

集中阻尼弦本征解的性质*

郑 罡, 李章瑜, 郭增伟, 张晓东

(重庆交通大学 省部共建山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074)

摘要: 利用 Dirac δ 函数,在全域建立并求解集中阻尼弦的动力学方程,导出其本征方程组、频率方程和本征函数的一般形式,推导了单项阻尼下本征函数的具体形式,并分析了中点阻尼对本征解的影响.同时,讨论了混合动力学系统在频率-阻尼关系、衰减率和完全抑制振动的最优阻尼 3 个方面既不同于连续系统,又不同于离散系统的特性:1) 系统频率与其阻尼无关;2) 各阶本征函数在单位时间内的衰减率都相同,衰减率与本征值的阶次无关;3) 当阻尼取 2 时,系统衰减率趋于无穷大,系统不能发生任何有阻尼振动.

关键词: 弦; 集中黏性阻尼; 混合系统; 复模态; 非经典阻尼

中图分类号: O302

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.400023

引 言

自 1981 年 Carne 开始研究集中阻尼弦的振动以来,集中阻尼弦本征解的性质就受到了持续关注^[1-3].这些研究主要考虑阻尼位于弦端附近的情况,通过数值手段求取近似解,在处理工程索结构的振动问题上取得了显著成效^[3-6].

在各种激励下,索结构易产生大幅振动,因此,工程索结构常采用阻尼器进行减振^[7-8].通过引入若干假设,索结构与阻尼器构成的系统可简化为带有集中阻尼的弦^[5,9].弦是连续系统,与弦相连的集中阻尼则是离散系统.连续弦和离散阻尼相结合,构成了同时包含连续子系统和离散子系统的混合动力学系统,其本征解的性质是其动力学的基本问题.

在解析求解方面,2002 年,美国霍普金斯大学的 Main 等将集中阻尼弦在阻尼处进行分段,各段分列方程,然后在分段处(即阻尼位置)引入位移协调条件,求解了单集中阻尼弦的本征问题^[6].对于多个集中阻尼的一般情况,由于各分段处均需引入位移协调条件,这种做法在数学处理上会变得较为困难和繁琐.本文通过引入 Dirac δ 函数,对集中阻尼弦的动力学方程在其全域进行统一列式,求解了一般集中阻尼弦在两端固支条件下的本征问题,并对单集中阻尼弦本征解的性质进行了讨论.

1 集中阻尼弦的本征解

含任意有限 n 项集中线性黏性阻尼的张紧弦系统如图 1 所示.该张紧弦具有单位长度 l 、单

* 收稿日期: 2019-01-08; 修订日期: 2019-01-24

基金项目: 国家自然科学基金(51978112;51478072;51878106)

作者简介: 郑罡(1972—),男,研究员,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: zhenggang@cqjtu.edu.cn).

位分布质量密度 m 和单位张力 T , 其位置坐标、时间、挠曲函数、第 i 项阻尼和该阻尼的位置坐标分别用 $x, t, w(x, t), c_i$ 和 x_i 表示, $i = 1, 2, \dots, n$.

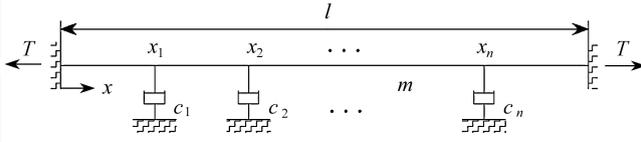


图 1 含 n 项黏性阻尼的张紧弦

Fig. 1 A taut string with n concentrated viscous damping dashpots

1.1 动力学平衡方程与分离变量

通过引入 Dirac δ 函数, 图 1 所示混合系统的动力学平衡方程可在其全域统一表示为

$$-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \sum_{i=1}^n [c_i \delta(x - x_i)]. \quad (1)$$

设 $\phi(x)$ 为 $w(x, t)$ 的本征函数, 采用分离变量法, 由式(1)可得如下的常微分方程:

$$-\phi''(x) + p^2 \phi(x) = -p \phi(x) \sum_{i=1}^n [c_i \delta(x - x_i)]. \quad (2)$$

1.2 加权和函数形式的本征函数

本征函数 $\phi(x)$ 的非齐次常微分方程(2)的右端项为 Dirac δ 函数的加权和函数形式, 故 $\phi(x)$ 可设为 Green 函数 $G_i(x; x_i, c_i, p)$ 的加权和函数形式, 即

$$\phi(x) = -p \sum_{i=1}^n \phi(x_i) G_i(x; x_i, c_i, p). \quad (3)$$

式(3)中, $G_i(x; x_i, c_i, p)$ 是以 x 为自变量, 带有 x_i, c_i 和 p 三个参数的 Green 函数, 可简写为 $G_{icp}(x)$. 参数 p 是系统的本征值; $\phi(x_i)$ 是本征函数 $\phi(x)$ 在第 i 项阻尼位置处的函数值. 所有的 $\phi(x_i)$ 构成一个 n 维向量, 可称其为系统的本征向量, 用 $\boldsymbol{\phi}$ 表示. 一般地, Green 函数 $G_{icp}(x)$ 应满足如下非齐次常微分方程:

