

# 平面应力状态断裂强度的椭圆准则分析\*

杜景峰, 吴强杰

(华北科技学院 土木工程系, 河北 三河 065201)

**摘要:** 简要分析了近年来提出的一个断裂准则——椭圆准则的基本特征,导出了它在主应力坐标系下的基本方程.根据所导出的基本方程,获得了平面应力条件下椭圆准则理论断裂强度曲线的完整描述关系,并分析讨论了破坏发生的方位及断裂形式与材料本征力学性质参数之间的联系.与既有理论结果及实验现象的对比解释了椭圆准则在材料相关参数确定方面的局限性.当应力状态相关材料特征参数在拉伸区和压缩区均作为常数时,获得了铸铁和混凝土平面应力状态下的断裂强度曲线.与相关实验数据的对比表明,它们在拉伸区能较好地吻合,但压缩区的差异十分显著,进一步证实了材料特征参数随应力状态变化规律对椭圆准则发展的必要性.

**关键词:** 断裂; 破坏判据; 平面应力; 椭圆准则

**中图分类号:** O346

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.400155

## 引言

载荷作用下材料和结构的破坏是一种相当普遍的现象,其也是一个十分重要的科学问题.为了满足工程技术发展的实际需要,有必要明确破坏的发生与外部载荷作用之间的定量关系.这类关系通常被称之为强度准则或破坏准则.相关研究领域所提出的一些经典破坏准则包括最大正应力准则、Tresca 准则(最大剪应力准则)、von Mises 准则(能量密度准则)、Mohr-Coulomb 准则和 Drucker-Prager 准则等.不过,它们对一些实验现象的解释仍存在一定的局限性<sup>[1-2]</sup>.Tresca 准则和 von Mises 准则只涉及一个材料参数,其理论的基本出发点与脆性材料破坏问题有本质性的区别,与实验测试结果对比表明,单参数准则过于简单,并不能较好地描述复杂应力状态下脆性材料的破坏特征;相比单参数形式,Mohr-Coulomb 准则和 Drucker-Prager 准则为具有更多一般性的双参数形式,尽管双参数模型可以对脆性材料的一些破坏模式做出合理解释,但是当静水压力较高时,它们的预测结果与实验观测结果存在较大的偏差.鉴于此,许多研究者提出了不同材料与结构以及不同载荷条件下其他形式的破坏准则<sup>[3]</sup>.

对于岩石、混凝土、铸铁以及金属玻璃等脆性材料,研究已经发现其拉伸和压缩强度存在显著的差异,Mohr-Coulomb 准则和 Drucker-Prager 准则尽管在某些方面可以较好地描述脆性材料的破坏,但一个简单的例子表明了它们的不恰当性.以铸铁为例,若 Drucker-Prager 准则应

\* 收稿日期: 2019-05-05; 修订日期: 2019-12-18

基金项目: 中央高校基本科研业务费(3142019050)

作者简介: 杜景峰(1994—),男,硕士生(通讯作者. E-mail: 292375306@qq.com).

引用格式: 杜景峰, 吴强杰. 平面应力状态断裂强度的椭圆准则分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(3): 292-301.

力条件为  $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma, \sigma_3 = 0$ , 表明铸铁等脆性材料在  $T/C \leq 1/3$  等轴压缩中可以支持无限大小的应力 ( $T$  和  $C$  是单轴拉伸和压缩强度), 这显然是不可能的; 同理, 在 Mohr-Coulomb 准则情况下, 应力条件为  $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma, \sigma_3 = -2\sigma$ , 表明在  $T/C \leq 1/2$  材料可承受无限压应力, 这种预测是不切实际的<sup>[4]</sup>. 针对这个问题, Zhang 和 Eckert 提出了一个称之为椭圆准则的强度判据<sup>[5]</sup>, 它的表述形式不同于上述经典强度准则, 却能综合这些准则的诸多特点. 虽然最初的工作仅局限于拉伸强度分析, 但引入一个外部载荷作用因子后, 它可以拓展到压缩变形状态<sup>[6-7]</sup>. 这个准则不仅描述形式极为简单, 而且可以在应变能密度概念上给出合理的解释<sup>[8]</sup>. 金属玻璃材料的破坏强度实验结果证实了椭圆准则良好的应用效果<sup>[6-10]</sup>.

