为网格节点和三角单元,  $N_p$  和  $N_T$  为节点和三角单元的数量. 如图 3 所示,  $A_i, N_{ik}$  和  $l_{ik}$  分别表示三角单元  $T_i$  的面积、第  $k$  个节点和第  $k$  条边.  $\mathbf{n}_{ik}$  表示穿过边  $l_{ik}$  的单位外法向量, 三角单元  $T_i$  的第  $k$  个邻居单元为  $T_{ik}$ . 将时间区间  $[0, t_{\text{end}}]$  划分为  $N$  个时间步, 时间步长为  $\Delta t = t_{\text{end}}/N$ .

### 2.1 求解 RDUO 模型的一阶有限体积法

采用一阶有限体积法求解 RDUO 模型中的质量守恒方程(方程(3)).根据第  $n$  个时间步的数值解  $\rho_i^n$ , 可以得到第  $n + 1$  个时间步的数值解  $\rho_i^{n+1}$ :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{k=1}^3 \hat{h}_{ik} + \Delta t q_i^n,$$

其中,  $\rho_i^n$  和  $q_i^n$  分别表示交通流第  $n$  个时间步三角单元  $T_i$  上的密度和交通需求的数值解.  $\hat{h}_{ik}$  为 Lax-Friedrich 数值流通量<sup>[8,10]</sup>:

$$\hat{h}_{ik} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\rho_{ik}^l) \cdot \mathbf{n}_{ik} + \mathbf{F}(\rho_{ik}^r) \cdot \mathbf{n}_{ik} - c(\rho_{ik}^r - \rho_{ik}^l)),$$

其中,  $\rho_{ik}^l$  和  $\rho_{ik}^r$  表示边  $l_{ik}$  逆时针方向左右两侧单元的密度值,

$$c = \max_{i,k} |\mathbf{F}'(\rho) \cdot \mathbf{n}|_{ik}.$$

对于描述费用势函数  $\phi(x, y, t)$  和旅行时间  $T(x, y, t)$  的 Eikonal 方程(4)和(5), 采用快速步进法(fast marching method)求解交通流第  $n$  个时间步节点  $X_i$  处费用势函数和旅行时间的数值解  $\phi_i^n$  和  $T_i^n$ . 详细过程可参考文献[23-24].

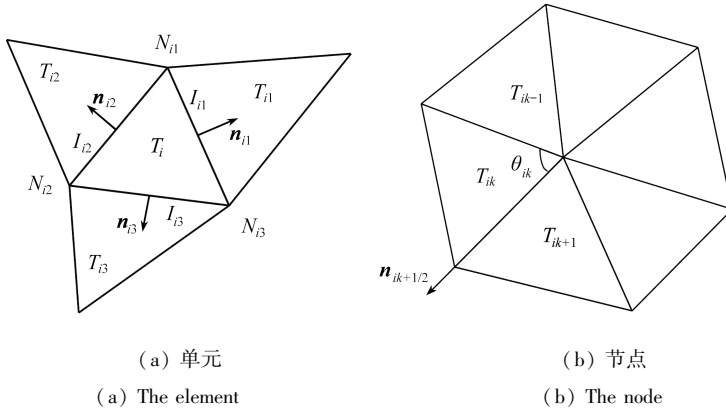


图3 三角网格

Fig. 3 Triangular meshes

### 2.2 求解 SDTRC-RDUO 模型的 GLP 方法

对连续变分不等式方程(7)进行时空离散后,可以得到有限维离散型变分不等式,从而可以采用传统的投影算法进行求解.

记  $q_i$  为交通流在节点  $X_i$  处的交通需求,定义

$$\Lambda = \left\{ q_i^n : q_i^n \geq 0, 1 \leq i \leq N_p, 1 \leq n \leq N; \sum_{1 \leq n \leq N} q_i^n = q_i, 1 \leq i \leq N_p \right\}.$$

则离散型变分不等式为,寻找  $\mathbf{q}^* \in \Lambda$ , 使得对所有的  $\mathbf{q} \in \Lambda$ , 满足

$$\sum_{1 \leq i \leq N_p} \sum_{1 \leq n \leq N} \tilde{C}_i^n (q_i^n - (q_i^n)^*) \geq 0,$$

