

一类含五次非线性恢复力的 Duffing 系统 共振与分岔特性分析*

彭荣荣

(南昌工学院 理学院, 南昌 330108)

摘要: 考虑一类含有外激力和五次非线性恢复力的 Duffing 系统,运用多尺度法求解得到该系统的幅频响应方程,给出不同参数变化下的幅频特性曲线及变化规律,同时利用奇异性理论得到该系统在 3 种情形下的转迁集及对应的拓扑结构.其次确定系统的不动点,运用 Hamilton 函数给出该系统的异宿轨,在此基础上,利用 Melnikov 方法得到该系统在 Smale 马蹄意义下发生混沌的阈值.而后通过数值仿真给出了系统随外激力、五次非线性项系数变化下的动态分岔与混沌行为,发现存在周期运动、倍周期运动、拟周期运动及混沌等非线性现象.最后运用 Lyapunov 指数、相轨图和 Poincaré 截面等非线性方法对理论的正确性进行验证.上述研究结论为进一步提升对 Duffing 系统非线性特性及其演化规律的认识提供了一定的理论参考.

关键词: Duffing 系统; 五次非线性; 分岔; 混沌

中图分类号: O322; O411.3

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390234

引言

起初,学者们在研究机械动力系统相关特性时,常采用线性模型来简化替代非线性系统,但实际结果表明,线性化在分析计算中有时会导致较大的误差,甚至远远偏离实际,因此开始关注机械系统中的非线性问题.Duffing 系统便是 Duffing 于 1918 年描述机械系统中弹簧硬化效应而建立的一类典型动力系统,随后,许多学者开始研究 Duffing 系统的解与相关非线性现象.1979 年到 1980 年, Moon 和 Holmes 为了探索两个永磁铁置于不同场中,其中一个支架受迫振动的情形,研究了形如 $\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = f\cos(\omega t)$ 的 Duffing 方程^[1-2].1981 年, Holmes 等又研究了该方程中线性项为负的情形^[3],而后 Lazer 等给出了形如 $\ddot{x} + \delta\dot{x} + g(t, x) = 0$ 的周期解^[4].在此基础上,研究人员证明了一类 Duffing 系统解的存在性与唯一性^[5],给出了一类广义 Duffing 振子随机振动的近似解^[6].在此期间,学者发现 Duffing 方程在振动幅频问题中存在诸如参数共振、超亚谐波共振、组合共振、跳跃等丰富的非线性现象^[7-8].而自 Lorenz^[9] 在研究天气预报的准确性中发现了非线性系统的混沌现象后,非线性研究进入了一个新领域.文献[10]表明 Duffing 系统可由对称破缺变化到倍周期分岔,随后经跳跃进入混沌;Stagliano 等^[11]观察到随着一定参数变化时,两自由度 Duffing 系统会出现倍周期分岔;Huang 等^[12]给出了周期或拟周期情形下系统出现混沌的存在准则;文献[13-15]也从不同角度研究了含有 Duffing 振子

* 收稿日期: 2018-09-04; 修订日期: 2018-11-28

基金项目: 2018 年度江西省教育厅科学技术研究资助项目(GJJ181061)

作者简介: 彭荣荣(1987—),男,讲师,硕士(E-mail: 15294476178@163.com).

的非线性动力系统的分岔与混沌特性.目前 Duffing 系统的非线性特性已被广泛应用于机械、水利^[16]、结构材料^[17]、通信^[18]等工程学科及力学、电子学、噪声^[19]等理论学科中,解决了很多实际问题,且伴随着科技、数值模拟及图形处理的进步,Duffing 系统的研究正从简单到复杂、低维向高维发展.

虽然到目前为止,学者们对 Duffing 系统的研究已取得很大的成果,但对含有更高次项非线性 Duffing 系统研究还较少.本文考虑一类含有外激力项和五次非线性恢复力的 Duffing 系统,运用多尺度法求解该系统的响应方程,给出了不同参数对系统幅频的影响,同时通过奇异性理论分析该系统的静态分岔特性,其次利用 Melnikov 方法获得系统进入混沌的必要条件.最后通过数值仿真分析了系统在不同参数下的动态分岔与混沌特性,且利用相关非线性方法验证了理论的正确性.