然而, 有研究表明<sup>[11]</sup>, 椭圆准则所给出的断裂破坏角是只取决于材料性质的常数, 不符合复杂应力状态下破坏角应力三轴比影响的实验现象. 虽然椭圆准则已经获得了一些实际应用<sup>[12-13]</sup>, 但是它们都建立在必要的修正基础上, 表明了理论上对其展开进一步探讨的必要性. 在椭圆准则中, 材料固有特征参数和应力状态相关外参数的引入, 原则上已经较为全面地涵盖了材料破坏行为相关的影响因素. 不过, 应力状态相关外参数该如何确定尚未获得明确的解答, 这也是椭圆准则应用推广中不得不引入某些修正的原因所在.

综上所述, 本文就平面应力状态下椭圆准则的基本特征提出了理论分析, 给出了该准则的理论破坏强度曲线. 在此基础上, 结合铸铁和混凝土试件的实验测试数据, 分析讨论了应力状态相关材料参数对椭圆准则理论预测效果的影响.

## 1 椭圆准则

依据材料剪切破坏强度  $\tau_0$  和膨胀破坏强度  $\sigma_0$ , 可以定义其破坏行为相关的固有性质参数为

$$\alpha = \tau_0 / \sigma_0. \quad (1)$$

当外力作用导致材料破坏时, 破坏面上一点处的正应力  $\sigma_n$  和剪应力  $\tau_n$  应满足关系<sup>[4-5]</sup>:

$$\tau_n^2 + \alpha^2 \sigma_n^2 = \tau_0^2. \quad (2)$$

这个关系表示了  $\sigma$ - $\tau$  平面上的一条椭圆曲线, 因此它所给出的断裂强度判据被称为椭圆准则. 式(2)是椭圆准则最初的描述形式, 仅适用于拉伸断裂问题.

当破坏面上的正应力为压应力时, 该应力对裂纹形成和扩展具有抑制作用. 鉴于此, 引入一个与应力状态相关的参数  $\beta$ , 可以将式(2)修改为<sup>[6-7]</sup>

$$\tau_n^2 + \beta \alpha^2 \sigma_n^2 = \tau_0^2, \quad (3)$$

在拉伸应力状态下, 参数  $\beta$  为正; 在压缩应力状态下, 参数  $\beta$  为负. 于是, 椭圆准则被拓展到包含压缩断裂的一般情况.

材料纯剪破坏时, 其临界应变能密度可以表示为<sup>[8]</sup>

$$E_{s0} = \tau_0^2 / (2G), \quad (4)$$

式中,  $G$  为材料的剪切模量. 正断断裂时, 临界应变能密度为

$$E_{e0} = \sigma_0^2 / (2E), \quad (5)$$

式中,  $E$  为材料的弹性模量. 当破坏面一点处的剪应力为  $\tau_n$ , 它所对应的剪切应变能密度为

$$E_s = \tau_n^2 / (2G). \quad (6)$$

类似地, 破坏面上一点处正应力  $\sigma_n$  所对应的应变能密度为

$$E_c = \sigma_n^2 / (2E). \quad (7)$$

利用式(4)~(7),同时,考虑到式(1),有

$$\frac{E_s}{E_{s0}} + \beta \frac{E_c}{E_{c0}} = \frac{1}{\tau_0^2} (\tau_n^2 + \beta \alpha^2 \sigma_n^2). \quad (8)$$

如果用剪应力和正应力的应变能密度关于其破坏临界值的比进行线性组合,并作为断裂判定条件,可以看出,当它的取值为1时,式(8)给出了式(3)所示的强度准则.这个结果在应变能密度概念上对椭圆准则的物理意义做出了合理的解释.

