 http://www.applmathmech.cn

具有全局交互作用的时滞周期格微分系统的 front-like 整体解*

薛 雪

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

摘要: 研究了一类一维空间周期格上的具有时滞和全局交互作用的微分系统的 front-like 整体解.通过建立适当的比较原理,并融合不同方向的波前解与连接稳定态和不稳定态的空间周期解,构造了 front-like 整体解并证明了一些定性性质.与波前解相比,front-like 整体解能够展示出新的动力学行为.

关 键 词: 周期格动力系统; 空间周期解; front-like 整体解; 比较原理

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A DOI: 10.21656/1000-0887.400170

引 言

近年来,对于具有年龄结构的单种群人口动力学模型的研究已经取得了很大的进展.其中,为了描述具有时滞和年龄结构的单种群人口动力学行为,Weng 等[1]提出并研究了如下的时滞格微分系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v_j(t,a)+\dfrac{\partial}{\partial a}v_j(t,a)= \\ \qquad \bar{d}(a)[v_{j+1}(t,a)+v_{j-1}(t,a)-2v_j(t,a)]-\mu(a)v_j(t,a), \\ v_j(t,0)=b(u_j(t)), \\ u_j'(t)=D[u_{j+1}(t)+u_{j-1}(t)-2u_j(t)]-d(u_j(t))+v_j(t,\tau), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $j\in\mathbf{Z}, t>0, a\in(0,\tau)$; $v_j(t,a)$ 表示种群在位置 $j\in\mathbf{Z}$,时刻 $t\geqslant 0$ 和年龄 $a\geqslant 0$ 的密度; $u_j(t)$ 表示成年种群的密度; $\bar{d}(a)$ 与 $\mu(a)$ 分别表示年龄为 a 的未成年种群的扩散率和死亡率; D 表示成年种群的扩散率; $d(u)$ 和 $b(u)$ 分别表示成年种群的死亡率和出生率; $v_j(t,\tau)$ 表示年龄为成熟年龄 τ 的成年种群的密度.

由于自然环境的复杂性,介质一般不是均匀的,因此 Wu 和 Hsu[2]将空间周期考虑到系统(1)中,得到下面的周期系统:

* **收稿日期:** 2019-05-15
基金项目: 国家自然科学基金(11671315)
作者简介: 薛雪(1995—),女,硕士(E-mail: 863174709@qq.com).
引用格式: 薛雪. 具有全局交互作用的时滞周期格微分系统的 front-like 整体解[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(2): 223-234.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}v_j(t,a)+\dfrac{\partial}{\partial a}v_j(t,a)=\\ \qquad \bar{d}(a)[v_{j+1}(t,a)+v_{j-1}(t,a)-2v_j(t,a)]-\mu(a)v_j(t,a),\\ v_j(t,0)=b_j(u_j(t)),\\ u_j'(t)=D_{j+1}[u_{j+1}(t)-u_j(t)]+D_j[u_{j-1}(t)-u_j(t)]-d_j(u_j(t))+v_j(t,\tau),\end{cases}\tag{2}$$

其中$j\in\mathbf{Z},t>0,a\in(0,\tau)$.与系统(1)相比,系统(2)中成年种群的出生率$b_j(\cdot)$、死亡率$d_j(\cdot)$以及扩散率$D_j$依赖于空间.通过沿着特征线积分,并使用离散的Fourier变换,系统(2)可以简化为

$$u_j'(t)=\Delta[u_j(t)]-d_j(u_j(t))+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{\nu}{2\pi}\beta_\alpha(j-k)b_k(u_k(t-\tau)),\qquad t>0,\ j\in\mathbf{Z},$$

其中

$$\Delta[u_j(t)]:=D_{j+1}u_{j+1}(t)+D_ju_{j-1}(t)-(D_{j+1}+D_j)u_j(t),$$

$$\nu:=\exp\left\{-\int_0^\tau\mu(s)\mathrm{d}s\right\},\ \alpha:=\int_0^\tau\bar{d}(s)\mathrm{d}s,\ \beta_\alpha(l):=2\mathrm{e}^{-2\alpha}\int_0^\pi\cos(ls)\mathrm{e}^{2\alpha\cos s}\mathrm{d}s.$$

文献[2]进一步研究了如下更一般的,具有时滞和全局交互作用的空间周期格动力系统:

$$u_j'(t)=\Delta[u_j(t)]+f_j\left(u_j(t),\ \sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(u_k(t-\tau))\right),\qquad t>0,\ j\in\mathbf{Z}.\tag{3}$$

但文献[2]仅研究了系统(3)的包括渐近传播速度与连接不稳定平衡态$\mathbf{0}$和稳定平衡态$\boldsymbol{\beta}=\{\beta(j)\}_{j\in\mathbf{Z}}$的脉冲波前解在内的传播现象.除此之外,行波之间的交互作用(见文献[3-5])也是一个值得研究的重要问题.它可以由定义在整个时间$t\in\mathbf{R}$和整个空间点的所谓的front-like整体解来描述.从动力学的观点来看,这样的整体解可以在动力学中表现出新的特征行为.近年来,有很多关于整体解(其行为是两个波前解的融合或分离)的研究.例如,对于反应扩散方程的整体解可参见文献[6-11];具有时滞的反应扩散方程的整体解可参见文献[12-13];具有非局部交互作用的时滞格微分方程的整体解可参见文献[14-15];对于非局部扩散方程的整体解可参见文献[16];具有扰动时滞的CNN模型的整体解可参见文献[17];对于反应扩散系统的整体解可参见文献[18-20];以及周期格动力系统的整体解可参见文献[21].然而,到目前为止,关于系统(3)的整体解的研究仍没有任何结果,本文将解决这个问题.

为了研究系统(3)的整体解的存在性及其一些定性性质,建立如下假定:

(H1) $J(k)\geqslant 0,\ J(0)>0,\ J(-k)=J(k),\ k\in\mathbf{Z}$; $\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(k)=1$以及$\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(k)\mathrm{e}^{\lambda k}<\infty,\ \lambda\geqslant 0$.

(H2)(周期性) 存在$N\in\mathbf{N}$使得$D_j=D_{j+N}>0,\ f_j(\cdot,\cdot)=f_{j+N}(\cdot,\cdot)$以及$S_j(\cdot)=S_{j+N}(\cdot)$,其中$f_j(\cdot,\cdot)\in C^2(R_+^2,\mathbf{R}_+),S_j(\cdot)\in C^2(R_+^2,\mathbf{R}_+),\ j\in\mathbf{Z}$.

