文章编号:1000-0887(2019)12-1364-09

多目标优化问题鲁棒有效解与真有效解之间的关系*

杨 铭, 李林廷, 高 英

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 在一定条件下研究了多目标优化问题鲁棒有效解与真有效解之间的关系及鲁棒有效解的最优性条件.首先,给出多目标优化问题鲁棒弱有效解的概念,研究它与鲁棒有效解和真有效解之间的关系,举例说明了相关结果的合理性.其次,在次类凸和伪凸性假设下研究了鲁棒有效解的必要性条件和充分性条件.

关 键 词: 多目标优化问题; 鲁棒有效解; 真有效解; 最优性条件

中图分类号: O221 **文献标志码:** A DOI:10.21656/1000-0887.400032

引 言

多目标优化问题就是向量极值问题,即在一定条件下极大化或极小化向量值函数.对于此类问题,如何定义最优解的概念是一个首要问题.在多目标优化问题中,向量空间没有全序关系,只有偏序关系,因此向量优化最优解与数值优化最优解有本质区别.1896 年,Pareto 首先提出多目标优化问题.1951 年,Koopmans[1]在生产和分配的活动中也提出了多目标最优化问题,他第一次提出 Pareto 有效解的概念.由于有效解的范围较大,在某些向量优化问题中不利于研究其性质,所以在有效解的基础上产生了真有效解.1951 年,Kuhn 和 Tucker[2]提出了 Kuhn-Tucker 真有效解的概念;1968 年,Geoffrion[3]在 Kuhn-Tucker 真有效解的基础上给出了 Geoffrion 真有效解的概念;1977 年,Borwein[4]利用切锥定义了 Borwein 真有效解;1979 年,Benson[5]利用投影锥给出了 Benson 真有效解的概念;1982 年,Henig[6]利用闭凸锥引进了 Henig 真有效解的概念.在这些解的概念的基础上,学者们开始研究它们的相关课题,如真有效解间的关系、解的等价性、最优性条件以及对偶理论.

最初研究的多目标优化问题基本是确定性的优化问题,但是,在实际问题中存在很多不确定的影响因素,这一现象引起了学者们的极大关注.鲁棒优化[7]是在内部结构和外部环境可能都不确定的情况下提出的一种新的优化方法,它的目的是求得一个解,对于可能出现的所有情况,约束条件均满足,并且使最坏情况下目标函数的函数值最优.鲁棒优化已成为解决不确定性问题的可行工具,许多学者在多目标优化问题鲁棒解的概念及性质的研究中取得了一些显

* **收稿日期:** 2019-01-14; **修订日期:** 2019-11-05
基金项目: 国家自然科学基金(11771064)
作者简介: 杨铭(1995—),女,硕士生(E-mail:yming72@163.com);
高英(1982—),女,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail:gaoyingimu@163.com).

著成果[8-11].2013 年,Georgiev 等[12]提出线性多目标优化问题的鲁棒有效解的概念,并得到了鲁棒有效解的充要条件; 2015 年,Zamani 等[13]证明了在约束集为紧性条件下,目标函数为凸函数时鲁棒有效解的充要条件; 2018 年,Morteza 等[14]研究了在一般锥序的情况下,加上紧性条件,每个范数鲁棒有效解都是 Henig 真有效解.

本文在一定条件下,研究多目标优化问题鲁棒有效解与真有效解的关系和鲁棒有效解的最优性条件,并给出具体例子加以说明.在第 1 节,给出了一些基本概念和结论.在第 2 节,首先研究了鲁棒有效解与真有效解的关系,然后研究了鲁棒有效解的最优性条件.在第 3 节,对本文内容进行了总结.

1　预 备 知 识

设 R^n 是 n 维 Euclid 空间, R^n_+ 是它的非负象限.对 R^n 中的非空子集 Ω, $\operatorname{int}\Omega$, $\operatorname{cl}\Omega$, $\operatorname{cone}\Omega$ 分别表示 Ω 的拓扑内部、拓扑闭包和锥包.