1 系统响应求解及共振特性分析

本文考虑一类含有外激力和五次非线性恢复力的 Duffing 系统:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 + \beta x^5 = F \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中, c 为阻尼系数, ω_0 为系统的固有频率, ω 为受迫激励频率,且有 $\omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma$, ε 为小量, σ 为调谐参数, $F \cos(\omega t)$ 为受迫系统的周期性激励, F 为外激力, α, β 分别为三次和五次非线性项系数,且均为实数.

采用在诸多领域中广泛应用的多尺度法求解系统响应,引入不同尺度的时间函数 $T_0 = t$ 和 $T_1 = \varepsilon t$, 讨论一次近似解,令

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1). \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),展开后令小量 ε 的同次幂系数相等,得到

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (3)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - c D_0 x_0 - \alpha x_0^3 - \beta x_0^5 + F \cos(\omega(T_0 + \sigma T_1)), \quad (4)$$

其中 $D_n = \partial/\partial T_n$ (此处取 $n = 0, 1$).将方程(2)的解设为复数形式:

$$x_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (5)$$

将式(5)代入一次近似方程(4)的右边,可得

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = (-2i\omega_0 D_1 A - ic\omega_0 A - 3\alpha A^2 \bar{A} - 10\beta A^3 \bar{A}^2) e^{i\omega_0 T_0} - \beta A^5 e^{5i\omega_0 T_0} - (\alpha A^3 + 5\beta A^4 \bar{A}) e^{3i\omega_0 T_0} + cc, \quad (6)$$

其中, cc 为右边各项的共轭复数.为避免出现久期项,要求

$$-2i\omega_0 D_1 A - ic\omega_0 A - 3\alpha A^2 \bar{A} - 10\beta A^3 \bar{A}^2 + \frac{F e^{i\sigma T_1}}{2} = 0. \quad (7)$$

将复函数 A 写为指数形式 $A(t) = (1/2)a(t)e^{i\theta(t)}$, $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 皆为实函数,将其代入式(7)并将实部与虚部分离,得到 a 和 θ 的一阶常微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{2}ca + \frac{F}{2\omega_0} \sin \gamma, \\ a\gamma\dot{a} = \sigma a - \frac{3}{8}\frac{\alpha}{\omega_0}a^3 - \frac{5}{16}\frac{\beta}{\omega_0}a^5 + \frac{F}{2\omega_0} \cos \gamma, \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\gamma = \sigma T_1 - \theta$.令 $\dot{a} = \gamma\dot{a} = 0$, 可得五次非线性恢复力 Duffing 系统的幅频响应方程为

$$\left[c^2 + \left(-2\sigma + \frac{3\alpha a^2}{4\omega_0} + \frac{5}{8\omega_0} \beta a^4 \right)^2 \right] a^2 = \frac{F^2}{\omega_0^2}. \quad (9)$$

取一组基本参数: $c = 1.80, \alpha = 0.20, \beta = 0.65, F = 0.22, \omega_0 = 1.00$, 通过仿真得到系统不同参数变化下的幅频曲线, 见图 1~4.

图 1 是阻尼系数 c 对系统幅频曲线的影响, 系统的骨架基本为直线, 随着阻尼系数的增大, 系统的受迫振幅随之减小, 说明线性项系数对系统的共振影响较小.

图 2 是三次非线性项系数 α 对系统幅频曲线的影响, 可看出随着 α 的变化, 系统的幅频特性曲线并非单值, 比如在 $\sigma \in (0.4, 0.8)$ 区域内, 同一 σ 对应于振幅的 3 个不同值, 系统将发生跳跃现象, 且随着其增大, 振幅及共振区域随着变大.