(H3)(单稳性) $f_j(0,0)=S_j(0)=0$,

$$\partial_1f_j(0,0)+\partial_2f_j(0,0)\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k'(0)>0,\ \partial_2f_j(0,0)S_j'(0)>0,\qquad j\in\mathbf{Z}.$$

而且存在常数$K>0$使得$f_j\left(K,\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(K)\right)\leqslant 0,\ j\in\mathbf{Z}$.

(H4)(单调性) 对任意的$u\in[0,K],v\in[0,S_K],\ j\in\mathbf{Z}$,有$\partial_2f_j(u,v)\geqslant 0,S_j'(u)\geqslant 0$,其中$S_K:=\max_{j\in\mathbf{Z}}S_j(K)$.

(H5)(次齐次性) 对任意的$\gamma\in(0,1),u,v\in(0,K],\ j\in\mathbf{Z}$,有

$$f_j\left(\gamma u, \sum_{k\in\mathbf{Z}} J(j-k)S_k(\gamma v)\right) > \gamma f_j\left(u, \sum_{k\in\mathbf{Z}} J(j-k)S_k(v)\right).$$

本文主要是通过混合不同方向的波前解与连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的空间周期解来构造 front-like 整体解.受 Wu 和 Hsu[2] 的启发,利用单调迭代技术并结合上-下解方法得到系统(3)的空间周期解的存在性以及分别具有波速 $c > c_*^+$ 和 $c' > c_*^-$ 的左向和右向波前解的渐近行为.于是,基于系统(3)建立的各种比较原理以及相关的线性系统,可以得到整体解的存在性和一些定性的性质(见后文定理 1~3).这类整体解类似于从 j 轴左侧(右侧)传播的左(右)向波前解,或者当 $t\to-\infty$ 时从 j 轴两侧传播的左向波前解和右向波前解,而且当 $t\to+\infty$ 时收敛到唯一的正平衡态 $\boldsymbol{\beta}$.从生物学的角度来看,上述结论提供了一些新的物种入侵方式.

1 预备知识

为了本文的完整性和读者的方便,在本节中,首先回顾并总结了 Wu 和 Hsu[2] 关于系统(3)解的一般性结论(引理 1~4).然后,建立了两个引理(引理 5、6),将用于构造 front-like 整体解.

定义 1 若函数 $u(t) = \{u_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 满足

$$u_j(t) \geqslant (\leqslant) \mathrm{e}^{-w_j t}u_j(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}F[u](s,j)\,\mathrm{d}s, \qquad t\in[0,T),\ j\in\mathbf{Z},$$

其中

$$\begin{aligned}
&w_j := D_{j+1} + D_j + L_1,\\
&L_1 := \max\{|\partial_1 f_j(u,v)|\,|\, j\in\mathbf{Z}, u\in[0,K], v\in[0,S_K]\},\ T>0,\\
&F[u](t,j) := D_{j+1}u_{j+1}(t) + D_j u_{j-1}(t) + L_1 u_j(t) +\\
&\qquad f_j\left(u_j(t), \sum_{k\in\mathbf{Z}} J(j-k)S_k(u_k(t-\tau))\right),
\end{aligned}$$

则称函数 $u(t)$ 是系统(3)的一个上(下)解.

首先研究系统(3)对应的初值问题:

$$\begin{cases}
u_j'(t) = \Delta[u_j(t)] + f_j\left(u_j(t), \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} J(j-k)S_k(u_k(t-\tau))\right), & t>0,\ j\in\mathbf{Z},\\
u_j(\theta) = \varphi_j(\theta), \qquad \theta\in[-\tau,0],\ j\in\mathbf{Z}.
\end{cases} \tag{4}$$

引理 1 假设条件(H1)~(H4)成立.

(i)(存在性) 对任意的函数 $\varphi = \{\varphi_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}, \varphi_j\in C([-\tau,0],[0,K])$,初值问题(4)在 $[0,+\infty)$ 内存在唯一的解 $u(t;\varphi) = \{u_j(t;\varphi)\}_{j\in\mathbf{Z}}$,且满足 $u_j(s) = \varphi_j(s), u_j\in C^1([0,+\infty),[0,K]), j\in\mathbf{Z}$.

(ii)(比较原理) 假设 $u^+(t) = \{u_j^+(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 以及 $u^-(t) = \{u_j^-(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 分别是系统(4)在 $[0,+\infty)$ 内的上解和下解,且满足 $0\leqslant u_j^+(t), u_j^-(t)\leqslant K, u_j^+(s)\geqslant u_j^-(s), t\geqslant 0, s\in[-\tau,0], j\in\mathbf{Z}$,则有 $u_j^+(t)\geqslant u_j^-(t), t\geqslant 0, j\in\mathbf{Z}$.进一步地,若 $u^+(0)\not\equiv u^-(0)$,则有 $u_j^+(t) > u_j^-(t), t\geqslant 0, j\in\mathbf{Z}$.

(iii)(最终强正性) 对任意的函数 $\varphi = \{\varphi_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}, \varphi_j\in C([-\tau,0],[0,K])$,若 $\varphi\not\equiv 0$,则有 $u_j(t;\varphi) > 0, t>\tau, j\in\mathbf{Z}$.

引理 2 假设条件(H1)~(H4)成立.设 $u_j^+(t)\in C^1([0,+\infty),[0,+\infty)), u_j^-(t)\in$

$C^1([0,+\infty),(-\infty,K])$ 且对所有的 $s\in[-\tau,0]$, $t>0$, $j\in\mathbf{Z}$, 满足 $u_j^+(s)\geqslant u_j^-(s)$,

$$(u_j^+)'(t)\geqslant\Delta[u_j^+(t)]+\partial_1 f_j(0,0)u_j^+(t)+\partial_2 f_j(0,0)\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k'(0)u_k^+(t-\tau),$$

$$(u_j^-)'(t)\leqslant\Delta[u_j^-(t)]+\partial_1 f_j(0,0)u_j^-(t)+\partial_2 f_j(0,0)\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k'(0)u_k^-(t-\tau),$$

则有 $\quad u_j^+(t)\geqslant u_j^-(t),\qquad t\geqslant 0,\ j\in\mathbf{Z}.$

另外,当对于任意的 $\theta\in[-\tau,0]$, $j\in\mathbf{Z}$ 有 $\varphi_j(\theta)=\varphi_{j+N}(\theta)$ 时,考虑初值问题(4)在 $\mathbf{0}$ 处线性化后得到的特征值问题:

$$\begin{cases}\lambda\nu_j=\Delta[\nu_j]+\partial_1 f_j(0,0)\nu_j+\partial_2 f_j(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k'(0)\nu_k,\\ \nu_{j+N}=\nu_j,\end{cases}\quad j\in\mathbf{Z}.\tag{5}$$

可以确定特征值问题(5)主特征值的存在性及其符号.