$$-G''_{icp}(x) + p^2 G_{icp}(x) = c_i \delta(x - x_i). \quad (4)$$

对式(4)进行 Laplace 变换, 再进行 Laplace 逆变换, 得

$$G_{icp}(x) = G_{icp}(0) \cosh(px) + \frac{G'_{icp}(0) \sinh(px) - c_i \mu(x - x_i) \sinh(p(x - x_i))}{p}, \quad (5)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, n, G_{icp}(0)$ 和 $G'_{icp}(0)$ 由边界条件确定, $\mu(x - x_i)$ 为单位阶跃函数, 即

$$\mu(x - x_i) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x, \\ 0, & x < x_i. \end{cases} \quad (6)$$

1.3 位移协调条件、本征方程组与频率方程

由式(3), 在阻尼位置 $x_r (r = 1, 2, \dots, n)$ 处, 有位移协调条件:

$$\phi(x_r) = -p \sum_{i=1}^n \phi(x_i) G_{icp}(x_r). \quad (7)$$

式(7)即为本征方程组, 可进一步简化. 利用 Kronecker 符号 δ_{ir} 将式(7)左端写为求和形式, 右端的 $G_{icp}(x_r)$ 简写为 G_{ircp} , 得

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ir} \phi(x_i) = -p \sum_{i=1}^n \phi(x_i) G_{ircp}. \quad (8)$$

将式(8)右端项移到左端, 整理得

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ir} + pG_{ircp}) \phi(x_i) = 0. \quad (9)$$

式(9)即为系统的本征方程组, $r = 1, 2, \dots, n$, 共 n 个方程, 其矩阵形式为

$$(\mathbf{I} + \mathbf{H})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

式(10)中, \mathbf{I} 为 n 阶单位矩阵, 列向量 $\boldsymbol{\phi}$ 为本征向量, 矩阵 \mathbf{H} 和本征值 p 均与 Green 函数在阻尼位置处的取值 G_{ircp} 有关, $i, r = 1, 2, \dots, n$, \mathbf{H} 由下式定义:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}, \quad (11a)$$

$$h_{ir} = pG_{ircp}. \quad (11b)$$

式(10)有非平凡解的条件是其系数矩阵 $\mathbf{I} + \mathbf{H}$ 的行列式为 0, 即

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{H}) = 0. \quad (12)$$

式(12)是关于本征值 p 的超越方程.

一般地, 本征值 p 可由超越方程(12)通过数值算法解得. 因本征值 p 的虚部为系统的圆频率, 也称式(12)为系统的频率方程. 由式(12)解得系统的任意一阶本征值 p 后, 式(10)就变为代数方程组, 可由其解得对应的本征向量 $\boldsymbol{\phi}_p$.

2 单集中阻尼弦的本征解

上一节已导出了一般集中阻尼弦的本征方程组、频率方程和求解方法. 本节将对其进行进一步化简, 以具体求得仅设置一个集中阻尼器的单集中阻尼弦的本征解为例, 并讨论其性质. 当阻尼仅有 1 项时, 式(2)、式(3)和式(12)分别简化为

$$-\phi''(x) + p^2\phi(x) = -p\phi(x)c\delta(x - x_1), \quad (13)$$

$$\phi(x) = -pG_{1cp}(x)\phi(x_1), \quad (14)$$

$$1 + pG_{1cp}(x_1) = 0. \quad (15)$$

上述三式依次为单集中阻尼弦系统本征函数的常微分方程、本征函数的一般表达式和频率方程.

2.1 边界条件与 Green 函数的待定系数

本征函数的一般表达式(14)中 Green 函数 $G_{1cp}(x)$ 的一般形式为式(5), 其中含有两个待定常数 $G_{1cp}(0)$ 和 $G'_{1cp}(0)$, 需由边界条件给定. 设边界条件为弦在左右两端位移均为 0, 可解得

$$G_{1cp}(0) = 0, \quad (16)$$

$$G'_{1cp}(0) = c_1 \sinh(p(1 - x_1)) / \sinh p. \quad (17)$$

Green 函数 $G_{1cp}(x)$ 的两个待定常数 $G_{1cp}(0)$ 和 $G'_{1cp}(0)$ 已由式(16)和式(17)确定, 将两者代入 Green 函数的一般表达式(5), 得

$$G_{1cp}(x) = \frac{c_1}{p} \left[\frac{\sinh(p(1 - x_1))}{\sinh p} \sinh(px) - \mu(x - x_1) \sinh(p(x - x_1)) \right]. \quad (18)$$

式(18)即为零边界条件单集中阻尼弦系统的 Green 函数.