Ω 的正极锥和严格正极锥分别为

$$\Omega^+ = \{\boldsymbol{d} \in R^n: \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\rangle \geqslant 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\},$$

$$\Omega^{s+} = \{\boldsymbol{d} \in R^n: \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{d}\rangle > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\backslash\{\boldsymbol{0}\}\}.$$

对任意 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{cl}\Omega$, Ω 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的切锥和法锥分别定义为

$$T(\Omega,\bar{\boldsymbol{x}}) = \left\{\boldsymbol{d} \in R^n:\ \exists\{\boldsymbol{x}_i\} \subseteq \Omega,\ t_i \downarrow 0,\ \text{s.t.} \lim_{i\to\infty}\frac{\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}}}{t_i} = \boldsymbol{d}\right\},$$

$$N(\Omega,\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{d} \in R^n: \langle \boldsymbol{d},\boldsymbol{x}\rangle \leqslant 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in T(\Omega,\bar{\boldsymbol{x}})\}.$$

特别地,当 Ω 是凸集时,法锥的等价定义为

$$N(\Omega,\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{x}^* \in R^n: \langle \boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\rangle \leqslant 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\}.$$

对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^n$, 引进如下序关系:

$$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i < y_i,\qquad \forall i = 1,2,\cdots,n,$$

$$\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \leqq y_i,\qquad \forall i = 1,2,\cdots,n,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y},$$

$$\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \leqq y_i,\qquad \forall i = 1,2,\cdots,n.$$

考虑如下多目标优化问题:

$$(\mathrm{MOP})\quad \min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\qquad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

其中, $\Omega \subset R^n$ 为非空子集, $\boldsymbol{f}:\Omega \to R^p$, 且 $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量 $f_i, i \in P = \{1,2,\cdots,p\}$ 是局部 Lipschitz 函数.

定义 1[15]　设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$:

(i) 若不存在 $\boldsymbol{x} \in \Omega$,使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$, 则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的有效解.

(ii) 若不存在 $\boldsymbol{x} \in \Omega$,使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$, 则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的弱有效解.

(iii) 若 $T(\boldsymbol{f}(\Omega) + R^p_+,\ \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap (-R^p_+) = \{\boldsymbol{0}\}$, 则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的 Borwein 真有效解.

(iv) 若 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(\Omega) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + R^p_+) \cap (-R^p_+) = \{\boldsymbol{0}\}$, 则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的 Benson 真有效解.

(v) 若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的有效解,且存在 $M > 0$, 使得对任意的 $i \in P$ 和 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 满足 $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$, 总存在满足 $f_j(\boldsymbol{x}) > f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的 $j \in P$ 使得 $(f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) - f_i(\boldsymbol{x}))/(f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\bar{\boldsymbol{x}})) \leqslant M$, 则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的 Geoffrion-真有效解,简称为 G-真有效解.

2015 年,Zamani 等在文献[13]中给出了如下形式的鲁棒有效解:令 $\varepsilon > 0$, 记集合 $C(\varepsilon)$

$= \{ \boldsymbol{C} \in R^{p\times n} : \| \boldsymbol{C} \| < \varepsilon \}$，其中，$\| \boldsymbol{C} \| = (\sum_{i,j} |c_{ij}|^2)^{1/2}$，$\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$，$i \in P = \{1,2,\cdots,p\}$，$j \in N = \{1,2,\cdots,n\}$.

定义 2[13] 设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ 是(MOP)的有效解.若存在 $\varepsilon > 0$，对任意的 $\boldsymbol{C} \in C(\varepsilon)$，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 为如下问题的有效解：

$$\min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的鲁棒有效解.

定义 3[16] 设 Ω 为凸集，$\boldsymbol{f}:\Omega \to \mathbf{R}$.若对任意 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in \Omega$，$\lambda \in (0,1)$ 有 $\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) < \lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为 Ω 上的严格凸函数.