引理 3 假设条件(H1)~(H4)成立,则系统(5)相应于严格正的特征函数 $\{\nu_j^*\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 存在一个主特征值 λ^*,其中 $\nu_{j+N}^*=\nu_j^*$, $j\in\mathbf{Z}$.而且对任意的 $\tau>0$ 有 $\lambda^*>0$.

为了满足后续定理的需要,再建立以下两个假定.

(H5)′ 以下条件中至少有一个成立:

(a) $S_j(\cdot)=S_0(\cdot)$, $j\in\mathbf{Z}$;

(b) $J(0)=1$, $J(j)=0$, $j\neq 0$;

(c) $\partial_1 f_j(0,0)+\partial_2 f_j(0,0)J(0)S_j'(0)>0$, $j\in\mathbf{Z}$.

(H6) $S_j(u)$ 是$[0,K]$上的凹函数,且对任意的 $p\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}$ 有

$$L_1\min\left\{K,\sum_{l=1}^{p}a_l\right\}+f_j\left(\min\left\{K,\sum_{l=1}^{p}a_l\right\},\min\left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(K),\sum_{l=1}^{p}b_l\right\}\right)\leqslant$$
$$\sum_{l=1}^{p}[L_1a_l+f_j(a_l,b_l)],$$

其中 $a_l\in[0,K]$, $b_l\in[0,S_K]$, L_1 和 S_k 分别是定义 1 和假设(H4)中所定义的常数.

引理 4 假设条件(H1)~(H5)和(H5)′成立.

(i) 对任意的 $c>c_*^+$, 系统(3)存在一个连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的右向波前解 $\Psi^+(\xi)=\{\psi_j^+(\xi)\}_{j\in\mathbf{Z}}$, $\xi=-j+ct$, 且对任意的 $\xi\in\mathbf{R}$, $j\in\mathbf{Z}$ 有$(\psi_j^+)'(\xi)>0$,

$$\lim_{\xi\to-\infty}\psi_j^+(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_1^+(c)\xi}=\nu_j(\mu_1^+(c)),\ \psi_j^+(\xi)\leqslant\mathrm{e}^{\mu_1^+(c)\xi}\nu_j(\mu_1^+(c)).$$

(ii) 对任意的 $c>c_*^-$,系统(3)存在一个连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的左向波前解 $\Psi^-(\xi)=\{\psi_j^-(\xi)\}_{j\in\mathbf{Z}}$, $\xi=j+ct$, 且对任意的 $\xi\in\mathbf{R}$, $j\in\mathbf{Z}$ 有$(\psi_j^-)'(\xi)>0$,

$$\lim_{\xi\to-\infty}\psi_j^-(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_1^-(c)\xi}=\nu_j(-\mu_1^-(c)),\ \psi_j^-(\xi)\leqslant\mathrm{e}^{\mu_1^-(c)\xi}\nu_j(-\mu_1^-(c)).$$

接下来,建立两个将在构造 front-like 整体解时用到的引理(引理 5、6).其中,引理 5 给出了系统(3)解的先验估计,引理 6 是关于系统(3)解的新的比较原理.

引理 5 假设条件(H1)~(H4)成立.令 $u(t;\varphi)=\{u_j(t;\varphi)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是初值问题(4)的解,其中初值函数 $\varphi=\{\varphi_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 满足 $\varphi_j\in C([-\tau,0],[0,K])$,于是存在不依赖于 φ 的正常数 M, 使得对所有的 $t>2\tau$, $j\in\mathbf{Z}$, 有

$$|u_j'(t;\varphi)|\leqslant M,\ |u_j''(t;\varphi)|\leqslant M.$$

引理 6 假设条件(H1)~(H4)和(H6)成立.令 $u_l(t)=\{u_{l,j}(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 和 $u(t)=\{u_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 分别是以 $u_{l,j}(s)=\varphi_{l,j}(s)$ 和 $u_j(s)=\varphi_j(s)$ 为初值的初值问题(4)的解,其中 $s\in[-\tau,0]$, $l=1,2,\cdots,p$, $p\in\mathbf{N}$, $j\in\mathbf{Z}$.若

$$\varphi_{l,j},\varphi_j \in C([-\tau,0],[0,K]),\ \varphi_j(s) \leqslant \min\left\{K,\sum_{l=1}^{p}\varphi_{l,j}(s)\right\},$$
$$s \in [-\tau,0],\ j \in \mathbf{Z},$$

则对任意的 $t \geqslant 0$, $j \in \mathbf{Z}$, 有

$$0 \leqslant u_j(t) \leqslant Z_j(t) := \min\left\{K,\sum_{l=1}^{p}u_{l,j}(t)\right\}.$$

证明 由引理 1 中(i)可知,对任意的 $t \geqslant 0, l = 1,2,\cdots,p$, $j \in \mathbf{Z}$ 有 $0 \leqslant u_{l,j}(t) \leqslant K$.再利用假设(H3)、(H4), 直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-w_jt}Z_j(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}F[Z](s,j) \leqslant \\
&\quad \mathrm{e}^{-w_jt}K + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}\left[w_jK + f_j\left(K,\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(K)\right)\right]\mathrm{d}s \leqslant \\
&\quad \mathrm{e}^{-w_jt}K + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}w_jK\mathrm{d}s \leqslant K, \qquad (j,t) \in \mathbf{Z}\times(0,\infty).
\end{aligned} \tag{6}$$

根据函数 $S_j(u)$ 在$[0,K]$上的凹性并利用数学归纳法,可得

$$\begin{aligned}
&S_j(\min\{K,\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_p\}) \leqslant \\
&\quad S_j(\sigma_1)+S_j(\sigma_2)+\cdots+S_j(\sigma_p), \qquad \sigma_i \in [0,K],\ i = 1,2,\cdots,p,\ j \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

因为对任意的 $u \in [0,K]$, $j \in \mathbf{Z}$ 有 $S_j'(u) \geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}
&S_j(\min\{K,\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_p\}) \leqslant \\
&\quad \min\{S_j(K),S_j(\sigma_1)+S_j(\sigma_2)+\cdots+S_j(\sigma_p)\}, \qquad j \in \mathbf{Z}.
\end{aligned} \tag{7}$$