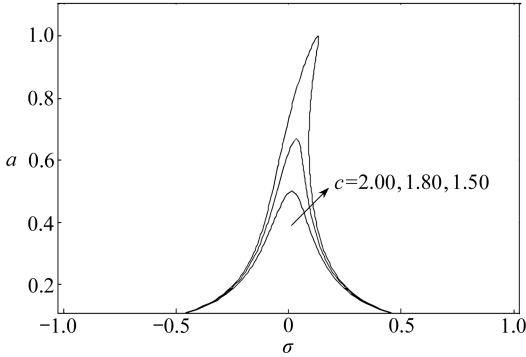


图 1 线性阻尼系数 c 对系统的影响

Fig. 1 The influence of linear damping coefficient c on the system

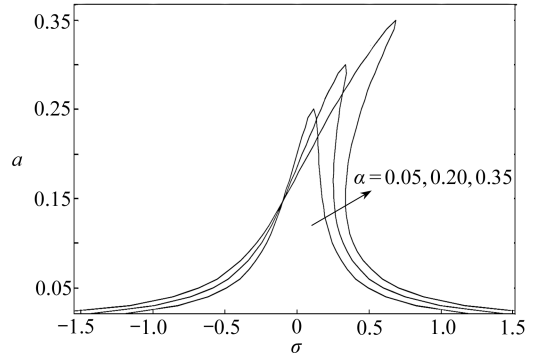


图 2 三次非线性项系数 α 对系统的影响

Fig. 2 The influence of cubic nonlinear coefficient α on the system

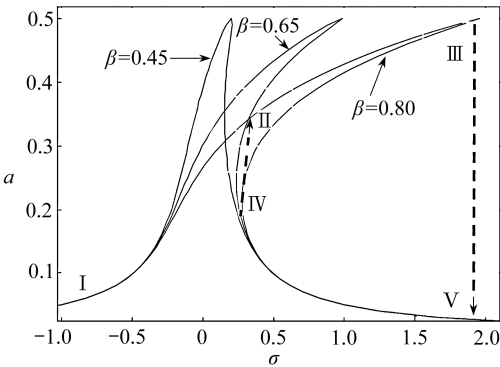


图 3 五次非线性项系数 β 对系统的影响

Fig. 3 The influence of quintic nonlinear coefficient β on the system

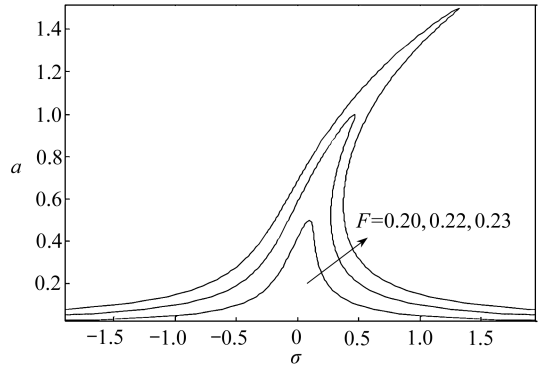


图 4 外激力 F 对系统的影响

Fig. 4 The influence of excitation amplitude F on the system

图 3 为随五次非线性项系数 β 变化的系统幅频曲线图, 由图可知, β 的变化对系统的振幅无影响, 但也发生了非线性系统特有的现象之一, 即跳跃现象. 具体为: 当 σ 开始缓慢增大时, 受迫振幅从 I 处沿幅频曲线连续变化至 III 处, 再增大 σ , 则振幅从 III 处突降至 V 处; 若调谐参数 σ 逐渐减小时, 振幅从 V 处开始沿曲线的下半分支变化至 IV 处, 再减小 σ , 振幅将从 IV 处突跃至 II 处, 然后沿曲线的上半分支从 II 处向 I 处移动, 因此受迫振幅在 III~IV 段的振动是不稳定的. 这说明五次非线性项系数 β 对整个系统具有很大的影响. 在各种实际系统中, 应当尽量使 β 的取值合适, 从而保证系统的平稳运行或工作.