其中,  $\tilde{C}_i^n = \sum_{k=1}^{I_i} w_{ikj} C_{ijk}^n A_{ik} \Delta t$ ,  $I_i$  为与节点  $X_i$  相邻的三角单元数量,  $ik$  为节点  $X_i$  第  $k$  个单元的下标,  $ikj$  为单元  $T_{ik}$  的第  $j$  个节点的下标,

$$w_{ikj} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & X_{ikj} = X_i, \\ \frac{1}{12}, & X_{ikj} \neq X_i. \end{cases}$$

离散型变分不等式问题等价于投影问题,如下定理成立.

**定理 2** 令  $\lambda > 0, \mathbf{q}^* \in \Lambda$  是离散变分不等式问题的一个解,当且仅当

$$\mathbf{q}^* = P_{\Lambda}(\mathbf{q}^* - \lambda \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}^*)),$$

其中,  $P_{\Lambda}(\mathbf{x})$  表示向量  $\mathbf{q} \in R^{N_p \times N}$  在  $\Lambda$  上的投影,定义为

$$P_{\Lambda}(\mathbf{x}) = \arg \min \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{y} \in \Lambda \}.$$

Goldstein<sup>[25]</sup>、Levitin 和 Polyak<sup>[26]</sup> 提出了 GLP 迭代算法,即给定初值  $\mathbf{q}^0$ , 根据如下方程生成序列  $\{\mathbf{q}^k\}$ :

$$\mathbf{q}^{k+1} = P_{\Lambda}(\mathbf{q}^k - \lambda_k \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}^k)), \quad (13)$$

其中,  $P_{\Lambda}$  是正的更新步长.

以下给出求解离散型变分不等式问题的完整算法.

### 算法 1

步骤 1 给定初始值  $\mathbf{q}^0 \in \Lambda$ , 令  $k = 0$ .

步骤 2 对于  $k \geq 0$ , 计算  $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}^k)$ :

① 通过求解 RDUO 模型计算旅行费用  $\phi(x, y, t)$ ;

② 通过求解方程(4)计算旅行时间  $T(x, y, t)$ ;

③ 根据方程(5)计算惩罚费用  $p(x, y, t)$ , 并根据方程(2)计算总费用  $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}^k)$ .

步骤 3 采用 Frank-Wolfe 方法<sup>[27]</sup>, 根据方程(13)计算  $\mathbf{q}^{k+1}$ .

步骤 4 计算相对 gap 值:

$$R_{\text{gap}} = \frac{\sum_i \sum_n q_i^n (\tilde{C}_i^n - C_i)}{\sum_i q_i C_i},$$

若  $R_{\text{gap}} < \varepsilon_1$ , 停止迭代, 根据方程(11)计算运动方向上的加速度并根据 VT-micro 模型(方程(12))计算 CO<sub>2</sub> 排放率; 否则令  $k = k + 1$ , 转至步骤 2.

## 2.3 求解考虑住房分布的 SDTRC-RDUO 模型的相继平均法

注意到方程(8)、(9)与 SDTRC-RDUO 模型相互耦合, 可视为一个不动点问题, 采用相继平均法(MSA)进行求解. 具体地, 已知交通需求  $q_{\text{old}}(x, y)$ , 通过求解 SDTRC-RDUO 模型可以得到交通费用  $C(x, y, q_{\text{old}})$ , 由方程(9)可以求得住房费用  $r(x, y)$ . 因此, 通过方程(8), 可以得到  $q_{\text{new}}(x, y) = f(q_{\text{old}}(x, y))$ . 问题变为求解如下不动点问题:

$$q(x, y) = f(q(x, y)).$$

求解不动点问题的相继平均算法如下.

### 算法 2

步骤 1 给定如下初始可行解  $q_i^0$ :

$$q_i^0 = \frac{Q}{A_{\rho}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_p,$$



其中,  $A_\Omega$  为城市区域总面积.

步骤 2 对于  $k \geq 0$ , 根据算法 1 求解 SDTRC-RDUO 模型, 并根据方程 (8) 得到

$$\tilde{q}_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, N_p.$$

步骤 3 计算  $k + 1$  个迭代步的数值解:

$$q_i^{k+1} = (1 - \beta_k) q_i^k + \beta_k \tilde{q}_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, N_p,$$

其中  $\beta_k = \frac{1}{k + 1}$ .