于是, 由式(7)和假设(H6)可得

$$\begin{aligned}
&F[Z](t,j) := D_{j+1}Z_{j+1}(t) + D_jZ_{j-1}(t) + \\
&\quad L_1Z_j(t) + f_j\left(Z_j(t),\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(Z_k(t-\tau))\right) \leqslant \\
&\quad \sum_{l=1}^{p}[D_{j+1}u_{l,j+1}(t) + D_ju_{l,j-1}(t)] + \\
&\quad L_1\min\left\{K,\sum_{l=1}^{p}u_{l,j}(t)\right\} + f_j\left(\min\left\{K,\sum_{l=1}^{p}u_{l,j}(t)\right\},\right. \\
&\quad \left.\min\left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(K),\sum_{l=1}^{p}\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(u_{l,k}(t-\tau))\right\}\right) \leqslant \\
&\quad \sum_{l=1}^{p}\left[D_{j+1}u_{l,j+1}(t) + D_ju_{l,j-1}(t) + L_1u_{l,j}(t) + \right. \\
&\quad \left. f_j\left(u_{l,j}(t),\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k(u_{l,k}(t-\tau))\right)\right] = \\
&\quad \sum_{l=1}^{p}F[u_l](t,j).
\end{aligned}$$

另外

$$u_{l,j}(t) = \mathrm{e}^{-w_jt}u_{l,j}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}F[u_l](s,j)\mathrm{d}s, \qquad l = 1,2,\cdots,p,\ j \in \mathbf{Z}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-w_jt}Z_j(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}F[Z](s,j)\mathrm{d}s \leqslant \\
&\quad \sum_{l=1}^{p}\left\{\mathrm{e}^{-w_j(t)}u_{l,j}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)}F[u_l](s,j)\mathrm{d}s\right\} =
\end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{p} u_{l,j}(t), \qquad 0 < t < +\infty. \tag{8}$$

所以,由式(6)和(8)可以得到

$$Z_j(t) \geqslant \mathrm{e}^{-w_j t} Z_j(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-w_j(t-s)} F[Z](s,j)\mathrm{d}s, \qquad (j,t) \in \mathbf{Z} \times (0,\infty).$$

即 $Z(t)$ 是系统(3)的上解.注意到,对任意的 $s \in [-\tau,0]$, $j \in \mathbf{Z}$ 有 $u_j(s) = \varphi_j(s) \leqslant Z_j(s)$.于是,根据引理1中(ii)可知,$0 \leqslant u_j(t) \leqslant Z_j(t)$ 对所有的 $t \geqslant 0$, $j \in \mathbf{Z}$ 成立.证毕. □

2 Front-like 整体解的存在性

本节主要研究了系统(3)front-like 整体解的存在性.首先,建立了连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的空间周期解的存在性及其渐近行为;其次,将右向、左向波前解与空间周期解相融合,构造出 front-like 整体解;最后,给出整体解的一些定性性质.

定义 2 令 $N \in \mathbf{N}, \zeta, \zeta_0 \in R^N$.如果在任意的紧集 $S \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ 内,当 $\zeta \to \zeta_0$ 时,函数列 $U_{\zeta;j}(t)$ 与 $U'_{\zeta;j}(t)$ 分别一致收敛到 $U_{\zeta_0;j}(t)$ 与 $U'_{\zeta_0;j}(t)$,则称函数 $U_\zeta(t) = \{U_{\zeta;j}(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 在拓扑 ℸ 意义下收敛到 $U_{\zeta_0}(t) = \{U_{\zeta_0;j}(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$.

2.1 空间周期解的存在性

考虑系统(3)的连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的空间周期解:

$$\begin{cases} u'_j(t) = \Delta[u_j(t)] + f_j\left(u_j(t), \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} J(j-k) S_k(u_k(t-\tau))\right), & (j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}, \\ u_j(t) = u_{j-N}(t), & (j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}, \\ u_j(-\infty) = 0,\ u_j(+\infty) = \beta_j, & j \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

引理 7 假设条件(H1)~(H5)成立,则系统(3)存在一个空间周期解 $\Gamma(t) = \{\Gamma_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 满足

(i) $\Gamma_j(t) = \Gamma_{j-N}(t), (j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$;

(ii) $\Gamma_j(-\infty) = 0, \Gamma_j(+\infty) = \beta_j, j \in \mathbf{Z}$;

(iii) $\lim_{t\to-\infty} \Gamma_j(t)\mathrm{e}^{-\lambda^* t} = \nu_j^*, \Gamma'_j(t) > 0$ 以及 $\Gamma_j(t) \leqslant \mathrm{e}^{\lambda^* t}\nu_j^*, (j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$,其中 $\nu^* = \{\nu_j^*\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 和 λ^* 如引理3中所定义.

证明 类似于引理4(文献[2]中定理4.4)的证明,通过使用单调迭代技术以及上-下解方法即可证得结论,本文从略. □

2.2 整体解的存在性

令 $\psi^+_{c_1,j}(-j+c_1t)$ 和 $\psi^-_{c_2,j}(j+c_2t)$ 分别为系统(3)具有正的波速 $c_1 \geqslant c^+_*$ 和 $c_2 \geqslant c^-_*$ 的右向、左向波前解.对任意给定的 $m \in \mathbf{N}, h_1, h_2, h_3 \in \mathbf{R}$ 以及 $\chi_1, \chi_2, \chi \in \{0,1\}$ 满足 $\chi_1 + \chi_2 + \chi \geqslant 2$, 记

$$\varphi_j^m(\theta) := \max\{\chi_1\psi^+_{c_1,j}(-j+c_1\theta+h_1), \chi_2\psi^-_{c_2,j}(j+c_2\theta+h_2), \chi\Gamma_j(\theta+h_3)\},$$
$$\underline{u}_j(t) := \max\{\chi_1\psi^+_{c_1,j}(-j+c_1t+h_1), \chi_2\psi^-_{c_2,j}(j+c_2t+h_2), \chi\Gamma_j(t+h_3)\},$$

其中 $\theta \in [-m-\tau, -m]$, $t > -m$, $j \in \mathbf{Z}$.假设 $U^m(t) = \{U_j^m(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是以下初值问题的唯一解:

$$\begin{cases} u'_j(t) = \Delta[u_j(t)] + f_j\left(u_j(t), \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} J(j-k) S_k(u_k(t-\tau))\right), & t > 0,\ j \in \mathbf{Z}, \\ u_j(\theta) = \varphi_j^m(\theta), & \theta \in [-m-\tau, -m],\ t > -m,\ j \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{9}$$

于是,根据引理 1 可知, $\underline{u}_j(t) \leqslant U_j^m(t) \leqslant \beta_j$ 对所有的 $t > -m$, $j \in \mathbf{Z}$ 成立.为了得到 $U^m(t)$ 的上估计值,还需要建立假定

(H7) $S_j'(u) \leqslant S_j'(0)$, $\partial_i f_j(u,v) \leqslant \partial_i f_j(0,0)$, $u \in [0,K]$, $v \in [0,S_K]$, $j \in \mathbf{Z}$, $i = 1,2$.