2.2 频率方程

令 Green 函数式(18)在 $x = x_1$ 处取值, 此时 $\sinh(p(x - x_1))$ 为 0, 则该式右端第 2 项为 0, 式(18)变为

$$G_{1cp}(x_1) = \frac{c_1 \sinh(p(1-x_1))}{p \sinh p} \sinh(px_1). \quad (19)$$

将式(19)代入式(15),当 c_1 不为 0 时,可得单集中阻尼弦频率方程的一般形式为

$$\frac{\sinh(p(1-x_1)) \sinh(px_1)}{\sinh p} = -\frac{1}{c_1}. \quad (20)$$

对任意的 $x_1 > 0$ 和 $c_1 > 0$,式(20)中的本征值 p 一般可用数值方法解得具体数值.

2.3 本征向量与和本征函数

注意到单集中阻尼弦只有一项阻尼,因此,系统的本征向量(即本征函数在阻尼位置处的取值)只有一个元素.对于该元素的取值,如阻尼位置不是本征函数的驻点,则可取 1,即 $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1] = [1]$;如阻尼位置是本征函数的驻点,则该元素值必为 0,即 $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1] = [0]$.

此处先讨论阻尼位置不是本征函数的驻点,即 $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1] = [1]$ 的情况,对于阻尼位置是本征函数驻点的情况,则将在本文第 4 节中讨论.由于 $\phi_1 = 1$,将式(18)代入式(14),可得带有参数 p 的本征函数 $\phi(x)$ 的具体形式为

$$\phi(x) = -c_1 \left[\frac{\sinh(p(1-x_1)) \sinh(px)}{\sinh p} - \mu(x-x_1) \sinh(p(x-x_1)) \right]. \quad (21)$$

3 中点集中阻尼弦本征解的性质

频率方程式(20)为超越方程,其阻尼位置坐标 x_1 可在 0(弦左端)和 1(弦右端)之间的任意点取值.因此,对于阻尼位置的一般情况,由频率方程求解本征值 p 仍需要采用数值解法.但当阻尼位于某些特殊位置时,例如阻尼位于弦中点,即 $x_1 = 1/2$ 的情况,则可由频率方程解得本征值 p 的显式解.以下对此做进一步讨论.

3.1 本征值

将 $x_1 = 1/2$ 代入频率方程(20),该式简化为

$$\tanh(p/2) = -2/c_1. \quad (22)$$

由式(22)解得

$$p = \ln \frac{c_1 - 2}{c_1 + 2}. \quad (23)$$

式(23)即为中点集中阻尼弦本征值的解析解,其右端项需取对数,因此,本征值 p 一般应采用复数形式表示,即 $p = \sigma + j\omega$, j 为虚数单位.

3.2 本征函数

将 $x_1 = 1/2$ 代入本征函数式(21),得

$$\phi(x) = -c_1 \left[\frac{\sinh(p/2)}{\sinh p} \sinh(px) - \mu \left(x - \frac{1}{2} \right) \sinh \left(p \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right]. \quad (24)$$

由于本征函数乘以非零常数仍为本征函数,故上式中 c_1 可约去,并可表示为分段函数的形式:

$$\phi(x) = \begin{cases} \sinh(px), & x \leq \frac{1}{2}, \\ \sinh(p(1-x)), & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (25)$$

由式(25)易知,本征函数 $\phi(x)$ 关于弦中点对称.因此,除特别说明外,下文讨论相关问题

时,只考虑 $x \leq 1/2$ 的部分.将本征值的复数形式 $p = \sigma + j\omega$ 代入式(25)右端,得

$$\phi(x) = \sinh(\sigma x) \cos(\omega x) + j \cosh(\sigma x) \sin(\omega x). \quad (26)$$

式(26)给出了中点集中阻尼弦在零边界条件下本征函数的一般表达式(根据对称性,只考虑 $x \leq 1/2$ 的部分).

3.3 本征值与本征函数的性质

当阻尼 c_1 取值不同时,本征值 p 、本征函数 $\phi(x)$ 及系统运动的特性都将随之变化,以下分为大阻尼、适中阻尼和特征阻尼 3 种情况进行讨论.

3.3.1 大阻尼 ($c_1 > 2$)

阻尼 $c_1 > 2$ 时,由本征值与阻尼的关系式(23)得

$$p_k = \ln |(c_1 - 2)/(c_1 + 2)| + j \cdot 2s\pi, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

式(27)中,本征值阶次 k 由整数 s 确定,当 $s \leq 0$ 时, $k = 2|s|$, 当 $s > 0$ 时, $k = 2s - 1$.

由式(27)得本征值 p_k 的实部和虚部分别为

$$\sigma = \ln |(c_1 - 2)/(c_1 + 2)|, \quad (28)$$

$$\omega_k = 2s\pi, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (29)$$

由式(27)和后文式(34a)知,当 $c_1 > 0$ 且 $c_1 \neq 2$ 时,均有 $\sigma < 0$,可绘出衰减率 $-\sigma$ 随系统阻尼 c_1 的变化情况,如图 2 所示.