步骤 4 如果  $\left\| \frac{(q_1^{k+1}, \dots, q_{N_p}^{k+1}) - (q_1^k, \dots, q_{N_p}^k)}{(q_1^{k+1}, \dots, q_{N_p}^{k+1})} \right\| \leq \varepsilon_2$ , 停止迭代; 否则, 返回步骤 2.

### 3 数值算例

考虑如图 4 所示的城市区域, 东西长约 37 km (4~41 km), 南北宽约 24 km (10~34 km), 正方形 CBD 的中心位置为 (15 km, 20 km), 边长为 2 km. 模拟时间为早上 6:00 到 9:00,  $t \in [0 \text{ h}, 5 \text{ h}]$ . 出行者的期望到达时间为  $t^* = 2.8 \text{ h}$ , 惩罚函数 (方程 (6)) 中的参数取:  $\gamma_1 = 48 \text{ \$/h}$ ,  $\gamma_2 = 108 \text{ \$/h}$ ,  $\Delta = 0.1 \text{ h}$ . 城市内的总交通需求  $Q = 467\,417 \text{ veh}$  (如均匀分布, 则  $q(x, y) = 400 \text{ veh/km}^2$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega$ ). 在速度-密度假设关系中, 令  $\beta = 2 \times 10^{-6}$ , 自由流速度为

$$U_f(x, y) = U_{\max} (1 + \gamma_3 d(x, y)),$$

其中,  $\gamma_3 = 0.004 \text{ km}^{-1}$ ,  $U_{\max} = 65 \text{ km/h}$ ,  $d(x, y)$  为  $(x, y)$  到 CBD 的距离. 方程 (1) 中, 令  $\kappa = 72 \text{ \$/h}$ ,  $\pi = 10^{-8} \text{ km}^2 \cdot \text{h/veh}$ .

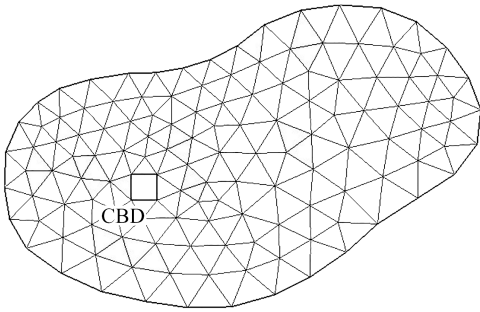


图 4 单中心城市区域

Fig. 4 A hypothetical city with one CBD

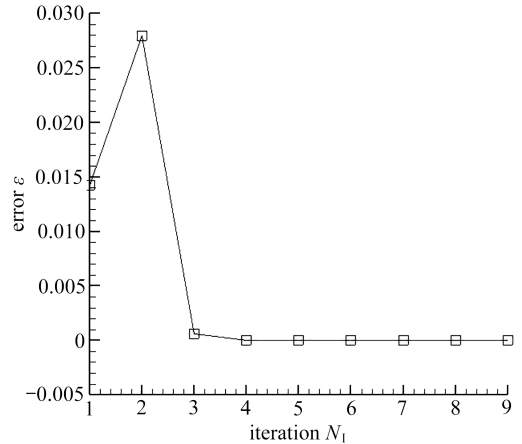


图 5 MSA 算法收敛图

Fig. 5 The convergence of the MSA

假设  $t = 0 \text{ h}$  时城市中没有任何出行者且进入 CBD 不需要费用, 因此有  $\rho_0(x, y) = 0$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega$  和  $\phi_{\text{CBD}} = 0$ . 对计算区域进行三角网格剖分, 其有 298 个节点、454 个单元和 844 条边, 时间划分取  $\Delta t = 1/180 \text{ h}$ . 在 GLP 算法中, 令更新步长  $\lambda_k = 30$ , 收敛阈值  $\varepsilon_1 = 0.05$ .

在 MSA 算法中, 收敛阈值  $\varepsilon_2 = 10^{-7}$ , 如图 5 所示算法具有很好的收敛性, 迭代步数大于 3 时认为结果已收敛.