为了表述方便,引入以下几个记号:

$$\Pi(j,t) := \chi_1 \psi_{c_1,j}^{+}(-j + c_1 t + h_1) + \chi_2 \psi_{c_2,j}^{-}(j + c_2 t + h_2) + \chi \Gamma_j(t + h_3),$$

$$\Pi_1(j,t) := \chi_1 \psi_{c_1,j}^{+}(-j + c_1 t + h_1) + \chi_2 \mathrm{e}^{\mu_1^-(c_2)(j+c_2t+h_2)} \nu_j(-\mu_1^-(c_2)) + \chi \mathrm{e}^{\lambda^*(t+h_3)} \nu_j^*,$$

$$\Pi_2(j,t) := \chi_1 \mathrm{e}^{\mu_1^+(c_1)(-j+c_1t+h_1)} \nu_j(\mu_1^+(c_1)) + \chi_2 \psi_{c_2,j}^{-}(j + c_2 t + h_2) + \chi \mathrm{e}^{\lambda^*(t+h_3)} \nu_j^*,$$

$$\begin{aligned}\Pi_3(j,t) := {} & \chi_1 \mathrm{e}^{\mu_1^+(c_1)(-j+c_1t+h_1)} \nu_j(\mu_1^+(c_1)) + \\ & \chi_2 \mathrm{e}^{\mu_1^-(c_2)(j+c_2t+h_2)} \nu_j(-\mu_1^-(c_2)) + \chi \Gamma_j(t + h_3),\end{aligned}$$

$$U_j^+(t) := \min\{\beta_j, \Pi(j,t)\},\ \tilde{U}_j(t) := \min\{\beta_j, \Pi_1(j,t), \Pi_2(j,t), \Pi_3(j,t)\}.$$

引理 8 假设条件(H1)~(H5)和(H5)′成立, $U^m(t)$ 是初值问题(9)的解,则当假设(H6)成立时, $U_j^m(t) \leqslant U_j^+(t)$, $(j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$;当 $c_1 > c_*^+$, $c_2 > c_*^-$ 且假设(H7)成立时, $U_j^m(t) \leqslant \tilde{U}_j(t)$, $(j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$.

证明 结论的第一部分可以由引理 6 直接得到.下面证明结论的第二部分.注意到 $U_j^m(t) \leqslant \beta_j$,则只需要证明对于任意的 $t \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}$, $i = 1,2,3$ 有 $U_j^m(t) \leqslant \Pi_i(j,t)$.

定义函数 $Z^m(t) = \{Z_j^m(t)\}_{j \in \mathbf{Z}}$, 其中

$$Z_j^m(t) := U_j^m(t) - \chi_1 \psi_{c_1,j}^{+}(-j + c_1 t + h_1), \qquad (j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R},$$

则对任意的 $t \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}$ 有 $0 \leqslant Z_j^m(t) \leqslant \beta_j$.利用假设(H7)可得

$$\begin{aligned}(Z_j^m)'(t) = {} & \Delta[Z_j^m(t)] + f_j\left(U_j^m(t), \sum_{k \in \mathbf{Z}} J(j-k) S_k(U_k{}^m(t-\tau))\right) - \\ & f_j\left(\chi_1 \psi_{c_1,j}^{+}(-j + c_1 t + h_1), \sum_{k \in \mathbf{Z}} J(j-k) S_k(\chi_1 \psi_{c_1,k}^{+}(-k + c_1(t-\tau) + h_1))\right) \leqslant \\ & \Delta[Z_j^m(t)] + \partial_1 f_j(0,0) Z_j^m(t) + \partial_2 f_j(0,0) \sum_{k \in \mathbf{Z}} J(j-k) S_k'(0) Z_k^m(t-\tau)\end{aligned}$$

对所有的 $t > -m$, $j \in \mathbf{Z}$ 成立.再定义函数 $V(t) = \{V_j(t)\}_{j \in \mathbf{Z}}$, 其中

$$V_j(t) := \chi_2 \mathrm{e}^{\mu_1^-(c_2)(j+c_2t+h_2)} \nu_j(-\mu_1^-(c_2)) + \chi \mathrm{e}^{\lambda^*(t+h_3)} \nu_j^*, \qquad (j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}.$$

直接计算,可知函数 $V_j(t)$ 满足线性方程

$$V_j'(t) = \Delta[V_j(t)] + \partial_1 f_j(0,0) V_j(t) + \partial_2 f_j(0,0) \sum_{k \in \mathbf{Z}} J(j-k) S_k'(0) V_k(t-\tau),$$
$$t > -m,\ j \in \mathbf{Z}.$$

另一方面,由引理 4 和引理 7 可得

$$\begin{aligned}Z_j^m(s) = {} & \varphi_j^m(s) - \chi_1 \psi_{c_1,j}^{+}(-j + c_1 s + h_1) \leqslant \\ & \chi_2 \psi_{c_2,j}^{-}(j + c_2 s + h_2) + \chi \Gamma_j(s + h_3) \leqslant \\ & \chi_2 \mathrm{e}^{\mu_1^-(c_2)(j+c_2s+h_2)} \nu_j(-\mu_1^-(c_2)) + \chi \mathrm{e}^{\lambda^*(s+h_3)} \nu_j^* = V_j(s),\end{aligned}$$
$$s \in [-m-\tau, -m],\ j \in \mathbf{Z}.$$

因此, 再根据引理 2 可知, $Z_j^m(t) \leqslant V_j(t)$, $(j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$.即 $U_j^m(t) \leqslant \Pi_1(j,t)$ 对所有的 $t \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}$ 成立.类似地,可以证明 $U_j^m(t) \leqslant \Pi_i(j,t)$, $i = 2,3$, $(j,t) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$.证毕. □

下面给出系统(3)整体解的存在性结论.

定理 1 假设条件(H1)~(H5)和(H5)′成立.任意给定 $c_1 \geqslant c_*^+$, $c_2 \geqslant c_*^-$, $h_1, h_2, h_3 \in \mathbf{R}$ 以及 $\chi_1, \chi_2, \chi \in \{0,1\}$ 满足 $\chi_1 + \chi_2 + \chi \geqslant 2$,则系统(3)存在整体解 $U_\zeta(t) = \{U_{\zeta;j}\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 满足 $\underline{u}_j(t)$

$\leqslant U_{\zeta;j}(t) \leqslant \beta_j,(j,t) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{R}$,其中 $\zeta=\zeta_{\chi_1,\chi_2,\chi}:=(\chi_1c_1,\chi_1h_1,\chi_2c_2,\chi_2h_2,\chi h_3)$.另外,

(i) 当假设(H6)成立时,$U_{\zeta;j}(t)\leqslant U_j^+(t),(j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$;

(ii) 当 $c_1>c_*^+,c_2>c_*^-$ 且假设(H7)成立时,$U_{\zeta;j}(t)\leqslant \tilde{U}_j(t),(j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$.