定义 4[16] 设 $\boldsymbol{f}:R^n \to \mathbf{R}$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ 是局部 Lipschitz 函数，$\boldsymbol{f}$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处沿方向 $\boldsymbol{v} \in R^n$ 的广义方向导数定义为

$$\boldsymbol{f}^{o}(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) = \limsup_{\boldsymbol{y}\to\bar{\boldsymbol{x}},\, t\downarrow 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{t},$$

$\boldsymbol{f}$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的 Clarke 次微分定义为

$$\partial\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{\xi} \in R^n : \boldsymbol{f}^{o}(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) \geqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v},\ \forall \boldsymbol{v} \in R^n\}.$$

定义 5[13] $\boldsymbol{f}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的下降方向的集合定义为

$$G(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{d} \in R^n : \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \leqslant 0,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\}.$$

文献[13]中，在一定条件下研究了鲁棒有效解和 G-真有效解的关系，利用切锥和次微分给出了鲁棒有效解的必要条件.

引理 1[13] 设 Ω 是紧集.若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 G-真有效解.

引理 2[13] 若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解，则 $T(\Omega,\bar{\boldsymbol{x}}) \cap G(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\mathbf{0}\}$.

定义 6[17] 称 $\boldsymbol{f}$ 在 Ω 上是次类凸的，如果存在 $\boldsymbol{\rho} \in -\operatorname{int} R^p_+$ 使得对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Omega$，$\lambda \in (0,1)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $z \in \Omega$ 满足

$$\lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \varepsilon\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{f}(z) \in R^p_+,$$

或等价定义为 $\boldsymbol{f}(\Omega) + \operatorname{int} R^p_+$ 是凸集.

注 1 根据文献[15]，Benson 真有效解与 G-真有效解等价.由文献[17]可知，当 $\boldsymbol{f}$ 为次类凸时，Borwein 真有效解与 Benson 真有效解等价.文献[18]中表明，次类凸不能减弱为次似凸或邻近次似凸，即 $\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(\Omega)) + \operatorname{int} R^p_+$ 凸或 $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(\boldsymbol{f}(\Omega) + R^p_+)$ 凸.

定义 7[19] 设 $\psi:\Omega \to \mathbf{R}$，如果对任意 $\boldsymbol{x} \in \Omega$，$\boldsymbol{\xi} \in \partial\psi(\bar{\boldsymbol{x}})$，总存在 $\boldsymbol{w} \in \Omega$ 使得

$$\langle \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{w} \rangle \geqslant 0 \Rightarrow \psi(\boldsymbol{x}) \geqslant \psi(\bar{\boldsymbol{x}}),$$

则称 ψ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是伪凸函数.

2 鲁棒有效解的最优性条件研究

本节将研究鲁棒有效解和真有效解的关系，给出鲁棒有效解的必要条件和充分条件.

2.1 鲁棒有效解与真有效解的关系

首先，给出鲁棒弱有效解的定义，研究鲁棒弱有效解、鲁棒有效解与真有效解的关系.

定义 8 如果存在 $\varepsilon > 0$，对任意 $\boldsymbol{C} \in C(\varepsilon)$，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 为如下问题的弱有效解：

$$\min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解.

由定义可知,鲁棒有效解必定是鲁棒弱有效解,但反之需要一些条件才能成立.

定理 1　设 Ω 为凸集,$\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是严格凸函数.若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解.

证明　假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是(MOP)的鲁棒有效解,则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\boldsymbol{C} \in C(\varepsilon)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\}$ 使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}. \tag{1}$$

由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为 Ω 上的严格凸函数,故 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 也为 Ω 上的严格凸函数,从而对任意的 $\lambda \in (0, 1)$ 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\bar{\boldsymbol{x}}) < \\ &\qquad \lambda(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}).\end{aligned}$$

结合式(1)有

$$\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\bar{\boldsymbol{x}}) < \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}},$$

这与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是鲁棒弱有效解矛盾,故 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是鲁棒有效解.

注 2　定理 1 中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是严格凸函数这一条件是否可减弱为一般凸函数还值得进一步研究.下面的例子可以说明即使不满足这个条件,定理 1 的结果也可能成立.