在单向拉伸条件下,若拉伸破坏强度为 $\sigma_T$ ,拉伸破坏角(拉伸轴与破坏面之间的夹角)为 $\theta_T$ ,参数 $\beta$ 为 $\beta_T$ ,则破坏面一点处的应力分量应满足关系:

$$\sigma_n = \sigma_T \sin^2 \theta_T, \quad \tau_n = \sigma_T \sin \theta_T \cos \theta_T. \quad (9)$$

将式(9)代入式(3),有

$$\tau_0^2 = \sigma_T^2 \sin^2 \theta_T (\cos^2 \theta_T + \beta_T \alpha^2 \sin^2 \theta_T). \quad (10)$$

注意到,这里的破坏角 $\theta_T$ 是一个变量,它的真实值应使 $\tau_0^2$ 取得最大值.因此,有

$$\frac{\partial(\tau_0^2)}{\partial \theta_T} = \sigma_T^2 \sin(2\theta_T) [1 - 2(1 - \beta_T \alpha^2) \sin^2 \theta_T] = 0. \quad (11)$$

从式(11)解出破坏角 $\theta_T$ 为

$$\theta_T = \arcsin[1/\sqrt{2(1 - \beta_T \alpha^2)}], \quad (12)$$

将它代回式(10),可以得到

$$\sigma_T = 2\tau_0 \sqrt{1 - \beta_T \alpha^2}. \quad (13)$$

特别地,式(12)要求破坏角的正弦值必须小于1,即

$$\sqrt{2(1 - \beta_T \alpha^2)} \geq 1, \quad (14)$$

从这个关系可以进一步解出 $\beta_T \alpha^2 \leq 0.5$ .也就是说,当 $\beta_T \alpha^2 > 0.5$ 时,破坏角将保持在等于 $90^\circ$ 的极限状态.此时, $\sin \theta_T = 1$ ,由式(10)可以推知,拉伸破坏强度 $\sigma_T$ 应为

$$\sigma_T = \tau_0 / (\sqrt{\beta_T} \alpha). \quad (15)$$

这个结果合理解释了破坏角趋向于 $90^\circ$ 的拉伸正断实验现象.

与单向拉伸分析过程类似,可以得到单向压缩破坏角 $\theta_C$ 为

$$\theta_C = \arcsin[1/\sqrt{2(1 - \beta_C \alpha^2)}], \quad (16)$$

抗压强度 $\sigma_C$ 为

$$\sigma_C = 2\tau_0 \sqrt{1 - \beta_C \alpha^2}, \quad (17)$$

这里, $\beta_C$ 为单向压缩破坏时参数 $\beta$ 的取值.

当 $\beta_T = 1, \beta_C = -0.5$ 时,上述关系式给出了与文献[6-7]完全一致的结果.不过,这里对破坏角的描述选用了反正弦而非反余切函数.因为 $\beta_T$ 和 $\beta_C$ 分别取正值和负值,因此,式(12)给出的单向拉伸破坏角应大于 $45^\circ$ ,而式(16)给出的单向压缩破坏角小于 $45^\circ$ .当 $\alpha$ 异于0时,式(13)或(15)确定的抗拉强度 $\sigma_T$ 不同于式(17)的抗压强度 $\sigma_C$ ,表明了拉伸与压缩断裂行为的非对称性.更为一般地,拉伸破坏强度均低于压缩破坏强度.当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,式(12)和(16)给出的破坏角均为 $45^\circ$ .此时,椭圆准则转变为 Tresca 准则.

## 2 平面应力问题的椭圆准则描述

考虑到平面应力问题破坏判据完整描述的需要,下面将首先导出椭圆准则在主应力空间中的基本关系,然后给出平面应力问题的具体描述结果。

### 2.1 主应力空间的椭圆准则

在主应力分量  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) 构成的坐标系中,设破坏面上一点处的外法线方向余弦为  $\{l_1, l_2, l_3\}$ ,则该点处的法向应力  $\sigma_n$  和切应力  $\tau_n$  可以利用三个主应力分量  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\sigma_3$  表示为<sup>[14]</sup>

$$\sigma_n = l_1^2 \sigma_1 + l_2^2 \sigma_2 + l_3^2 \sigma_3, \quad (18)$$

$$\tau_n^2 = l_1^2 l_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + l_2^2 l_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + l_3^2 l_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2, \quad (19)$$

这里,法向余弦分量应满足条件

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1. \quad (20)$$

将它们代入破坏准则关系(3),适当整理后,有

$$\begin{aligned} \tau_0^2 = & l_1^2 (1 - l_1^2) (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + l_2^2 (1 - l_2^2) (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + Cl_1^2 l_2^2 + \\ & \beta \alpha^2 [(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_3]^2, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$C = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)^2. \quad (22)$$