1) 频率

由式(29)可知,阻尼 $c_1 > 2$ 时,系统存在虚部为 0 的本征值 p_0 ,此时 $p_0 = \sigma$,系统的频率为 0,表明系统的 0 阶运动无震荡特性.

除 0 阶外,系统还有 1 阶及以上无穷多阶本征值,即这些本征值的虚部 ω 为 $2s\pi$, $s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,系统的频率为 $|s|$.注意到, $c_1 > 2$ 时,由式(29)可以看出:系统频率与其阻尼无关,这是该混合系统区别于一般的离散系统或连续系统的一个独特性质,可称为性质 I.

2) 衰减率

从式(28)可以看出,当 $c_1 > 2$ 时,包括 0 阶在内的系统各阶本征值的实部均相等,表明所有各阶运动均具有相同的衰减率,即均为 $-\sigma$.衰减率与本征值的阶次无关,这是该混合系统区别于一般的离散系统或连续系统的又一个独特性质,可称为性质 II.

特别地,令式(28)中 c_1 趋于 $+\infty$,得

$$\lim_{c_1 \rightarrow +\infty} \sigma = \lim_{c_1 \rightarrow +\infty} \ln |(c_1 - 2)/(c_1 + 2)| = 0^-. \quad (30)$$

此时,衰减率 $-\sigma$ 趋于无穷小.注意到,由于衰减率趋于无穷小,表明此时系统趋于无阻尼运动.

3) 本征函数

阻尼 $c_1 > 2$ 时,本征函数的一个显著特点在于具有非震荡的 0 阶本征函数,记为 $\phi_0(x)$,且 $\phi_0(x)$ 为实函数.由于 0 阶本征值的虚部 ω 为 0,由式(26)可得 0 阶本征函数为

$$\phi_0(x) = \sinh(\sigma x). \quad (31)$$

由式(31)可知,0 阶本征函数 $\phi_0(x)$ 为实双曲正弦函数.

特别地,当 c_1 趋于 $+\infty$ 时, σ 趋于负无穷小(0^-).令本征函数一般表达式(26)中的 σ 趋于负无穷小,得

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \phi_k(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} (\sinh(\sigma x) \cos(\omega_k x) + j \cosh(\sigma x) \sin(\omega_k x)) = \sigma x \cos(\omega_k x) + j \sin(\omega_k x). \quad (32)$$

注意到式(32)中 ω_k 取值为 $2s\pi$,于是由式(32)可知,本征函数实部接近于 $\sigma x \cos(2s\pi x)$,为一阶无穷小量;虚部接近于函数 $\sin(2s\pi x)$ 。实部与虚部相比,一般为一阶无穷小量,但0阶本征函数则是一个例外:由式(31)可知,0阶本征函数 $\phi_0(x)$ 趋于 σx ,仍为一阶无穷小量,但其虚部严格为0。

图3绘出了不同阻尼下0阶本征函数 $\phi_0(x)$ 的图形(其中 $x > 1/2$ 的部分由图形关于 $x = 1/2$ 的对称性作出,图中本征函数已利用中点函数值进行了归一化处理)。从图3可以看出,随着阻尼增大,0阶本征函数 $\phi_0(x)$ 的形状逐渐接近于函数 σx ;随着阻尼趋近于2,本征函数在弦中点以外的位置迅速衰减为0。

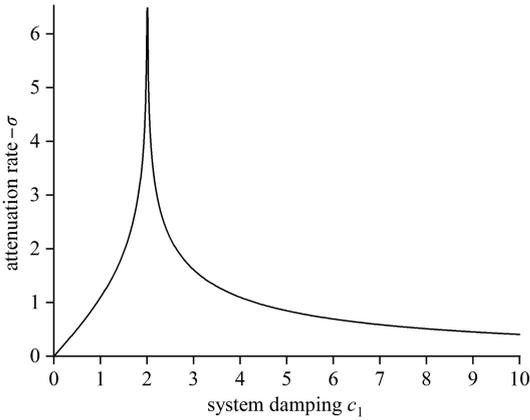


图2 衰减率 $-\sigma$ 随系统阻尼 c_1 变化

Fig. 2 Variation of attenuation rate σ with system damping c_1

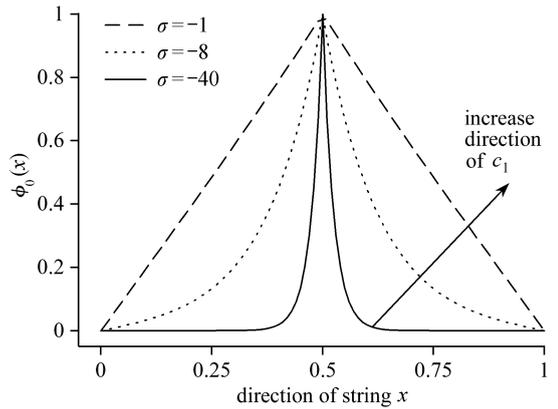
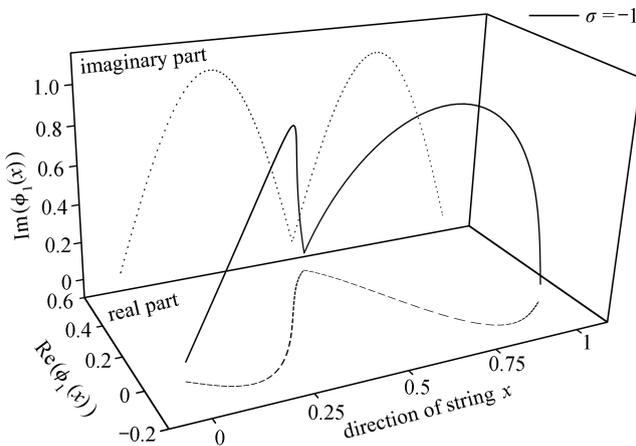