证明 由于 $U^m(t)$ 是初值问题(9)的解,再结合引理 1,可得

$$\underline{u}_j(t)\leqslant U_j^m(t)\leqslant U_j^{m+1}(t)\leqslant\beta_j,\qquad t>-m,\ j\in\mathbf{Z}.$$

根据解的先验估计式(引理 5)和对角化方法,可知函数列 $\{U^m(t)\}_{m\in\mathbf{N}}$ 存在子列 $\{U^{m_l}(t)\}_{l\in\mathbf{N}}$,使得当 $l\to+\infty$ 时,$U^{m_l}(t)$ 在拓扑 $\mho$ 意义下收敛到函数 $U_\zeta(t)=\{U_{\zeta;j}(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$.因为对任意的 $t>-m$,有 $U^m(t)\leqslant U^{m+1}(t)$.于是有

$$\lim_{m\to+\infty}U_j^m(t)=U_{\zeta;j}(t),\qquad (j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}.$$

根据极限函数的唯一性,当 $m\to+\infty$ 时,$U^m(t)$ 在拓扑 $\mho$ 意义下收敛到函数 $U_\zeta(t)$.易见,$U_\zeta(t)$ 是系统(3)的整体解.故,再由引理 8 可以得到定理 1 的结论(i)、(ii).证毕. □

2.3 整体解的定性性质

在这一小节中,将研究整体解的定性性质.如单调性、函数 $U_\zeta(t)$ 分别关于变量 j,t 和参数 h_1,h_2,h_3 的极限等.

对任意的 $N\in\mathbf{Z},\gamma\in\mathbf{R}$ 定义区域 $T_{N,\gamma}^i(i=1,2,\cdots,6)$ 如下:

$$T_{N,\gamma}^1:=(-\infty,N]\times[\gamma,\infty),\ T_{N,\gamma}^2:=[N,\infty)\times[\gamma,\infty),\ T_{N,\gamma}^3:=\mathbf{Z}\times[\gamma,\infty),$$

$$T_{N,\gamma}^4:=[N,\infty)\times(-\infty,\gamma],\ T_{N,\gamma}^5:=(-\infty,N]\times(-\infty,\gamma],\ T_{N,\gamma}^6:=\mathbf{Z}\times(-\infty,\gamma].$$

定理 2 假设定理 1 中的所有条件都成立.令 $U_\zeta(t)=\{U_{\zeta;j}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 为定理 1 中所定义的系统(3)的整体解,则有

(i) $0<U_{\zeta;j}(t)<\beta_j,\ U'_{\zeta;j}(t)>0,\ (j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$.

(ii) 对于任意的 $M\in\mathbf{N}$,

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{j\in\mathbf{Z}}|U_{\zeta_{\chi_1,\chi_2,1};j}(t)-\beta_j|=0,\ \lim_{t\to+\infty}\sup_{|j|\leqslant M}|U_{\zeta_{\chi_1,\chi_2,0};j}(t)-\beta_j|=0.$$

(iii) 对于任意的 $a\in\mathbf{R}$,当 $\chi_1=1$ 时,$\lim_{j\to-\infty}\sup_{t\geqslant a}|U_{\zeta;j}(t)-\beta_j|=0$;当 $\chi_2=1$ 时,$\lim_{j\to+\infty}\sup_{t\geqslant a}|U_{\zeta;j}(t)-\beta_j|=0$.

(iv) 假设条件(H6)成立或者 $c_1>c_*^+,c_2>c_*^-$ 且条件(H7)成立,则

$$\lim_{t\to-\infty}\sup_{j\geqslant0}|U_{\zeta_{\chi_1,1,\chi};j}(t)-\psi_{c_2,j}^-(j+c_2t+h_2)|=0,$$

$$\lim_{t\to-\infty}\sup_{j\leqslant0}|U_{\zeta_{1,\chi_2,\chi};j}(t)-\psi_{c_1,j}^+(-j+c_1t+h_1)|=0,$$

$$\lim_{t\to-\infty}\sup_{j\in[M_1,M_2]}|U_{\zeta;j}(t)|=0,\qquad M_1<M_2\in\mathbf{N}.$$

(v) 对任意的 $t\in\mathbf{R},\ j\in\mathbf{Z},\ U_{\zeta;j}(t)$ 为关于 $h_l(l=1,2,3)$ 单调递增的函数.

(vi) 对任意的 $N\in\mathbf{Z},\gamma\in\mathbf{R}$,当 $h_l\to+\infty(l=1,2,3)$ 时,$U_{\zeta;j}(t)$ 在拓扑 $\mho$ 意义下和在$(j,t)\in T_{N,\gamma}^l$ 上一致收敛到 β_j.

(vii) 如果 $c_1>c_*^+,c_2>c_*^-$ 且条件(H7)成立,则存在 $D_j\geqslant C_j>0(j\in\mathbf{Z})$ 使得

$$C_je^{\lambda_0t}\leqslant U_{\zeta;j}(t)\leqslant D_je^{\lambda_0t},\qquad t\ll-1,$$

其中 $\lambda_0:=\min\{\chi_1c_1\mu_1^+(c_1),\chi_2c_2\mu_1^-(c_2),\chi\lambda^*\}$.

证明 利用已有结论易证性质(i)~(vi),本文从略.下证性质(vii).

根据假设条件以及定理 1,可得

$$\underline{u}_j(t)\leqslant U_{\zeta_{\chi_1,\chi_2,\chi}}(j,t)\leqslant\chi_1e^{\mu_1^+(c_1)(-j+c_1t+h_1)}\nu_j(\mu_1^+(c_1))+$$

$$\chi_2 e^{\mu_1^-(c_2)(j+c_2t+h_2)}\nu_j(-\mu_1^-(c_2)) + \chi e^{\lambda^*(t+h_3)}\nu_j^* .$$

于是,再由波前解和空间周期解的渐近行为(引理 4 和引理 7)可知性质(vii)成立.证毕. □

注 1 从上述定理 2 中的性质(ii)与性质(iv)可以看出,整体解类似于一个从 j 轴左侧(右侧)传播的左(右)向波前解,或者当 $t\to-\infty$ 时,从 j 轴两侧传播的左向波前解与右向波前解,并且当 $t\to+\infty$ 时,收敛到唯一的正平衡态 $\boldsymbol{\beta}$.从生物学的角度来看,上述结论提供了一些新的物种入侵方式.