从图 4 中可以看出, 随着外激力 F 的增大, 振幅随之增大, 且曲线骨架朝调谐参数增大的方向弯曲, 系统的振动区域随之增大. 且从数值上可看出, 当 F 从 0.20 变化至 0.23 时, 系统的

振幅从 0.42 剧烈地增加到 1.48,说明外激力 F 是造成系统发生剧烈共振的主要原因之一。

2 静态分岔特性分析

运用奇异性理论来分析该非线性系统的静态分岔特性.将式(9)进行转换,得到系统的静态分岔方程:

$$l_5 a^{10} + l_4 a^8 + l_3 a^6 + l_2 a^4 + l_1 a^2 + l_0 = 0, \tag{10}$$

式中

$$l_5 = \frac{25}{64} \beta^2, l_4 = \frac{15}{16} \alpha \beta, l_3 = \frac{9}{16} \alpha - \frac{5}{2} \omega_0 \sigma \beta, l_2 = -3 \omega_0 \sigma \alpha,$$

$$l_1 = \omega_0^2 (c^2 + 4\sigma^2), l_0 = -F^2.$$

令 $b = a^2$, 则式(10)可化为

$$l_5 b^5 + l_4 b^4 + l_3 b^3 + l_2 b^2 + l_1 b + l_0 = 0. \tag{11}$$

对式(11)进行线性变换 $b = \mu - l_4/(5l_5)$, 且令 $\kappa_i = l_i/l_5 (i = 0, 1, \dots, 4)$, 则式(11)可转换为余维 3 的分岔静态方程:

$$\mu^5 + \lambda + \delta_1 \mu + \delta_2 \mu^2 + \delta_3 \mu^3 = 0, \tag{12}$$

其中

$$\delta_3 = -\frac{2}{5} \kappa_4^2 + \kappa_3, \delta_2 = -\frac{2}{25} \kappa_4^3 - \frac{3}{5} \kappa_4 \kappa_3 + \kappa_2,$$

$$\delta_1 = -\frac{3}{125} \kappa_4^4 + \frac{3}{25} \kappa_4^2 \kappa_3 + \frac{2}{5} \kappa_4 \kappa_2 + \kappa_1,$$

$$\lambda = \frac{4}{3 \cdot 125} \kappa_4^5 - \frac{1}{125} \kappa_4^3 \kappa_3 + \frac{1}{25} \kappa_4^2 \kappa_2 - \frac{1}{5} \kappa_4 \kappa_1 + \kappa_0.$$

式(12)是 GS 范式 $\mu^5 + \lambda$ 的普适开折,是余维 3 的五次滞后点, $\delta_3, \delta_2, \delta_1$ 是开折参数, λ 是分岔参数.由于难以在三维空间中直观表示该系统的转迁集,因此下面分 3 种情形讨论其在不同参数空间内二维投影平面上的静态分岔特性。

① $\delta_3 = 0$

当 $\delta_3 = 0$ 时,可得系统分岔点集 $B = \emptyset$ (\emptyset 为空集),滞后点集

$$H = \left\{ \delta_1 = \frac{3}{2} \delta_2 \left(\frac{\delta_2}{10} \right)^{1/3} \right\},$$