图 6 为交通密度时空演化图.  $t = 1.95 \text{ h}$  时, 郊区产生交通需求, 出行者从郊区前往 CBD (图 6(a));  $t = 2.3 \text{ h}$  时, 城市出现大面积的拥堵状态, 在 CBD 东侧更为明显 (图 6(b));  $t = 2.8 \text{ h}$

时,交通出现拥堵高峰,大量出行者集中于 CBD 附近,而郊区的交通处于畅通状态(图 6(c));当  $t = 3.8$  h 时,交通拥堵高峰已过,恢复畅通(图 6(d)).

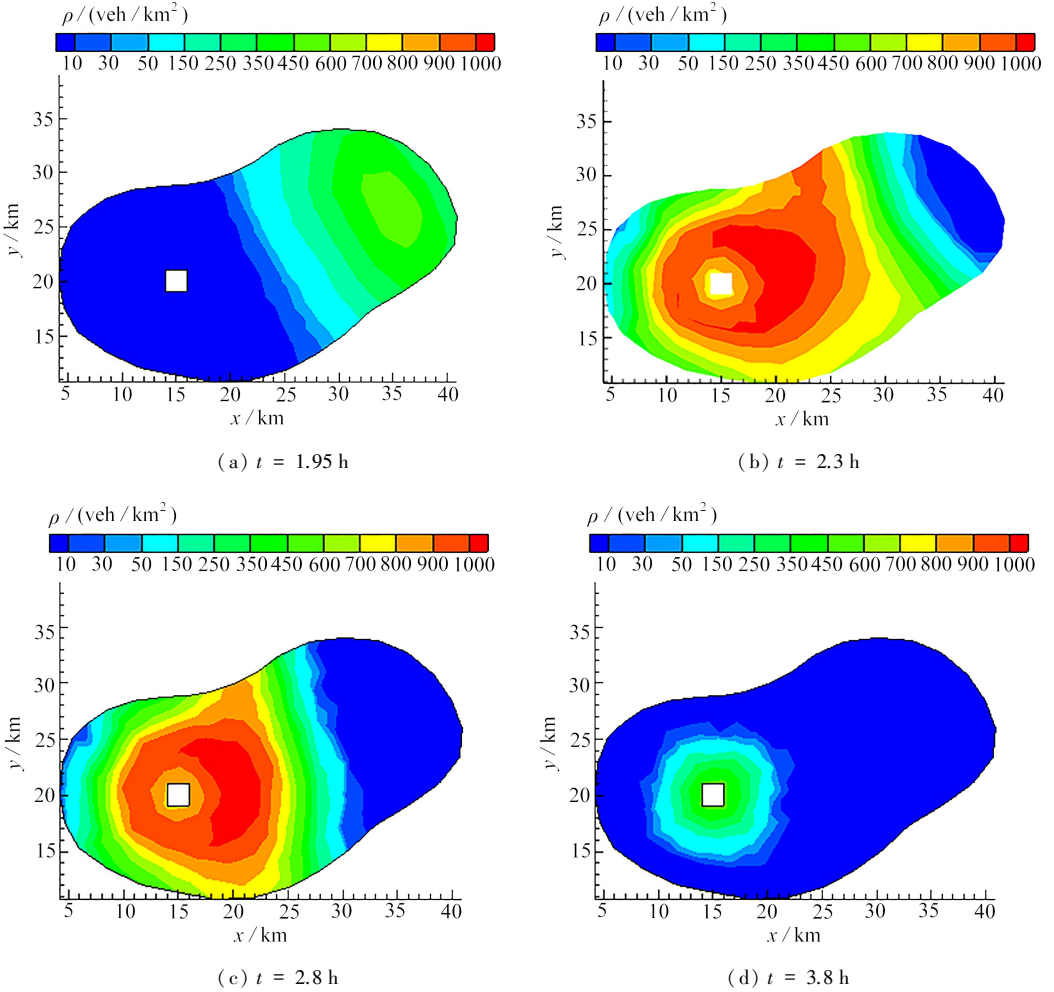


图 6 密度分布图

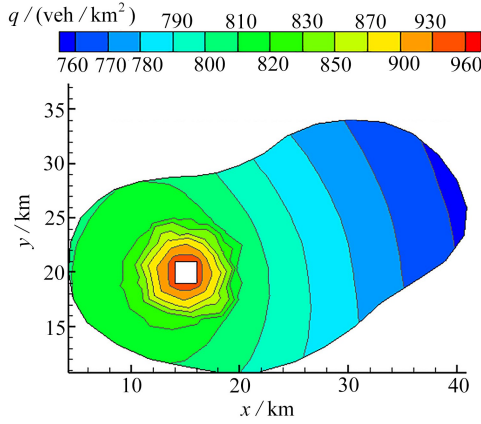
Fig. 6 Density plots

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

图 7(a)为交通需求空间分布图,可以看到距 CBD 距离越远,交通需求越小,从总体看,在郊区居住比在 CBD 附近居住的整体成本要高(图 7(b)).CBD 西侧的交通需求更多,这是由于西侧的拥堵情况较轻,交通费用更小.图 7(c)所示为最佳出发时间分布,表示出行人数最多的出发时间,由图可知距 CBD 距离越远,最佳出发时间越早,因为郊区的出行者需要更多的时间到达目的地.由于西侧的交通拥堵状况相对较轻,所以同样距离下 CBD 西侧的最佳出发时间要晚于东侧。