例 1　在(MOP)中,令 $p = 2$, $\Omega = \mathbf{R}$, 且 $\boldsymbol{f}: \Omega \to R^2$ 定义为

$$f_1(x) = x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

令 $\bar{x} = 0$, 则存在 $\varepsilon = 1/2$ 使得 $\bar{x}$ 既是鲁棒弱有效解,也是鲁棒有效解.

引理 1 在紧性的条件下给出鲁棒有效解与 G-真有效解的关系,并举例说明紧性的条件必不可少.在没有任何条件时,鲁棒弱有效解蕴含着 Borwein 真有效解.

定理 2　若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(MOP)的 Borwein 真有效解.

证明　假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是(MOP)的 Borwein 真有效解,则存在 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{d} \in T(\boldsymbol{f}(\Omega) + R^p_+, \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap (-R^p_+)$. 不妨设 $d_1 < 0, d_i \leqslant 0, i = 2,3,\cdots,p$. 由切锥的定义知,存在 $t_k \downarrow 0$, $\boldsymbol{d}_k \to \boldsymbol{d}$ 使得

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + t_k\boldsymbol{d}_k \in \boldsymbol{f}(\Omega) + R^p_+, \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+.$$

从而存在 $\boldsymbol{x}_k \in \Omega \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\}$, $\boldsymbol{p}_k \in R^p_+$ 使得 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + t_k\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{p}_k$, 即

$$f_j(\bar{\boldsymbol{x}}) + (t_k\boldsymbol{d}_k)_j = f_j(\boldsymbol{x}_k) + (\boldsymbol{p}_k)_j, \qquad \forall j \in P.$$

下证对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在矩阵 $\boldsymbol{C} \in C(\varepsilon)$ 和 $\boldsymbol{x}_k \in \Omega \backslash \{\bar{\boldsymbol{x}}\}$ 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k < \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}$, 即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是鲁棒弱有效解.令 $\boldsymbol{C}_j (j \in P)$ 为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量.

当 $j = 1$, k 充分大时, $(\boldsymbol{d}_k)_1 < 0$, $f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) + (t_k\boldsymbol{d}_k)_1 = f_1(\boldsymbol{x}_k) + (\boldsymbol{p}_k)_1$, 故

$$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) - f_1(\boldsymbol{x}_k) = (\boldsymbol{p}_k)_1 - (t_k\boldsymbol{d}_k)_1 > 0.$$

取 $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{0}$, 则 $f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) - f_1(\boldsymbol{x}_k) > \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}})$, 即

$$f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}_1\bar{\boldsymbol{x}} > f_1(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_k.$$

当 $j \neq 1$ 时, $(\boldsymbol{d}_k)_j$ 分两种情况.

考虑第一种情况: $(\boldsymbol{d}_k)_j < 0$, 故 $(\boldsymbol{p}_k)_j - (t_k\boldsymbol{d}_k)_j > 0$. 取 $\boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{0}$, 有 $f_j(\bar{\boldsymbol{x}}) - f_j(\boldsymbol{x}_k) > \boldsymbol{C}_j(\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}})$, 故

$$f_j(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}_j\bar{\boldsymbol{x}} > f_j(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{C}_j\boldsymbol{x}_k, \qquad \forall j \in \{2,3,\cdots,p\}.$$

考虑第二种情况：$(\boldsymbol{d}_k)_j \geqslant 0$，对任意 $\varepsilon > 0$，由 $t_k \downarrow 0$，$\boldsymbol{d}_k \to \boldsymbol{d}$ 知，当 k 充分大时，有 $-\varepsilon < -(t_k\boldsymbol{d}_k)_j \leqslant 0$。取 $\boldsymbol{C}_j = -2\varepsilon \dfrac{\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}}{\|\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}\|^2}$，有 $\boldsymbol{C}_j(\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}) = -2\varepsilon < -(t_k\boldsymbol{d}_k)_j$，故

$$f_j(\bar{\boldsymbol{x}}) - f_j(\boldsymbol{x}_k) = (\boldsymbol{p}_k)_j - (t_k\boldsymbol{d}_k)_j > \boldsymbol{C}_j(\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}), \qquad \forall j \in \{2,3,\cdots,p\}.$$