双极限点集 $D = \emptyset$, 则系统转迁集 $\Sigma = B \cup H \cup D$.其结果如图 5、6 所示。

② $\delta_2 = 0$

当 $\delta_2 = 0$ 时,可得系统分岔点集 $B = \emptyset$, 滞后点集

$$H = \left\{ \delta_1 = \frac{9}{20} \delta_3^2 \right\},$$

双极限点集 $D = \emptyset$, 则系统转迁集 $\Sigma = B \cup H \cup D$.其结果如图 7、8 所示。

③ $\delta_1 = 0$

当 $\delta_1 = 0$ 时,可得系统分岔点集: $B = \emptyset$; 滞后点集

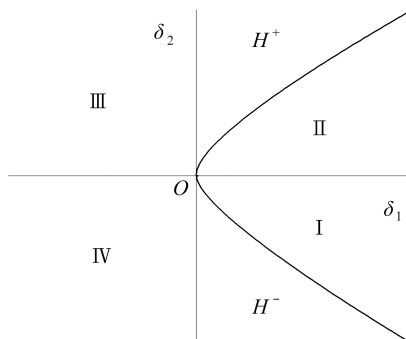


图 5 $\delta_3 = 0$ 时的转迁集
Fig. 5 The transition set for $\delta_3 = 0$

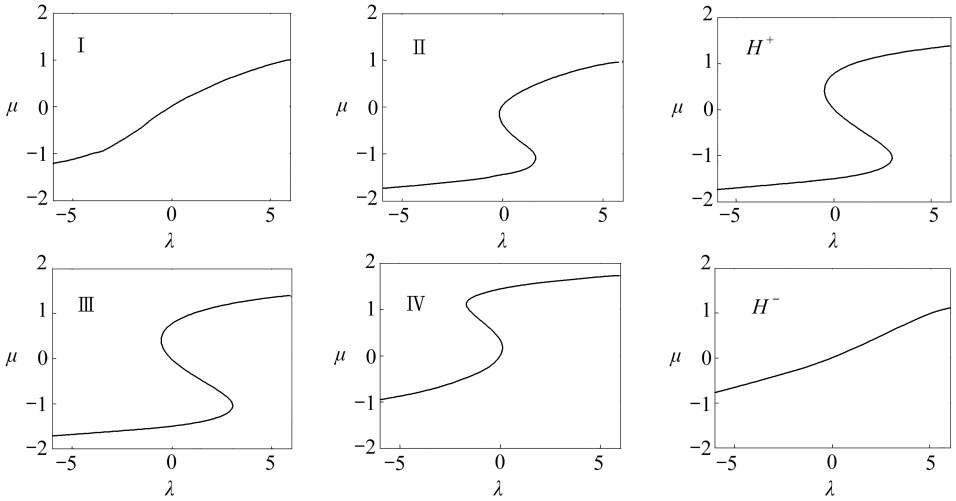


图 6 分岔曲线拓扑结构

Fig. 6 The topological structure of bifurcation curves

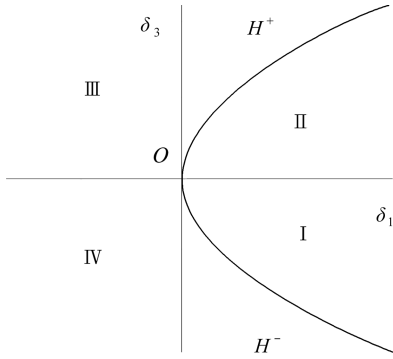


图 7 $\delta_2 = 0$ 时的转迁集

Fig. 7 The transition set for $\delta_2 = 0$

$$H = \left\{ \delta_2^2 = -\frac{1}{5} \delta_3^3 \right\},$$

双极限点集 $D = \emptyset$, 则系统转迁集 $\Sigma = B \cup H \cup D$, 其结果如图 9、10 所示。

从图 5、7、9 可以看出, 转迁集将开折参数空间分成若干个子区域, 在每个子区间分岔拓扑曲线形态各异, 分岔特性丰富, 以 $\delta_3 = 0$ 时的转迁集 (图 5) 及其分岔拓扑结构 (图 6) 为例, 可看出, 转迁集将 δ_1 - δ_2 组成的开折空间分成 4 个子区域, 在每个子区域中, 分岔形态相似, 即退化是持久的, 在不同区域, 分岔形态完全不相同, 即退化是不持久的。