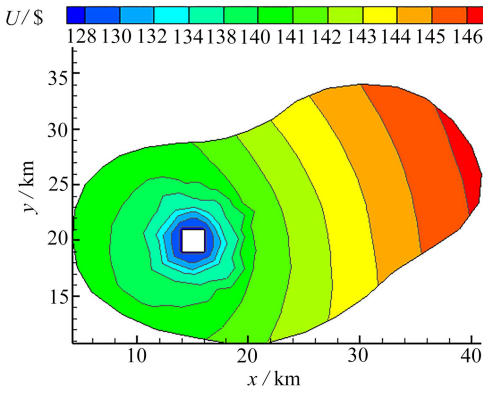
图 8 为  $\text{CO}_2$  排放时空分布图. $t = 1.95$  h 时,只有郊区产生出行者从而产生车辆  $\text{CO}_2$  排放,其他区域无  $\text{CO}_2$  排放(图 8(a)); $t = 2.3, 2.8$  h 时,城市发生交通拥堵的地方  $\text{CO}_2$  排放量大(图 8(b)、(c));当  $t = 3.8$  h 时,只有 CBD 附近产生  $\text{CO}_2$  排放,对应图 8(d),该区域仍有未到达目的地的用户,而其他区域排放量为零.图 9 为不同时刻城市内  $\text{CO}_2$  的瞬时排放总量和累计排放总量.在约  $t = 1.9$  h 时,用户从居住地出发,城市交通  $\text{CO}_2$  的排放量随之增加; $t = 2.1$  h 后,部分

用户已到达目的地(CBD), CO<sub>2</sub> 排放量逐渐减少;  $t = 4$  h 后, 用户全部到达终点, 不再产生 CO<sub>2</sub> 排放.