从而有

$$f_j(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}_j\bar{\boldsymbol{x}} > f_j(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{C}_j\boldsymbol{x}_k, \qquad \forall j \in \{2,3,\cdots,p\}.$$

综上所述，有 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k$。这与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是鲁棒弱有效解矛盾，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 Borwein 真有效解。

下面通过例子来说明定理 2 的合理性。

例 2 在(MOP)中，令 $p = 2, \Omega = \mathbf{R}$，且 $\boldsymbol{f}: \Omega \to R^2$ 定义为

$$f_1(x) = -x,$$
$$f_2(x) = x^3.$$

容易验证 $\bar{x} = 1$ 是鲁棒有效解(考虑 $\varepsilon = 1/10$)，且由图 1 可知，$\bar{x} = 1$ 是 Borwein 真有效解。

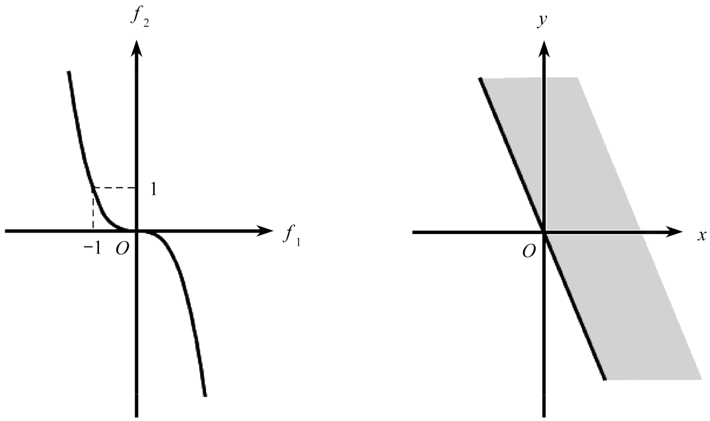

图 1 $\boldsymbol{f}(\Omega)$ 与 $T(\boldsymbol{f}(\Omega) + R^2_+, \boldsymbol{f}(1))$

Fig. 1 $\boldsymbol{f}(\Omega)$ and $T(\boldsymbol{f}(\Omega) + R^2_+, \boldsymbol{f}(1))$

定理 2 只是充分条件，而并非必要条件，见例 3。

例 3 在(MOP)中，令 $p = 2, \Omega = \mathbf{R}$，且 $\boldsymbol{f}: \Omega \to R^2$ 定义为

$$f_1(x) = x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & x \leqslant 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

考虑 $\bar{x} = 1$，由图 2 可知，$\bar{x}$ 是 Borwein 真有效解。对任意的 $\varepsilon > 0$，令 $\boldsymbol{C} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}} = (\varepsilon/4, \varepsilon/2)^{\mathrm{T}}$，$\bar{x}$ 不是如下问题的有效解：

$$\min \left(f_1(x) + \frac{\varepsilon}{4}x,\ f_2(x) + \frac{\varepsilon}{2}x\right),$$
$$\text{s.t.} \quad x \in \mathbf{R}.$$

事实上，对任意的 $\varepsilon > 0$，取 $x_\varepsilon = -1/\varepsilon$，有

$$f_1(x_\varepsilon)+c_1x_\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{4}<f_1(\bar{x})+c_1\bar{x}=1+\frac{\varepsilon}{4},$$

$$f_2(x_\varepsilon)+c_2x_\varepsilon=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}<f_2(\bar{x})+c_2\bar{x}=1+\frac{\varepsilon}{2},$$

即存在 $x_\varepsilon\in\mathbf{R}$ 使得 $\boldsymbol{f}(x_\varepsilon)+\boldsymbol{C}x_\varepsilon<\boldsymbol{f}(\bar{x})+\boldsymbol{C}\bar{x}$，故 $\bar{x}=1$ 不是鲁棒弱有效解.