在给定应力状态下,式(21)是一个关于方向余弦的函数关系式.真实的断裂应使这个函数取得最大值,它要求

$$\frac{\partial(\tau_0^2)}{\partial l_1} = \frac{\partial(\tau_0^2)}{\partial l_2} = 0. \quad (23)$$

当  $l_1 \neq 0$  时,将式(21)代入式(23),经过适当的数学推导,可以求解得到

$$l_1^2 = \frac{1}{2(1 - \beta \alpha^2)} \left( 1 + \frac{2\beta \alpha^2 \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right), \quad l_2^2 = 0. \quad (24)$$

将它们代回式(21),整理后得

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 4\beta \alpha^2 \sigma_1 \sigma_3 = 4(1 - \beta \alpha^2) \tau_0^2. \quad (25)$$

该式即为主应力坐标系下椭圆准则的基本方程.需要注意的是,这个表达式要求各主应力必须满足条件  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .如果这个条件不能满足,则需要将式中的应力分量依据其实际大小关系做相应的代换。

### 2.2 平面应力问题

不失一般性,将问题放在  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  平面内,即设  $\sigma_2 = 0$ .考虑到强度曲线关于等斜线  $\sigma_1 = \sigma_3$  的对称性,只须讨论  $\sigma_1 \geq \sigma_3$  的右半平面。

在两向拉伸应力区,即  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  平面第一象限中  $\sigma_1 \geq \sigma_3$  的部分,有  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 = 0$ .依据椭圆准则基本方程(25),对应力分量作代换  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_1, \sigma_2 \rightarrow \sigma_3, \sigma_3 \rightarrow \sigma_2 = 0$ ,得到该区域的强度曲线方程为

$$\sigma_1 = 2\sqrt{1 - \beta \alpha^2} \tau_0. \quad (26)$$

在拉压应力区,即  $\sigma_1$ - $\sigma_3$  平面第四象限,应力分量的大小关系为  $\sigma_1 \geq \sigma_2 = 0 \geq \sigma_3$ .它能够满足椭圆准则基本方程(25)所要求的前提条件.由于这个基本方程不包含应力分量  $\sigma_2$ ,因此,

该区域的强度曲线方程即为式(25)。

在两向压缩应力区,即  $\sigma_1-\sigma_3$  平面第三象限中  $\sigma_1 \geq \sigma_3$  的部分,应力分量满足关系  $\sigma_2 = 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$ 。由椭圆准则基本方程(25),作代换  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = 0, \sigma_2 \rightarrow \sigma_1, \sigma_3 \rightarrow \sigma_3$ , 得到该区域的强度曲线方程为

$$\sigma_3 = -2\sqrt{1-\beta\alpha^2}\tau_0. \quad (27)$$

式(25)~(27)分别确定了拉压应力区、两向拉伸应力区和两向压缩应力区的强度变化关系。一旦给定参数  $\alpha$  和  $\beta$  的值,便可以确定  $\sigma_1-\sigma_3$  平面的理论断裂强度曲线。

### 2.3 破坏面的方位及断裂形式

在两向拉伸应力状态下,由式(24)的第一式,各主应力分量作代换后,可以得到

$$l_1^2 = 0.5/(1-\beta\alpha^2), \quad (28)$$

这里,  $l_1$  表示了破裂面法线方向与主应力  $\sigma_1$  之间夹角的余弦值。显然,式(28)中  $l_1^2$  的值不应该大于1。要满足这一条件,必然要求  $\beta\alpha^2 \leq 0.5$ 。如果这个条件无法满足,  $l_1^2$  只能取它的极限值1,意味着两向拉伸破坏角  $\theta_1$  保持为  $90^\circ$ 。其从理论上给出了正断断裂发生的判定条件。虽然这一结果在单向拉伸破坏的特例分析中已有所说明,但这里得到的结果具有更为明确的一般性。当正断断裂条件得到满足时,可以直接从式(21)导出断裂判定条件为

$$\sigma_1 = \tau_0/(\sqrt{\beta}\alpha). \quad (29)$$

在两向压缩应力状态下,应力分量作必要的代换后,式(24)的第一式给出破坏面的方位应满足如下基本关系:

$$l_1^2 = 0.5(1-2\beta\alpha^2)/(1-\beta\alpha^2), \quad (30)$$

这里,  $l_1$  依旧表示破裂面法线方向与主应力  $\sigma_1$  之间夹角的余弦值。当  $\beta < 0$  时,  $l_1^2$  的值必然位于  $0.5 \sim 1$  之间。它表明两向压缩破坏角  $\theta_c$  (破坏面与最大压缩应力  $\sigma_3$  之间的夹角)小于  $45^\circ$ 。