图3 当 $c_1 > 2$ 时系统的0阶本征函数

Fig. 3 The 0th order eigenfunction of the system for $c_1 > 2$

图4(a)~4(c)分别给出了1阶本征函数 $\phi_1(x)$ 及不同阻尼下 $\phi_1(x)$ 的实部和虚部的图形($x > 1/2$ 的部分由关于 $x = 1/2$ 的对称性做出, $\phi_1(x)$ 的实部和虚部均由其峰值进行了归一化处理)。

从图4(b)~4(c)可以看出,随着阻尼从2开始增大,1阶本征函数 $\phi_1(x)$ 的实部形状逐渐接近于 $-x \cos(2\pi x)$,虚部形状接近于 $\sin(2\pi x)$ 。



(a) 本征函数的空间曲线及其实部、虚部投影

(a) The space curve of the eigenfunction and its real part and imaginary part projections

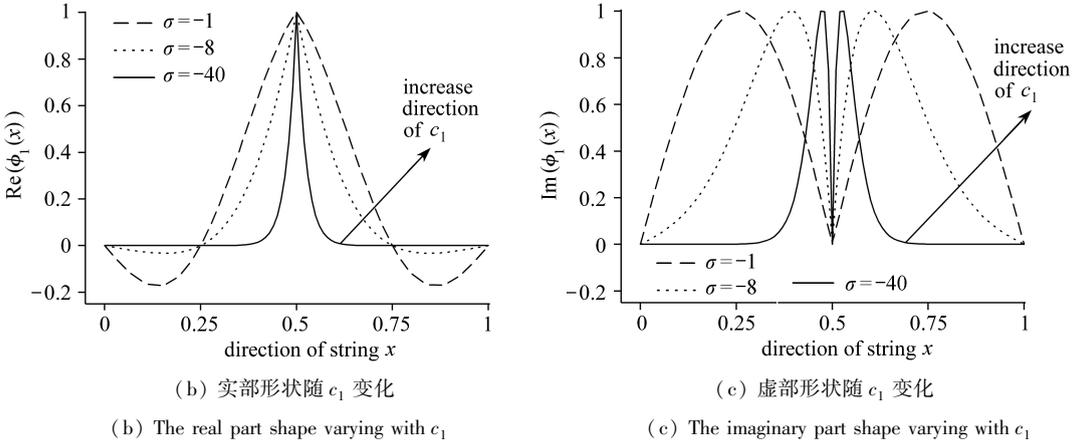


图4 当 $c_1 > 2$ 时系统的 1 阶本征函数

Fig. 4 The 1st order eigenfunction of the system for $c_1 > 2$

3.3.2 适中阻尼 ($0 < c_1 < 2$)

当 $0 < c_1 < 2$ 时,由本征值与阻尼的关系式(23)得

$$p_k = \ln |(c_1 - 2)/(c_1 + 2)| + j(2s + 1)\pi, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (33)$$

式(33)中,本征值 p 的阶次 k 由整数 s 确定,当 $s < 0$ 时, $k = 2|s|$, 当 $s \geq 0$ 时, $k = 2s + 1$.

由式(33)可知,当 $0 < c_1 < 2$ 时,本征值 p 是复数, p 的实部和虚部分别为

$$\sigma = \ln |(c_1 - 2)/(c_1 + 2)|, \quad (34a)$$

$$\omega_k = (2s + 1)\pi, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (34b)$$

1) 频率

由式(34b)知,当 $0 < c_1 < 2$ 时,各阶本征值的虚部 ω 为 $(2s + 1)\pi, s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,系统的频率为 $|s + 1/2|$.式(34b)还表明,系统频率仍与其阻尼无关,再次表现出该混合系统的性质 I.

2) 衰减率

由式(34a)可知,对 $0 < c_1 < 2$ 的情况,所有各阶本征值的实部 σ 都相同,表明各阶本征函数在单位时间内的衰减率都相同,衰减率与本征值的阶次无关,再次表现出该混合系统的性质 II.

特别地,当 c_1 大于且趋于 0 时,得

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0} \sigma = \lim_{c_1 \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{c_1 - 2}{c_1 + 2} \right| \right) = 0^-. \quad (35)$$

此时,衰减率 $-\sigma$ 趋于无穷小.应注意到,衰减率趋于无穷小,表明该混合系统趋于无阻尼振动.