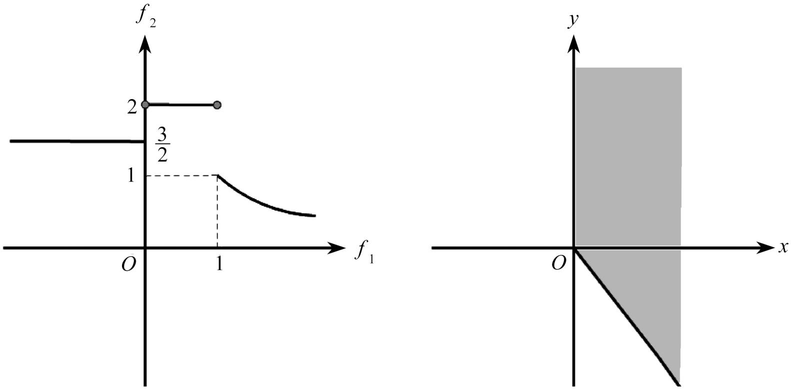

图 2　$\boldsymbol{f}(\Omega)$ 与 $T(\boldsymbol{f}(\Omega)+R^2_+,\boldsymbol{f}(1))$

Fig. 2　$\boldsymbol{f}(\Omega)$ and $T(\boldsymbol{f}(\Omega)+R^2_+,\boldsymbol{f}(1))$

由注 1 中 Borwein 真有效解与 Benson 真有效解的等价性，还可以得到如下结果.

推论 1　设 $\boldsymbol{f}$ 在 Ω 上是次类凸函数.若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(MOP)的 Benson 真有效解或 G-真有效解.

文献[13]中例 3.1 表明，在非紧性的条件下鲁棒有效解不能推出 G-真有效解.实际上是因为该例子中 $\boldsymbol{f}$ 不是次类凸的.当 $\boldsymbol{f}$ 是次类凸时，即使没有紧性，也可以得到 G-真有效解，下面的例子可以说明这个问题.

例 4　在(MOP)中，令 $p=2,\Omega=\mathbf{R}$，且 $\boldsymbol{f}:\Omega\to R^2$ 定义为

$$f_1(x)=x,$$

$$f_2(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

容易验证 $\bar{x}=0$ 是(MOP)的有效解，而且 $\bar{x}$ 还是鲁棒有效解(考虑 $\varepsilon=1/2$)，故由定理 2 知，$\bar{x}$ 是(MOP)的 Borwein 真有效解.又由于 $\boldsymbol{f}$ 是次类凸的，所以由推论 1 知，$\bar{x}$ 是(MOP)的 Benson 真有效解，故 $\bar{x}$ 是(MOP)的 G-真有效解.

鲁棒有效解与真有效解的关系如下所示：

$$\begin{tikzcd}
\text{鲁棒有效解} \arrow[r, leftrightarrow, "\boldsymbol{f}\text{严格凸}"] \arrow[d] & \text{鲁棒弱有效解} \arrow[dl] \\
\text{Borwein 真有效解} \arrow[r, leftrightarrow, "\boldsymbol{f}\text{次类凸}"] & \text{Benson真有效解}
\end{tikzcd}$$

注 3　2018 年，Morteza 等将自然锥序 R^p_+ 推广到一般锥序 K，研究了当 Ω 为紧集时，锥序 K 下的鲁棒有效解能推出锥序 K 下的 Henig 真有效解(见文献[14]中定理 4.2).可以类似证明，在去掉紧性的条件下，不一定能得到 Henig 真有效解，但是能得到局部 Henig 真有效解.

推论 2 若 $\bar{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解,则 $\bar{x}$ 是(MOP)的局部 Henig 真有效解.

2.2 鲁棒有效解的最优性条件

最优性条件是最优化问题的最优解所必须满足的条件.本节研究了在次类凸性假设下鲁棒弱有效解的必要性条件,在伪凸性假设下鲁棒有效解的充要条件.

引理 3[4] 设 $N, K \subset R^n$ 是两个闭凸锥,且满足 $N \cap K = \{\mathbf{0}\}$,则 $(-N^+) \cap (K^{s+}) \neq \varnothing$.