在拉压应力状态下,破坏面法线方向与主应力  $\sigma_1$  之间夹角的余弦值  $l_1$  满足式(24)第一式所给出的基本关系。由于  $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$ , 因此,该关系式中的  $\sigma_3/(\sigma_1 - \sigma_3)$  为绝对值小于1的负数。在压缩区,有  $\beta < 0, l_1^2$  的值均小于1,不会出现正断断裂破坏现象。在  $\sigma_1 + \sigma_3$  大于0的拉伸区,若  $\beta\alpha^2 \leq 1$ , 式(24)第一式所给出的  $l_1^2$  必然大于1,此时的断裂为正断断裂形式。它满足式(29)所给出的断裂判据。

## 3 分析及讨论

从式(25)可以看出,椭圆准则没有考虑到中间主应力对断裂强度的影响。此外,强度曲线方程所涉及到的参数  $\beta$  该如何确定尚不明确。当参数  $\beta$  在拉伸区取1、在压缩区取-0.5时,可以获得图1所示的理论断裂强度曲线。图中的结果表明,压缩断裂强度与拉伸断裂强度的比值位于  $1 \sim 2\sqrt{2}$  之间。这个取值范围与压拉强度比接近于1的金属玻璃材料较为吻合<sup>[6-7]</sup>。但是,它与Griffith强度理论的预测结果<sup>[15-16]</sup>以及混凝土和铸铁等脆性材料的实验结果<sup>[17-19]</sup>相差很大,这也是椭圆准则推广应用有必要解决的基本问题。

### 3.1 椭圆准则基本特征

其实,椭圆准则的建立是以剪切破坏强度  $\tau_0$  和膨胀破坏强度  $\sigma_0$  这两个材料性质相关的参数为基础的。剪切破坏强度与膨胀破坏强度比值所定义的参数  $\alpha$  可以理解为,两种应力状态之

间材料强度性质的某种确定性联系.在金属玻璃材料拉伸断裂分析中,椭圆准则(式(2))较好地解释了该类材料拉伸压缩强度行为的非对称性.但是,目前还缺乏证据证实材料剪切强度和膨胀强度的比值  $\alpha$  作为不同应力状态下破坏判据联系的可靠性.

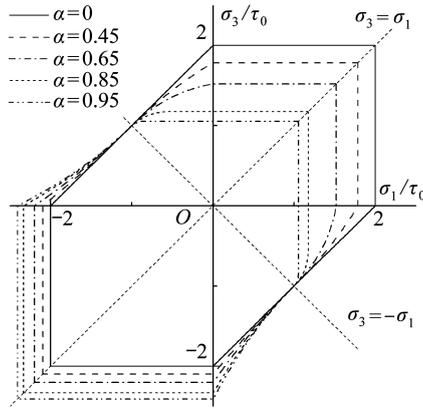


图1 平面应力状态下的理论断裂强度曲线

Fig. 1 Theoretical fracture loci in the plane stress state

引入参数  $\beta$  的初始目的在于实现椭圆准则从拉伸向压缩的拓展.但是,它也在一定程度上也弥补了参数  $\alpha$  度量不同应力状态下断裂强度与剪切破坏强度联系的不足.有研究表明<sup>[11]</sup>,参数  $\alpha$  与材料的 Poisson 比密切相关.如果注意到 Poisson 比与加载过程的相关性<sup>[19]</sup>,不难发现,参数  $\alpha$  的作用非常有限.要反映这种变化特征,只能通过参数  $\beta$  的变化予以调整.

### 3.2 应力状态和材料特性相关参数

值得注意的是,参数  $\alpha$  和  $\beta$  以乘积因子的形式出现,因此,可以将它们缩并为

$$m = \beta\alpha^2, \quad (31)$$

显然,  $m$  是一个应力状态和材料特性相关的因子.