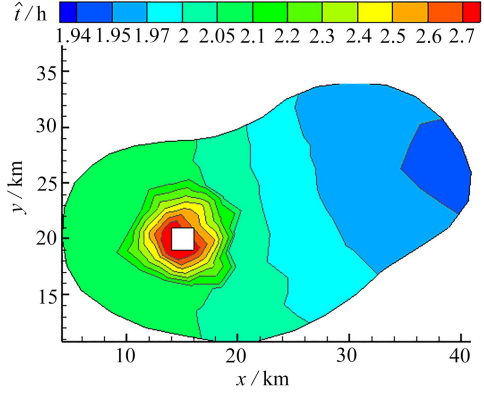
(a) 交通需求分布图

(a) The traffic demand distribution



(b) 负效用分布图

(b) The disutility distribution

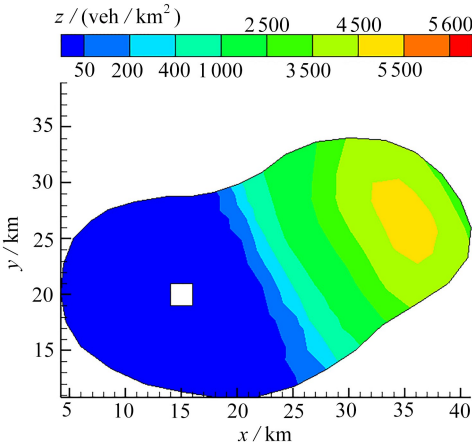


(c) 最佳出行时间分布图

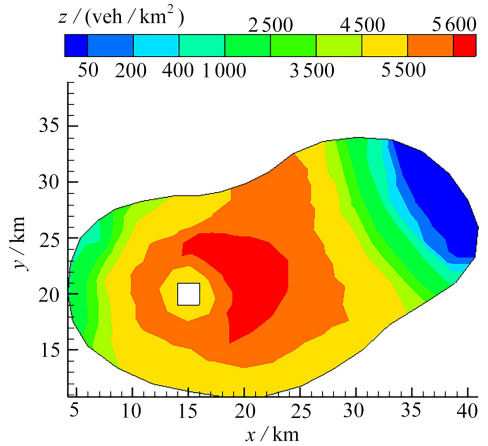
(c) The optimal travel time distribution

图7 城市区域内的交通需求、用户负效用与用户最佳出行时间分布

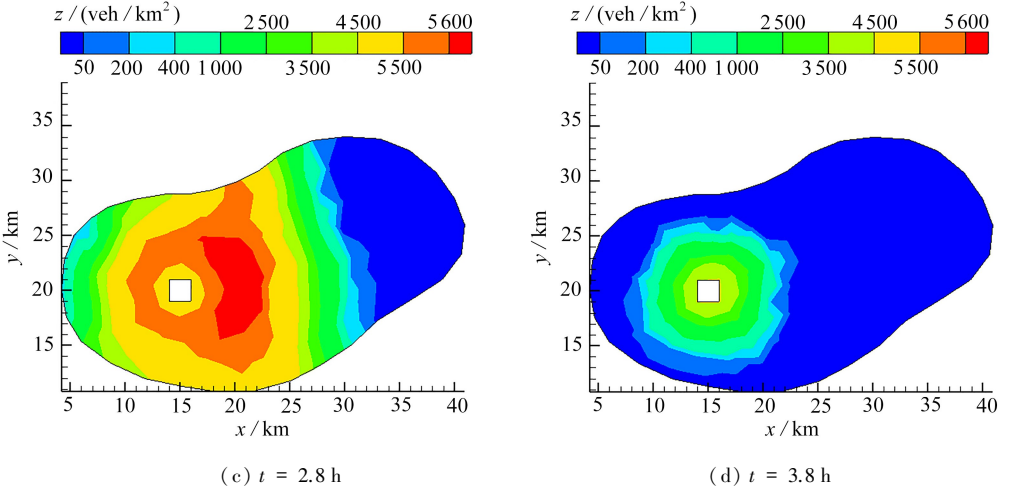
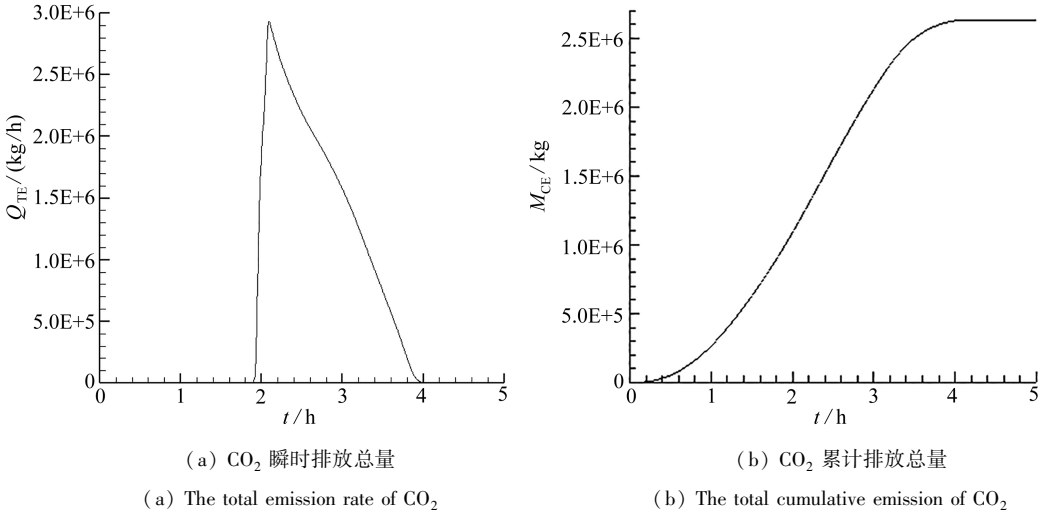
Fig. 7 The traffic demand distribution, disutility distribution and optimal travel time distribution of the city