定理 3 设 Ω 为凸集,$\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, $f_i (i \in P)$ 是次类凸函数.若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是鲁棒弱有效解,则存在 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)^{\mathrm{T}} > \mathbf{0}$ 使得 $0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + N(\Omega, \bar{\boldsymbol{x}})$.

证明 因为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是鲁棒弱有效解,由定理 2 和注 1 知, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 Benson 真有效解,即

$$\mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{f}(\Omega) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + R_+^p) \cap (-R_+^p) = \{\mathbf{0}\}.$$

由引理 3 知,

$$(\mathrm{cl\ cone}(\boldsymbol{f}(\Omega) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + R_+^p))^+ \cap (R_+^p)^{s+} \neq \varnothing.$$

从而存在 $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ 使得 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{f}(\Omega) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) + R_+^p) \geqslant 0$, 这表明 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $\min_{x \in \Omega} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的最优解,故存在 $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ 使得

$$0 \in \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \partial f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + N(\Omega, \bar{\boldsymbol{x}}).$$

定理 4 令 Ω 是凸集,$\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, $\boldsymbol{f}$ 是伪凸函数,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是鲁棒有效解当且仅当 $T(\Omega, \bar{\boldsymbol{x}}) \cap G(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\mathbf{0}\}$.

证明 必要性由引理 2 知显然成立.

下面证明充分性.首先证明 $\bar{x}$ 是有效解.假设 $\bar{x}$ 不是有效解,则存在 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) \in -R_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}$.因为 Ω 是凸集,故 $\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}} \in T(\Omega, \bar{\boldsymbol{x}})$.由于 $\boldsymbol{f}$ 是伪凸函数,则对任意的 $\boldsymbol{\mu}^* \in R_+^p \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{\mu}^* \circ \boldsymbol{f}$ 是伪凸函数,这表明

$$\mathbf{0} \geqslant (\boldsymbol{\mu}^* \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}_0) - (\boldsymbol{\mu}^* \circ \boldsymbol{f})(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}), \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial(\boldsymbol{\mu}^* \circ \boldsymbol{f})(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

这说明 $\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}} \in G(\bar{\boldsymbol{x}})$,故 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}} \in T(\Omega, \bar{\boldsymbol{x}}) \cap G(\bar{\boldsymbol{x}})$,这与假设矛盾,故 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是有效解.余下证明与文献[14]中定理 5.1(ii)的证明类似.

下面通过例子说明定理 4 的合理性.

例 5 在(MOP)中,令 $p = 2, \Omega = \mathbf{R}$, 且 $\boldsymbol{f}: \Omega \to R^2$ 定义为

$f_1(x) = x$,

$f_2(x) = -x^3$.

考虑 $\bar{x} = -1$, 容易验证存在 $\varepsilon = 1/10$ 使得 $\bar{x}$ 是鲁棒有效解,并且有

$$T(\Omega, \bar{x}) \cap G(\bar{x}) = \{\mathbf{0}\}.$$

3 结 论

本文主要研究了多目标优化问题鲁棒有效解与真有效解之间的关系, 并给出鲁棒有效解的最优性条件, 推广了文献[13]中的定理 3.1 和文献[14]中的定理 4.2、定理 5.1, 得出如下结论:

1) 在 $\boldsymbol{f}$ 是严格凸函数的条件下,给出鲁棒有效解与鲁棒弱有效解的等价性.

2) 在没有任何条件下,给出鲁棒弱有效解与 Borwein 真有效解的关系.从而得出:当 $\boldsymbol{f}$ 为次类凸函数时,鲁棒弱有效解意味着 Benson 真有效解或 G-真有效解.

3) 在 $\boldsymbol{f}$ 是次类凸函数时,利用线性标量化方法给出鲁棒弱有效解的必要条件.同时,在 $\boldsymbol{f}$

是伪凸函数时,给出了鲁棒有效解的充要条件.