引入参数  $m$  后,平面应力问题的断裂强度曲线方程可以归纳如下:

1) 在两向拉伸应力区 ( $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq 0$ ), 依据式(26)和(29),有

$$\sigma_1 = \begin{cases} 2\sqrt{1-m}\tau_0 & (m \leq 0.5), \\ \tau_0/m & (m > 0.5); \end{cases} \quad (32)$$

2) 在拉压区中的拉伸区 ( $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq -\tau_0$ ), 依据式(25)和(29),有

$$\sigma_1 = \begin{cases} (1-2m)\sigma_3 + 2\sqrt{(1-m)(\tau_0^2 - m\sigma_3^2)} & (m \leq 0.5), \\ \tau_0/\sqrt{m} & (m > 0.5); \end{cases} \quad (33)$$

3) 在拉压区中的压缩区 ( $\tau_0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$ ), 依据式(25),有

$$\sigma_3 = (1-2m)\sigma_1 - 2\sqrt{(1-m)(\tau_0^2 - m\sigma_1^2)}; \quad (34)$$

4) 在两向压缩区 ( $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$ ), 依据式(27),有

$$\sigma_3 = -2\sqrt{1-m}\tau_0. \quad (35)$$

在严格意义上,应力状态和材料特性相关因子  $m$  是一个可变参数.然而,它的变化规律尚不明确.沿用拉伸区和压缩区参数  $m$  的常数近似时,从方程(25)和(31),可以得到

$$m = 0.25[4\tau_0^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)^2]/(\tau_0^2 - \sigma_1\sigma_3). \quad (36)$$

在式(33)中,取 $\sigma_3 = 0$ ,可以得到单向拉伸强度 $\sigma_T$ ;同理在式(34)中,取 $\sigma_1 = 0$ ,可以得到单向压缩强度 $\sigma_C$ ,整理结果为

$$m_T = 1 - 0.25 (\tau_0/\sigma_T)^2, \quad (37)$$

$$m_C = 1 - 0.25 (\tau_0/\sigma_C)^2, \quad (38)$$

此时, $m_T$ 和 $m_C$ 分别作为拉伸区和压缩区参数 $m$ 的取值.当式(37)计算得到的 $m_T$ 大于0.5时,它表明实际断裂以正断形式发生,服从式(29)的断裂判据.因而,利用式(29)重新计算,且有

$$m_T = (\tau_0/\sigma_T)^2. \quad (39)$$

通过式(32)~(35)可以计算得到平面应力状态下完整的断裂强度曲线.

### 3.3 实验结果的对比分析

不同轴向拉伸(或轴向压缩)力和内压力(或外压力)组合条件下,铸铁薄壁管平面应力状态下破坏强度测试结果如图2所示(实验数据来自文献[19]).实验给出剪切强度、单向拉伸强度和单向压缩强度分别为146.7,169.3,569.2 MPa,由此计算确定 $m_T$ 和 $m_C$ .将它们分别作为拉伸和压缩应力区的参数 $m$ 值,应用式(32)~(35),计算得到其理论断裂强度曲线如图2所示.与实验数据结果进行对比,可以看出,在拉伸区二者大体吻合,但在压缩区却存在着十分明显的变化性态差异.

理论断裂强度曲线和观测数据的对比如图3所示(混凝土平面应力状态下破坏强度的实验数据来自文献[20]).理论计算中,单向压缩强度按混凝土材料的约定表示为 $f_c$ ,剪切强度取为 $0.092f_c$ ,单向拉伸强度为 $0.11f_c$ .可以看出,理论计算结果与实验数据之间的吻合情况及所存在的差异与图2所示铸铁的情况基本一致.