此外,还有如下的性质.

定理 3 假设定理 1 中的所有条件以及假设(H7)成立.设 $c_1>c_*^+$,$c_2>c_*^-$,则有

(i) 对任意的 $N\in\mathbf{Z},\gamma\in\mathbf{R}$,

$$U_{\zeta_{1,1,1}}(t)\to\begin{cases}U_{\zeta_{0,1,1}}(t), & h_1\to-\infty,\\ U_{\zeta_{1,0,1}}(t), & h_2\to-\infty,\\ U_{\zeta_{1,1,0}}(t), & h_3\to-\infty.\end{cases}$$

当 $h_i\to-\infty\ (i=1,2,3)$ 时,以上收敛是指在拓扑 $\mathcal{T}$ 意义下和在 $(j,t)\in T_{N,\gamma}^{i+3}$ 上一致收敛.

(ii) 对任意的 $N\in\mathbf{Z},\gamma\in\mathbf{R}$,

$$U_{\zeta_{0,1,1}}(t)\to\begin{cases}\Gamma_j(t+h_3), & h_2\to-\infty,\\ \psi_{c_2,j}^-(j+c_2t+h_2), & h_3\to-\infty.\end{cases}$$

当 $h_i\to-\infty\ (i=2,3)$ 时,以上收敛是指在拓扑 $\mathcal{T}$ 意义下和在 $(j,t)\in T_{N,\gamma}^{i+3}$ 上一致收敛.

(iii) 对任意的 $N\in\mathbf{Z},\gamma\in\mathbf{R}$,

$$U_{\zeta_{1,0,1}}(t)\to\begin{cases}\Gamma_j(t+h_3), & h_1\to-\infty,\\ \psi_{c_1,j}^+(-j+c_1t+h_1), & h_3\to-\infty.\end{cases}$$

当 $h_i\to-\infty\ (i=1,3)$ 时,以上收敛是指在拓扑 $\mathcal{T}$ 意义下和在 $(j,t)\in T_{N,\gamma}^{i+3}$ 上一致收敛.

(iv) 对任意的 $N\in\mathbf{Z},\gamma\in\mathbf{R}$,

$$U_{\zeta_{1,1,0}}(t)\to\begin{cases}\psi_{c_2,j}^-(j+c_2t+h_2), & h_1\to-\infty,\\ \psi_{c_1,j}^+(-j+c_1t+h_1), & h_2\to-\infty.\end{cases}$$

当 $h_i\to-\infty\ (i=1,2)$ 时,以上收敛是指在拓扑 $\mathcal{T}$ 意义下和在 $(j,t)\in T_{N,\gamma}^{i+3}$ 上一致收敛.

(v) 对任意的 $h_1,h_2,h_1^*,h_2^*\in\mathbf{R}$,存在依赖于 $c_1,c_2,h_1,h_2,h_1^*,h_2^*$ 的点 $(j_0,t_0)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$,使得 $U_{\zeta_{1,1,0};j}(t)=U^*_{\zeta_{1,1,0};j+j_0}(t+t_0)$ 对所有的 $(j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$ 成立,当且仅当

$$\frac{c_1(h_2-h_2^*)-c_2(h_1-h_1^*)}{c_2+c_1}\in\mathbf{Z},$$

其中 $\zeta_{1,1,0}^*=(c_1,h_1^*,c_2,h_2^*,0)$.

证明 (i) 以第三种情况为例进行证明,其他两种情况可类似证得.已知 $U^m(t)$ 是初值问题(9)的唯一解.当$(\chi_1,\chi_2,\chi)=(1,1,1)$时,分别用 $\varphi^m_{\zeta_{1,1,1};j}$ 和 $U^m_{\zeta_{1,1,1};j}(t)$ 表示 φ^m_j 和 $U^m_j(t)$;当$(\chi_1,\chi_2,\chi)=(1,1,0)$时,分别用 $\varphi^m_{\zeta_{1,1,0};j}$ 和 $U^m_{\zeta_{1,1,0};j}(t)$ 表示 φ^m_j 和 $U^m_j(t)$.令

$$Z_j^m(t):=U^m_{\zeta_{1,1,1};j}(t)-U^m_{\zeta_{1,1,0};j}(t),\qquad (j,t)\in\mathbf{Z}\times(-m,+\infty).$$

显然,对任意的 $t>-m$,$j\in\mathbf{Z}$,有 $0\leqslant Z_j^m(t)\leqslant K$.再根据假设(H7)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z_j^m(t)\leqslant\Delta[Z_j^m(t)]+\partial_1 f_j(0,0)Z_j^m(t)+\\ \qquad\partial_2 f_j(0,0)\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k'(0)Z_k^m(t)(t-\tau), & j\in\mathbf{Z}.\\ Z_j^m(\theta)=\varphi_{\zeta_{1,1,1};j}^m(\theta)-\varphi_{\zeta_{1,1,0};j}^m(\theta), \quad t>-m,\ \theta\in[-\tau,0],\end{cases}$$

记 $\hat{Z}_j(t):=\mathrm{e}^{\lambda^*(t+h_3)}\nu_j^*$，$(j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$. 于是，由引理 7 可知

$$Z_j^m(\theta)=\varphi_{\zeta_{1,1,1};j}^m(\theta)-\varphi_{\zeta_{1,1,0};j}^m(\theta)\leqslant$$
$$\Gamma_j(\theta+h_3)\leqslant\mathrm{e}^{\lambda^*(\theta+h_3)}\nu_j^*=\hat{Z}_j(\theta), \qquad (j,\theta)\in\mathbf{Z}\times[-\tau,0].$$

而且 $\hat{Z}_j(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{Z}_j(t)=\Delta[\hat{Z}_j(t)]+\partial_1 f_j(0,0)\hat{Z}_j(t)+$$
$$\partial_2 f_j(0,0)\sum_{k\in\mathbf{Z}}J(j-k)S_k'(0)\hat{Z}_k(t)(t-\tau).$$

因此，再根据引理 2 可得

$$0\leqslant Z_j^m(t)=U_{\zeta_{1,1,1};j}^m(t)-U_{\zeta_{1,1,0};j}^m(t)\leqslant$$
$$\hat{Z}_j(t)=\mathrm{e}^{\lambda^*(t+h_3)}\nu_j^*, \qquad (j,t)\in\mathbf{Z}\times[-m,+\infty).$$

因为 $\lim_{m\to\infty}U_{\zeta_{1,1,\chi};j}^m(t)=U_{\zeta_{1,1,\chi};j}(t)$，则

$$0\leqslant U_{\zeta_{1,1,1};j}(t)-U_{\zeta_{1,1,0};j}(t)\leqslant\mathrm{e}^{\lambda^*(t+h_3)}\nu_j^*, \qquad (j,t)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{R}.$$