3) 本征函数

不论阻尼如何取值,本征函数均可统一表达为式(26).上文提到,当 $c_1 > 2$ 时,系统存在虚部为 0 的本征值,其对应的 0 阶本征函数为实双曲正弦函数.但对于 $0 < c_1 < 2$ 的情况,由式(34b)可知,系统各阶本征值虚部均不可能为 0,故任何本征函数都不能再退化为实函数.

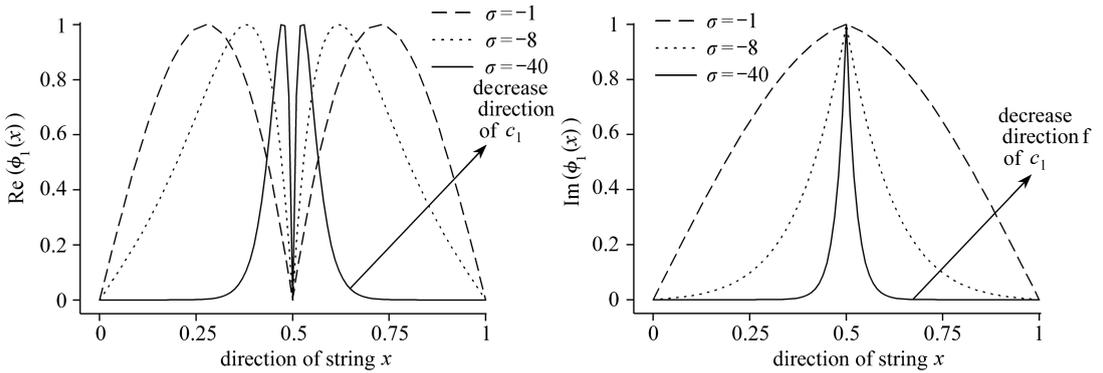
特别地,由式(35)可知,当 c_1 大于且趋于 0 时, σ 趋于负无穷小,令本征函数式(26)中的 σ 趋于负无穷小,得

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \phi_k(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} (\sinh(\sigma x) \cos(\omega_k x) + j \cosh(\sigma x) \sin(\omega_k x)) =$$

$$\sigma x \cos(\omega_k x) + j \sin(\omega_k x) . \tag{36}$$

同时注意到式(34b)中 ω_k 取值为 $(2s + 1)\pi$, 于是由式(36)可知, 本征函数的实部接近 $\sigma x \cos((2s + 1)\pi x)$, 为无穷小量; 虚部接近于 $\sin((2s + 1)\pi x)$; 本征函数的实部与虚部相比, 一般为一阶无穷小量.

图5绘出了不同阻尼下1阶本征函数 $\phi_1(x)$ 的实部和虚部的图形($x > 1/2$ 的部分由关于 $x = 1/2$ 的对称性做出, $\phi_1(x)$ 的实部和虚部均由其峰值进行了归一化处理). 从图5可以看出, 随着阻尼从2开始减小至0, 1阶本征函数 $\phi_1(x)$ 的实部形状逐渐接近于 $x \cos(\pi x)$, 其虚部形状接近于 $\sin(\pi x)$.



(a) 实部形状随 c_1 变化
 (a) The real part shape varying with c_1
 (b) 虚部形状随 c_1 变化
 (b) The imaginary part shape varying with c_1

图5 当 $0 < c_1 < 2$ 时系统的1阶本征函数

Fig. 5 The 1st order eigenfunction of the system for $0 < c_1 < 2$

3.3.3 特征阻尼 ($c_1 = 2$)

由本征值与阻尼的一般关系式(23)知, 当阻尼值取2时, 由于式(23)右端需对0取对数, 即使在复域, 这个对数都无意义(无定义). 但该混合动力学系统(中点集中阻尼弦)本身并不能排斥阻尼值取2的情况, 因此, 有必要从极限角度对此问题进行讨论.

不论从大于2的方向还是从小于2的方向, 当 c_1 趋于2时, 由式(23)可得本征值实部的极限为

$$\lim_{c_1 \rightarrow 2} \sigma = \lim_{c_1 \rightarrow 2} \left(\ln \left| \frac{c_1 - 2}{c_1 + 2} \right| \right) = -\infty . \tag{37}$$

此时, σ 趋于负无穷大. 本征值的虚部 ω 则与 c_1 是否大于2有关: $c_1 > 2$ 时, $\omega = 2s\pi$; $c_1 < 2$ 时, $\omega = (2s + 1)\pi$; s 均为整数, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

1) 频率

如前所述, 当阻尼 c_1 从两个不同的方向趋于2时, 本征值虚部 ω 取值不同, 表明其左右极限不同.