参考文献(References):

[1] KOOPMANS T C. Analysis of production as an efficient combination of activities[J]. *Analysis of Production and Allocation*, 1951, **158**(1): 33-97.

[2] KUHN H W, TUCKER A W. Nonlinear programming[C]//*Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, San Francisco, USA, 1951.

[3] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **22**(3): 618-630.

[4] BORWEIN J M. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, **15**(1): 57-63.

[5] BENSON H P. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979, **71**(1): 232-241.

[6] HENIG I. Proper efficiency with respect to cones[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1982, **36**(3): 387-407.

[7] BENTAL A, NEMIROVSKI A. Robust truss topology design via semidefinite programming[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 1997, **7**(4): 991-1016.

[8] KUROIWA D, LEE G M. On robust multiobjective optimization[J]. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2012, **40**(2/3): 305-317.

[9] EHROGOTT M, IDE J, SCHOBEL A. Minimax robustness for multi-objective optimization problems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, **239**(1): 17-31.

[10] IDE J, SCHOBEL A. Robustness for uncertain multi-objective optimization: a survey and analysis of different concepts[J]. *OR Spectrum*, 2016, **38**(1): 235-271.

[11] GOBERNA M A, JEYAKUMAR V, LI G, et al. Robust solutions of multi-objective linear semi-infinite programs under constraint date uncertain[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2014, **24**(3): 1402-1419.

[12] GEORGIEV P J, LUC D T, PRDALOS P. Robust aspects of solutions in deterministic multiple objective linear programming[J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, **229**(1): 29-36.

[13] ZAMANI M, SOLEIMANI-DAMANEH M, KABGANI A. Robustness in nonsmooth nonlinear multi-objective programming[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, **247**(2): 370-378.

[14] MORTEZA R, MAJID S D. Robustness in deterministic vector optimization[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2018, **179**(1): 137-162.

[15] SAWARAGI Y, NAKAYAMA H, TANINO T. *Theory of Multiobjective Optimization*[M]. London: Academic Press, 1985.

[16] MARKO M M, PEKKA N. *Nonsmooth Optimization*[M]. London: World Scientific, 1992.

[17] 杨新民. Benson 真有效解与 Borwein 真有效解的等价性[J]. 应用数学, 1994, **7**(2): 246-247. (YANG Xinmin. Equivalence between Benson proper efficient solution and Borwein proper efficient solution[J]. *Applied Mathematics*, 1994, **7**(2): 246-247.(in Chinese))

[18] 李小燕, 高英. 多目标优化问题 Proximal 真有效解的最优性条件[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 668-676. (LI Xiaoyan, GAO Ying. The optimality conditions of Proximal proper effi-

cient solution for multi-objective optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 668-676.(in Chinese))

[19] FAKHAR M, MAHYARINIA M R, ZAFARANI J. On nonsmooth robust multiobjective optimization under generalized convexity with applications to portfolio optimization[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, **265**(1): 39-48.

Relations Between Robust Efficient Solutions and Properly Efficient Solutions to Multiobjective Optimization Problems

YANG Ming, LI Linting, GAO Ying

(*School of Mathematical Sciences*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 401331, *P.R.China*)

Abstract: The relations between the robust efficient solutions and properly efficient solutions to multiobjective optimization problems were studied, and the optimality conditions for the robust efficient solutions were discussed. Firstly, the concept of weakly robust efficient solutions to multiobjective optimization problems was given. Then, the relations between the (weakly) robust efficient solutions and the properly efficient solutions were made clear. Several examples were given to illustrate the main results. Finally, the necessary and sufficient optimality conditions for the robust efficient solutions were established under the subconvexity and pseudoconvexity assumptions.

Key words: multiobjective optimization problem; robust efficient solution; properly efficient solution; optimality condition

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11771064)

引用本文/Cite this paper:

杨铭, 李林廷, 高英. 多目标优化问题鲁棒有效解与真有效解之间的关系[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(12): 1364-1372.

YANG Ming, LI Linting, GAO Ying. Relations between robust efficient solutions and properly efficient solutions to multiobjective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(12): 1364-1372.