(a)  $t = 1.95$  h



(b)  $t = 2.3$  h

图 8 CO<sub>2</sub> 排放时空分布图Fig. 8 Distributions of the CO<sub>2</sub> concentration at various moments图 9 城市区域内的 CO<sub>2</sub> 排放水平Fig. 9 The emission level of CO<sub>2</sub> in the city

## 4 结论和展望

将城市路网视为二维连续的平面,提出 SDTRC-RDUO 交通分配模型,并在此基础上进一步建立了考虑住房分配的二维连续型动态交通分配模型.进而,采用考虑速度和加速度的微观交通污染物排放模型 VT-micro 对 CO<sub>2</sub> 动态排放量进行估计.基于三角网格,采用有限体积法、GLP 投影算法和相继平均法进行数值求解,由数值算例验证了模型和数值方法的有效性.

将模型推广到多个 CBD,并通过优化住房分布,降低交通污染物排放量是未来有意义的工作.

**致谢** 本文作者衷心感谢陆地交通气象灾害防治技术国家工程实验室开放研究基金 (NEL-2019-03) 对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] International Energy Agency. CO<sub>2</sub> emissions from fuel combustion 1971—2004[R]. 2004.
- [2] 中华人民共和国环境保护部. 中国机动车环境管理年报(2017)[R]. 2017.(Ministry of Environmental Protection of the People's Republic of China. China vehicle environmental management annual report(2017)[R]. 2017.(in Chinese))
- [3] 林志阳. 二维连续型动态交通分配与土地利用模型及其数值模拟[D]. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2018.(LIN Zhiyang. Two dimensional continuum dynamic traffic assignment with land use models and their numerical simulations[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai University, 2018.(in Chinese))
- [4] SHEFFI Y. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis With Mathematical Programming Techniques*[M]. New York: Prentice Hall, 1984.
- [5] VAUGHAN R. *Urban Spatial Traffic Patterns*[M]. London: Pion, 1987.
- [6] SZETO W Y, WONG S C. Dynamic traffic assignment: model classifications and recent advances in travel choice principles[J]. *Central European Journal of Engineering*, 2012, 2(1): 1-18.
- [7] TAO Y Z, JIANG Y Q, DU J, et al. Dynamic system-optimal traffic assignment for a city using the continuum modeling approach[J]. *Journal of Advanced Transportation*, 2014, 48(7): 782-797.
- [8] JIANG Y Q, WONG S C, ZHANG P, et al. Dynamic continuum model with elastic demand for a polycentric urban city[J]. *Transportation Science*, 2017, 51(3): 931-945.
- [9] DU J, WONG S C, SHU C W, et al. Revisiting Jiang's dynamic continuum model for urban cities[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2013, 56: 96-119.
- [10] LIN Z Y, WONG S C, ZHANG P, et al. A predictive continuum dynamic user-optimal model for a polycentric urban city[J]. *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, 2017, 5(3): 233-252.
- [11] LIN Z Y, WONG S C, ZHANG P, et al. A predictive continuum dynamic user-optimal model for the simultaneous departure time and route choice problem in a polycentric city[J]. *Transportation Science*, 2018, 52(6): 1496-1508.
- [12] 周小霞. 城市道路施工区交通流建模与排放研究[D]. 硕士学位论文. 四川: 西南交通大学, 2018.(ZHOU Xiaoxia. Research on traffic flow modeling and emission of urban work zone [D]. Master Thesis. Sichuan: Southwest Jiaotong University, 2018.(in Chinese))
- [13] US Environmental Protection Agency (USEPA). User's guide to mobile 5[Z]. 1994.
- [14] California Air Resources Board(CARB). EMFAC 2007: User's guide[Z]. 2006.
- [15] VALLAMSUNDAR S, LIN J. Moves versus mobile: a comparison of GHG and criteria pollutant emissions[J]. *Transportation Research Record Journal of the Transportation Research Board*, 2011, 2233: 27-35.
- [16] BARTH M, AN F, YOUNGLOVE T, et al. Comprehensive modal emission model (CMEM) [Z]. California: University of California, 2002.
- [17] AHN K, RAKHA H, TRANI A, et al. Estimating vehicle fuel consumption and emissions based on instantaneous speed and acceleration levels[J]. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, 2002, 128(2): 182-190.