2) 衰减率

如前所述, c_1 不论从哪个方向趋于2, 本征值实部 σ 均趋于负无穷大, 即系统衰减率 $-\sigma$ 趋于无穷大. 从数学上看, 这表明各阶本征函数所表征的运动会在瞬时衰减为0, 可以理解为系统的有阻尼运动(包括震荡和非震荡两种有阻尼运动)被完全抑制, 系统不能发生任何有阻尼振动, 这是该系统区别于一般的离散系统或连续系统的再一个独特性质, 可称为性质III.

3) 本征函数

如前所述,当 c_1 趋于 2 时, σ 趋于负无穷大. 因此, 可令本征函数统一表达式(26) 中的 σ 趋于负无穷大, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \phi_k(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} (\sinh(\sigma x) \cos(\omega_k x) + j \cosh(\sigma x) \sin(\omega_k x)) = \\ &= e^{-\sigma x} (-\cos(\omega_k x) + j \sin(\omega_k x)) / 2 = \\ &= -e^{-\sigma x} e^{-j\omega_k x} / 2. \end{aligned} \quad (38)$$

式(38)表明: 当 σ 趋于负无穷大时, 本征函数在所有非 0 点的取值趋于无穷大.

这将得到如下推论: 若 c_1 趋于 2, 则在采用叠加法确定挠曲函数 $w(x, t)$ 中任意一阶本征函数 $\phi_k(x)$ 的系数时, 由于 $\phi_k(x)$ 在除 $x = 0$ 点以外, 处处趋于无穷大, $\phi_k(x)$ 的系数在任何能量有限的初始条件下都将趋于无穷小. 这意味着当阻尼为特征阻尼时, 有阻尼运动都将被完全抑制. 因此, 从本征函数的角度分析, 系统此时也不能发生任何有阻尼振动, 这和上文从衰减率角度分析得到的结论一致, 再次表现出该混合系统的性质 III.

4 无衰减自由振动(第二类本征解)

对单阻尼设置于弦中点的情况, 集中阻尼弦存在一类特殊的自由振动, 这类振动对应弦中点恰好为无阻尼自由振动驻点的那一部分本征解. 由于这类本征解在阻尼处取值为 0, 因此其对应的振动不受阻尼的影响, 其自由振动无衰减.

此种情况下, 本征函数 $\phi(x)$ 在阻尼位置处 ($x_1 = 1/2$) 应满足

$$\phi(x_1) = 0, \quad (39)$$

则阻尼力恒为 0. 因此, $\phi(x)$ 的常微分方程(13)变为

$$-\phi''(x) + p^2 \phi(x) = 0. \quad (40)$$

同时, $\phi(x)$ 尚需满足两端的零边界条件:

$$\phi(0) = \phi(1) = 0. \quad (41)$$

易看出, 式(40)及式(41)与两端固支无阻尼弦本征函数满足的常微分和边界条件完全一致, 易解得本征值和本征函数为

$$p = js\pi, \quad (42)$$

$$\phi(x) = \sinh(px), \quad (43)$$

式(42)中, s 为非 0 整数.

注意到, 式(43)中的 $\phi(x)$ 尚应满足式(39), 应做进一步讨论. 令 $N = 2$, 引入记号 α 表示无阻尼弦, $s_\alpha = \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots; s_\alpha < 0$ 时, $q = 2 |s_\alpha|$, $s_\alpha > 0$ 时, $q = 2s_\alpha - 1$, 易知无阻尼弦自由振动第 q 阶本征解 $p_{\alpha q}$ 和 $\phi_{\alpha q}(x)$ 除了满足式(40)及式(41), 还将同时满足式(39). 因此, $p_{\alpha q}$ 和 $\phi_{\alpha q}(x)$ 同时也分别为集中阻尼弦的无衰减自由振动的本征值 $p_{\beta v}$ 和本征函数 $\phi_{\beta v}(x)$, 记号 β 表示集中阻尼弦, 记号 v 表示本征值阶次. 则集中阻尼弦的无衰减自由振动的本征值阶次 v 应按照系统频率从小到大的方式编号. 当同时考虑集中阻尼弦的无衰减和有衰减振动时, 应对两类本征解的阶次统一编号. 此时, 编号规则仍然应是本征值阶次随频率(绝对值)的递增而增加.

由以上推导可知, 中点集中阻尼弦的自由振动存在这样一类本征解: 阻尼位置(此处即弦中点)处于本征函数的驻点处. 这类解实际上就是无阻尼弦的本征解中, 在弦中点为驻点的那一部分解.