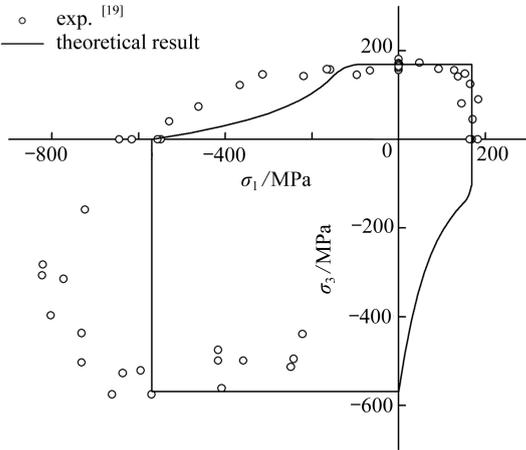


图2 平面应力状态下铸铁的断裂强度曲线

Fig. 2 Fracture loci of cast iron under the plane stress state

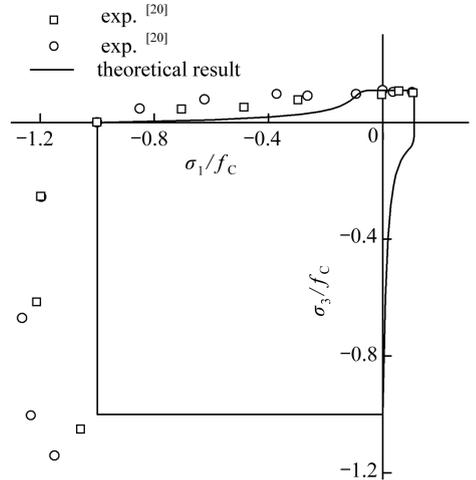


图3 平面应力状态下混凝土的断裂强度曲线

Fig. 3 Fracture loci of concrete under the plane stress state

上述观测数据的对比表明,当参数 $m$ 作常数近似时,椭圆准则的理论预测结果并不优于许多经验强度关系<sup>[17-18]</sup>.然而,理论与实验结果总体变化趋势良好的一致性仍表明了它的应用推广潜力.更为重要的是,断裂发生形式(正断或者剪切断裂)、断裂面方位以及各应力分量所满足的断裂判据可以建立在一个共同关系的基础上,这个特点较为符合断裂准则理论模型规

范化发展的需要。

要使观测数据与断裂强度判据式(32)~(35)计算结果实现最佳吻合,参数  $m$  必须取应力相关的函数。从椭圆准则的能量密度解释关系式(8)可以看出,  $m = \beta\alpha^2$  本质上构成了剪切应变能和体积应变能对断裂贡献的权系数。该系数与材料性质和应力状态的相关性应该是一个十分明显的事实。如果注意到应力状态对材料变形性质的影响,易于理解,这种相关性通过材料固有力学性质融于断裂准则模型的合理性。

## 4 结 论

椭圆准则可以合理描述材料拉伸与压缩断裂的非对称力学行为。它也能依据材料固有性质参数的变化区分剪切断裂和正断断裂两种不同类型的断裂形式。然而,针对这个准则的理论分析仍是一项有待完善的工作。鉴于此,本文以平面应力状态下的断裂强度为基本对象,就椭圆准则的基本特征及应用推广涉及到的主要问题提出了研究。

通过解析计算,本文陈述了椭圆准则用于单向拉伸和单向压缩的基本关系。在此基础上,推导了主应力坐标系下椭圆准则的基本方程。这个基本方程明确显示了椭圆准则没有考虑到中间主应力对断裂强度影响的事实。

本文依据主应力坐标系下椭圆准则的基本方程,给出了平面应力状态下断裂强度曲线的完整描述。该描述结果将断裂强度曲线分为4个不同的区域,分别为两向拉伸区、拉压组合拉伸区、拉压组合压缩区和两向压缩区,同时,可以对断裂发生的方位做出判定。随应力状态和材料性质相关参数的变化,它能明确判定正断与非正断两种断裂形式。

在椭圆准则中,如何确定强度曲线方程所涉及到的参数仍是其推广应用的基本问题。材料固有性质参数和外参数可以缩并,简化为一个应力状态和材料特性相关因子。采用单向拉伸和单向压缩强度测试结果,可以计算得到该因子对应的取值。将它们分别作为拉伸区和压缩区的值时,所获得的断裂强度理论计算结果表明,在拉伸区与铸铁和混凝土相关实验结果基本吻合,但在压缩区二者的差异十分明显。其进一步证实了椭圆准则涉及到应力状态和材料特性相关的参数,反映了材料断裂强度对变形性质的应力状态敏感性。

将应力状态和材料特性相关参数作常数近似,也可以获得与实验结果总体变化趋势一致的理论结果,表明了椭圆准则良好的应用推广潜力。此外,椭圆准则还具有将断裂发生形式(正断或者剪切断裂)、断裂面方位以及断裂判据融为一体的特点。

## 参考文献(References):

- [1] ALTENBACH H, BOLCHOUN A, KOLUPAEV V A. *Phenomenological Yield and Failure Criteria*[M]. Berlin: Springer, 2014.
- [2] ANDRIANOPOULOS N P, MANOLOPOULOS V M. Can Coulomb criterion be generalized in case of ductile materials? An application to Bridgman experiments[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, **54**(1): 241-248.
- [3] YU M H. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, **55**(3): 169-218.
- [4] CHRISTENSEN R M. *The Theory of Materials Failure*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2013.