这说明对任意的 $N\in\mathbf{Z}$，$\gamma\in\mathbf{R}$，当 $h_3\to-\infty$ 时，$U_{\zeta_{1,1,1};j}(t)$ 在 $(j,t)\in T_{N,\gamma}^6$ 上一致收敛到 $U_{\zeta_{1,1,0};j}(t)$. 于是，对任意序列 h_3^l 满足 $\lim_{l\to+\infty}h_3^l=-\infty$，函数列 $U_{\zeta_{1,1,1}}^l(t)$（这里，$\zeta_{1,1,1}^l(t):=(c_1,h_1,c_2,h_2,h_3^l)$）在拓扑 $\mathcal{T}$ 意义下收敛到系统(3)的一个解（通过抽取某个子列），即 $U_{\zeta_{1,1,0}}(t)$. 由于极限函数不依赖于序列 h_3^l 的选取，于是当 $h_3\to-\infty$ 时，函数列 $U_{\zeta_{1,1,1}}(t)$ 在拓扑 $\mathcal{T}$ 意义下收敛到 $U_{\zeta_{1,1,0}}(t)$. 即性质 (i) 成立. 类似地可证得性质 (ii) ~ (iv)，类似于文献[15] 中定理 2.4(vii) 的证明，可知性质 (v) 成立，本文从略. 证毕. □

3　总　　结

本文研究单个物种在周期性斑块环境下成熟种群增长模型的 front-like 整体解，是对 Wu 和 Hsu[2] 关于该模型空间动力学研究的进一步延伸. 本文主要通过混合不同方向的波前解与连接 $\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的空间周期解来构造 *front-like* 整体解. 首先，利用单调迭代技术并结合上 - 下解方法得到系统(3) 的空间周期解的存在性以及左向和右向波前解的渐近行为. 进而，基于系统(3) 建立的各种比较原理以及相关的线性系统，可以得到整体解的存在性和一些定性性质. 根据这些性质可以看出，这类整体解类似于从 j 轴左侧（右侧）传播的左（右）向波前解，或者当 $t\to-\infty$ 时从 j 轴两侧传播的左向波前解和右向波前解，而且当 $t\to+\infty$ 时收敛到唯一的正平衡态 $\boldsymbol{\beta}$. 从生物学的角度来看，这为我们提供了一些新的物种入侵方式.

参考文献（References）：

[1] WENG P X, HUANG H X, WU J H. Asymptotic speed of propagation of wave fronts in a lattice delay differential equation with global interaction[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2003, **68**(4): 409-439.

[2] WU S L, HSU C H. Propagation of monostable traveling fronts in discrete periodic media with

delay[J]. *Discrete Continuous Dynamic System*, 2018, **38**(6): 3025-3060.

[3] EI S I. The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2002, **14**(1):85-137.

[4] EI S I, MIMURA M, NAGAYAMA M. Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2002, **165**(3): 176-198.

[5] KAWAHARA T, TANAKA M. Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation[J]. *Physics Letters A*, 1983, **97**(8): 311-314.

[6] GUO J S, MORITA Y. Entire solutions of reaction-diffusion equations and an application to discrete diffusive equations[J]. *Discrete Continuous Dynamic System*, 2005, **12**(2): 193-212.

[7] HAMEL F, NADIRASHVILI N. Entire solutions of the KPP equation[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1999, **52**(10): 1255-1276.

[8] HAMEL F, NADIRASHVILI N. Travelling fronts and entire solutions of the Fisher-KPP equation in R^N[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2001, **157**(2): 91-163.

[9] LI W T, LIU N W, WANG Z C. Entire solutions in reaction-advection-diffusion equations in cylinders[J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 2008, **90**(5): 492-504.

[10] LIU N W, LI W T AND WANG Z C. Entire solutions of reaction-advection-diffusion equations with bistable nonlinearity in cylinders[J]. *Journal of Differential Equations*, 2009, **246**(11): 4249-4267.

[11] MORITA Y, NINOMIYA H. Entire solutions with merging fronts to reaction-diffusion equations [J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2006, **18**(4): 841-861.

[12] LI W T, WANG Z C, WU J H. Entire solutions in monostable reaction-diffusion equations with delayed nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2008, **245**(1): 102-129.

[13] WANG Z C, LI W T, RUAN S G. Entire solutions in bistable reaction-diffusion equations with nonlocal delayed nonlinearity[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2009, **361**(4): 2047-2084.

[14] WANG Z C, LI W T, WU J H. Entire solutions in delayed lattice differential equations with monostable nonlinearity[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2009, **40**(6): 2392-2420.

[15] WANG Z C, LI W T, RUAN S G. Entire solutions in lattice delayed differential equations with nonlocal interaction: bistable case[J]. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2013, **8**(3): 78-103.

[16] SUN Y J, LI W T, WANG Z C. Entire solutions in nonlocal dispersal equations with bistable nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **251**(3): 551-581.

[17] WU S L, HSU C H. Entire solutions of nonlinear cellular neural networks with distributed time delays[J]. *Nonlinearity*, 2012, **25**(9): 1-17.

[18] MORITA Y, TACHIBANA K. An entire solution to the Lotka-Volterra competition-diffusion equations[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2009, **40**(6): 2217-2240.

[19] WANG M X, LÜ G Y. Entire solutions of a diffusive and competitive Lotka-Volterra type system with nonlocal delay[J]. *Nonlinearity*, 2010, **23**(7): 1609-1630.

[20] WU S L, WANG H Y. Front-like entire solutions for monostable reaction-diffusion systems[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2013, **25**(2): 505-533.

[21] WU S L, SHI Z X, YANG F Y. Entire solutions in periodic lattice dynamical systems[J]. *Journal of Differential Equations*, 2013, **255**(10): 3505-3535.

Front-Like Entire Solutions to Lattice Periodic Dynamic Systems With Delays and Global Interaction

XUE Xue

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*,
Xi' an 710071, *P.R.China*)

Abstract: The front-like entire solutions to lattice periodic dynamic systems with delays and global interaction were investigated. Through establishment of appropriate comparison theorems, some front-like entire solutions were constructed out of mixture of the traveling fronts with different directions of propagation and spatially periodic solutions connecting unstable equilibrium and stable equilibrium. Some properties of these entire solutions were also discussed. The front-like entire solutions, exhibiting new characteristic behaviors in the front dynamics, are different from the traveling fronts.

Key words: lattice periodic dynamic system; spatially periodic solution; front-like entire solution; comparison theorem

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11671315)