1) 频率

由式(42)知,本征值 p 的虚部 ω 为 $2s\pi$,表明系统频率为 $s(s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ 。

2) 衰减率

显然,由于这类本征解与无衰减自由振动相对应,可知衰减率为 0,这与式(43)中本征解的实部均为 0 是对应的。

3) 本征函数

显然,这类本征函数关于弦中点反对称,且与无阻尼弦系统相应的反对称本征函数完全一致,其本征函数为

$$\phi_v(x) = \sin(2s\pi x), \quad s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (44)$$

5 中点集中阻尼弦自由振动的一般表达式

中点集中阻尼弦的本征解一般由无衰减自由振动、有衰减自由振动和有衰减的 0 阶非震荡运动组成,因此,可将其表示为如下通用形式:

$$w(x, t) = C_0 e^{\sigma t} \sinh(\sigma x) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{(\sigma + j\omega_k)t} \phi_k(x) + \sum_{v=1}^{+\infty} (A_v \sin(2v\pi t) + B_v \cos(2v\pi t)) \sin(2v\pi x) \quad (45)$$

式(45)中,右端三项依次为非震荡的 0 阶本征运动、有衰减自由振动和无衰减自由振动; $\phi_k(x)$ 是由式(26)给出的复函数; C_k 为复常数, A_v, B_v 为实常数,这些常数须由初始条件确定。

6 结果与讨论

本文利用 Dirac δ 函数,在全域建立并求解集中阻尼弦的动力学方程,导出了其本征方程组、频率方程和本征函数的一般形式,分析了中点阻尼对张紧弦本征解的影响,得到的结果如下:

1) 集中阻尼弦有三个既区别于连续系统,又区别于离散系统的独特性质:系统频率与阻尼值无关(性质 I),阻尼振动的衰减率均相等(性质 II),及当阻尼为特定值时,有衰减振动被完全抑制,系统只存在无衰减振动(性质 III)。

2) 当阻尼小于特定值时,系统只有震荡的运动;当阻尼大于特定值时,系统则可同时有震荡运动和非震荡运动。

3) 中点集中阻尼弦的无衰减振动均关于中点反对称,有衰减运动(包括 0 阶的非震荡运动和 1 阶及以上阶次的震荡运动)均关于中点对称。

对于理论推导,给出系统本征解的一般形式及分析本征解的性质仍然是不够的.在此基础上,还需根据初始条件确定本征解叠加时的待定系数,这是理论推导应该解决的问题,此问题将在后续论文中研讨。

参考文献(References):

- [1] CARNE T G. Guy cable design and damping for vertical axis wind turbines: SAND 80-2669 [R]. Albuquerque, New Mexico, US: Sandia National Laboratories, 1981.
- [2] YONEDA M, MAEDA K. A study on practical estimation method for structural damping of stay cable with damper[C]//*Proceedings of the Canada-Japan Workshop on Bridge Aerodynamics*. Ottawa, Canada, 1989.
- [3] PACHECO B M, FUJINO Y, SULEKH A. Estimation curve for modal damping in stay cables

- with viscous damper[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1993, **119**(6): 1961-1979.
- [4] TABATABAI H, MEHRABI A B. Design of mechanical viscous dampers for stay cables[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2000, **5**(2): 114-123.
- [5] YU Z, XU Y L. Mitigation of three-dimensional vibration of inclined sag cable using discrete oil dampers, I: formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **214**(4): 659-673.
- [6] MAIN J A, JONES N P. Free vibrations of taut cable with attached damper, I: linear viscous damper[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, **128**(10): 1062-1071.
- [7] BATTINI J M. Analysis of dampers for stay cables using nonlinear beam elements[J]. *Structures*, 2018, **16**: 45-49.
- [8] CHEN L, SUN L M, NAGARAJAIAH S. Cable vibration control with both lateral and rotational dampers attached at an intermediate location[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, **377**(1): 38-57.
- [9] LAZAR F, NEILD S A, WAGG D J. Vibration suppression of cables using tuned-inerter-dampers[J]. *Engineering Structures*, 2016, **122**(1): 62-71.

Properties of the Eigen Solution of Taut Strings With Concentrated Damping

ZHENG Gang, LI Zhangyu, GUO Zengwei, ZHANG Xiaodong

(Co-Constructing State Key Laboratory of Mountain Bridge and Tunnel Engineering by Province and Ministry, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China)

Abstract: By means of the Dirac δ function, the free-vibration equation of motion for taut strings with concentrated damping, namely the damping hybrid string system, was established and solved. The analytic solution to the eigen problem was obtained for the system with only one single damping dashpot at the midspan, and the properties of the eigen value and the eigen function were analyzed. The dynamic behaviors of the damping hybrid string system, including the frequency-damping relationship, the decay ratio and the full suppression of the motion at the optimal damping, which distinctly differentiate the hybrid system from a continuous system or a discrete system, were identified: 1) the frequency of the hybrid string system is independent of its damping ratio; 2) the decay ratios keep the same for different orders of eigen functions; 3) the decay ratios approach infinity when the damping ratio equals 2, which indicates any damped vibration of the system will be fully suppressed.

Key words: string; concentrated viscous damping; hybrid system; complex mode; non-classic damping

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (51978112; 51478072; 51878106)

引用本文/Cite this paper:

郑罡, 李章瑜, 郭增伟, 张晓东. 集中阻尼弦本征解的性质[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(9): 980-990.

ZHENG Gang, LI Zhangyu, GUO Zengwei, ZHANG Xiaodong. Properties of the eigen solution of taut strings with concentrated damping[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(9): 980-990.