- [5] ZHANG Z F, ECKERT J. Unified tensile fracture criterion[J]. *Physical Review Letters*, 2005, **94**(9): 094301.
- [6] QU R T, ZHANG Z F. A universal fracture criterion for high-strength materials[J]. *Scientific Reports*, 2013, **3**: 1117.
- [7] LIU Z Q, QU R T, ZHANG Z F. Elasticity dominates strength and failure in metallic glasses [J]. *Journal of Applied Physics*, 2015, **117**(1): 014901.
- [8] QU R T, ZHANG Z J, ZHANG P, et al. Generalized energy failure criterion[J]. *Scientific Reports*, 2016, **6**: 23359.
- [9] QU R T, ECKERT J, ZHANG Z F. Tensile fracture criterion of metallic glass[J]. *Journal of Applied Physics*, 2011, **109**(8): 083544.
- [10] LIU Z Q, WANG W H, JING M Q, et al. Intrinsic factor controlling the deformation and ductile-to-brittle transition of metallic glasses [J]. *Philosophical Magazine Letters*, 2014, **94**(10): 658-668.
- [11] YUAN Z, LI F, WANG R, et al. Influence of Poisson's ratio and stress triaxiality on fracture behavior based on elastic strain energy density[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, **74**: 96-108.
- [12] DING B, LI X. An eccentric ellipse failure criterion for amorphous materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(8): 081005.
- [13] CAO J, LI F, MA X, et al. A modified elliptical fracture criterion to predict fracture forming limit diagrams for sheet metals[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2018, **252**: 116-127.
- [14] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [15] GRIFFITH A A. The phenomena of rupture and flow in solids[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London(Series A)*, 1921, **221**: 163-198.
- [16] OROWAN E. Fracture and strength of solids[J]. *Reports on Progress in Physics*, 1949, **12**(1): 183-187.
- [17] 江见鲸, 冯乃谦. 混凝土力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1991. (JIANG Jianjing, FENG Naiqian. *Concrete Mechanics*[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1991. (in Chinese))
- [18] CORNET I, GRASSI R C. A study of theories of fracture under combined stresses[J]. *Journal of Basic Engineering*, 1961, **83**(1): 39-44.
- [19] MAIR W M. Fracture criteria for cast iron under biaxial stresses[J]. *Journal of Strain Analysis*, 1968, **3**(4): 254-263.
- [20] 沈聚敏, 王传志, 江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993. (SHEN Jumin, WANG Chuanzhi, JIANG Jianjing. *Finite Element Analysis and Plate Shell Limit Analysis of Reinforced Concrete*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993. (in Chinese))

# Fracture Strength Analysis of the Plane-Stress State by the Ellipse Criterion

DU Jingfeng, WU Qiangjie

(*Department of Civil Engineering, North China Institute of Science & Technology, Sanhe, Hebei 065201, P.R.China*)

**Abstract:** The features of the ellipse criterion for fracture mechanics was briefly analyzed, and the general equation of the criterion was derived in the principal stress coordinate system. According to this general equation, a complete description of the theoretical fracture loci was proposed for the fracture under the plane stress state, then a discussion by this criterion was presented about the relationship between the failure plane direction, the fracture pattern and the material intrinsic parameters of mechanical properties. The comparison with previous theoretical results and experimental phenomena explains the limitation of the ellipse criterion in the determination of material parameters. With material characteristic parameters associated with the stress state as 2 constants in the tension and the compression zones, the theoretical fracture loci were obtained for the cast iron and the concrete. The theoretical results coincide well with the related experimental data in the tension zone, but vastly differ in the compression zone. The work illustrates the necessity to reveal the relation between the material intrinsic parameters and the stress state for the development of the ellipse criterion.

**Key words:** fracture; failure criterion; plane stress; ellipse criterion