- [ 18 ] SMIT R, SMOKERS R, RABE E. A new modeling approach for road traffic emissions: VERSIT+ [J]. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 2007, **12**(6): 414-422.
- [ 19 ] JIANG Y Q, MA P J, ZHOU S G. Macroscopic modeling approach to estimate traffic-related emissions in urban areas[J]. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 2018, **60**: 41-55.
- [ 20 ] PANIS L I, BROEKX S, LIU R. Modelling instantaneous traffic emission and the influence of traffic speed limits[J]. *Science of the total environment*, 2006, **371**(1/3): 270-285.
- [ 21 ] YANG L Z, LI T T, WONG S C, et al. Modeling and simulation of urban air pollution from the dispersion of vehicle exhaust: a continuum modeling approach[J]. *International Journal of Sustainable Transportation*, 2019, **13**(10): 1-19.
- [ 22 ] YIN J, WONG S C, SZE N N, et al. A continuum model for housing allocation and transportation emission problems in a polycentric city[J]. *International Journal of Sustainable Transportation*, 2013, **7**(4): 275-298.
- [ 23 ] HUANG L, XIA Y H, WONG S C, et al. Dynamic continuum model for bi-directional pedestrian flows[J]. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Engineering and Computational Mechanics*, 2009, **162**(2): 67-75.
- [ 24 ] XIA Y H, WONG S C, ZHANG M P, et al. An efficient discontinuous Galerkin method on triangular meshes for a pedestrian flow model[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **76**(3): 337-350.
- [ 25 ] GOLDSTEIN A A. Convex programming in Hilbert space[J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1964, **70**(5): 709-710.
- [ 26 ] LEVITIN E S, POLYAK B T. Constrained minimization methods[J]. *Ussr Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, **6**(5): 1-50.
- [ 27 ] FRANK M, WOLFE P. An algorithm for quadratic programming[J]. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, **3**(1/2): 95-110.

# A 2D Continuous Dynamic Traffic Assignment Model and Traffic-Related Emission Estimation Considering Housing Distribution

LI Xiaoyang<sup>1</sup>, LIN Zhiyang<sup>2</sup>, LÜ Yupei<sup>1,3</sup>, ZHANG Peng<sup>1,4</sup>

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University,  
Shanghai 200072, P.R.China;*

2. *Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University,  
Shanghai 200433, P.R.China;*

3. *School of Science, Huzhou University,  
Huzhou, Zhejiang 313000, P.R.China;*

4. *Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering,  
Shanghai 200072, P.R.China)*

(Recommended by DAI Shiqiang, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** A 2D continuous dynamic traffic assignment model considering housing distribution was proposed, and then the traffic-related emissions were estimated. In the model, the traffic demand is influenced by housing distribution, and travelers choose departure times and routes according to the dynamic user-optimal principle. The model can be used to describe the dynamic traffic and obtain the traffic density, velocity and flow. A speed and acceleration-based microscopic emission model VT-micro was applied to estimate the traffic-related CO<sub>2</sub> emissions. The finite volume method, the projection method and the successive average method were constructed based on triangular meshes. A numerical example of a city with a single CBD was presented to demonstrate the effectiveness of the model and the numerical algorithm.

**Key words:** continuous dynamic traffic assignment; housing distribution; departure time choice; route choice; traffic-related emission

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11672348; 11972121; 11272199); China Postdoctoral Science Foundation (2019M661362); The National Key R&D Program of China (2018YFB1600900); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB725404)