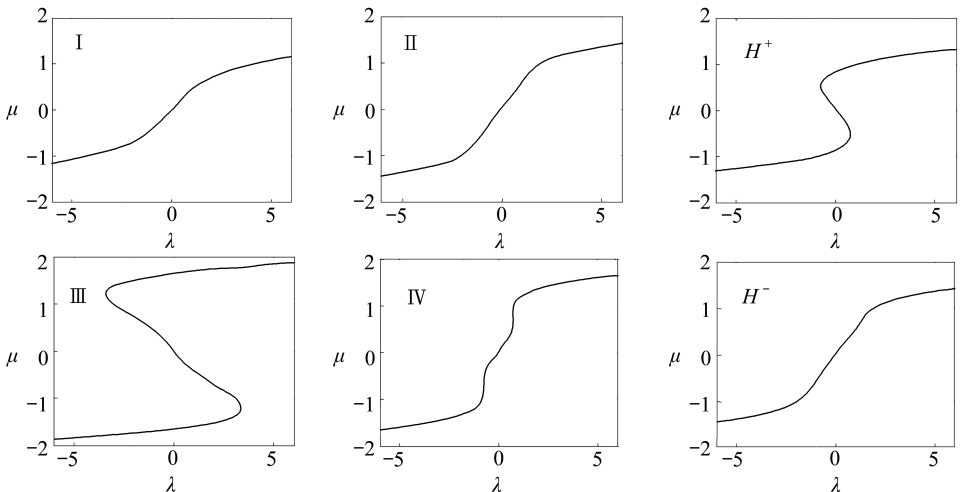


图 8 分岔曲线拓扑结构

Fig. 8 The topological structure of bifurcation curves

在图 6 的 I 区中,系统不存在跳跃现象,在 III、IV 区中,一个分岔参数 λ 对应多个 μ , 即受到非线性参数扰动后出现的分岔性将会变多,从而发生跳跃现象.因此可以改变开折参数,即通过改变相关的非线性参数来改变系统的的动力学行为.

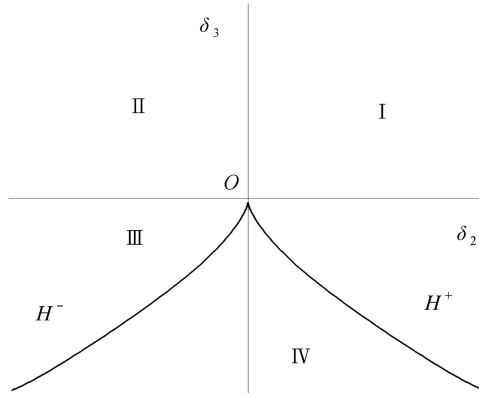


图 9 $\delta_1 = 0$ 时的转迁集

Fig. 9 The transition set for $\delta_1 = 0$

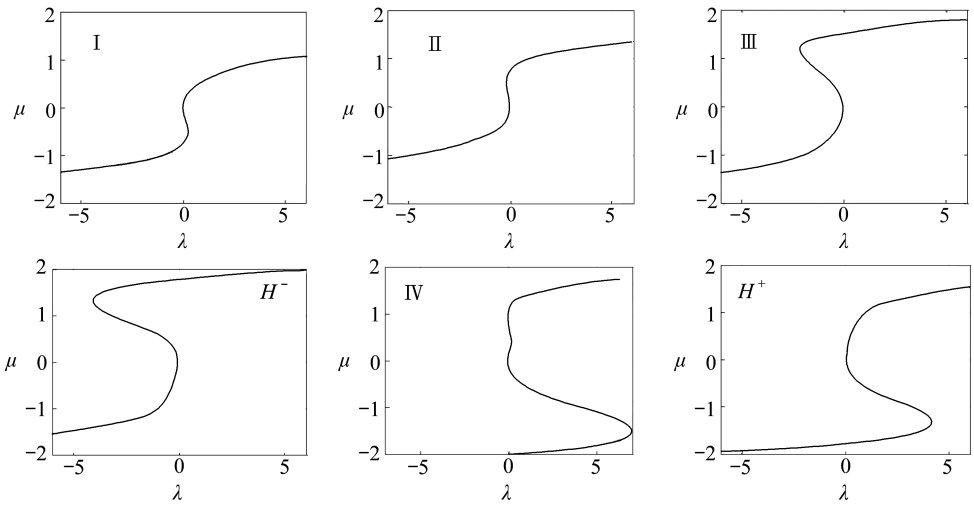


图 10 分岔曲线拓扑结构

Fig. 10 The topological structure of bifurcation curves

3 系统动态分岔与混沌运动分析

3.1 系统不动点分析及异宿轨道求解

令 $\dot{x} = y$, 则式(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ y = -\omega_0^2 x - \alpha x^3 - \beta x^5 - cy + F \cos(\omega t). \end{cases} \quad (13)$$

非线性项前冠以小参数 ξ , 则上式可化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ y = -\omega_0^2 x - \alpha x^3 - \beta x^5 + \xi(F \cos(\omega t) - cy). \end{cases} \quad (14)$$

当小参数 $\xi = 0$, 未扰系统的 Hamilton 量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \alpha x^4 + \frac{1}{6} \beta x^6 = h, \quad (15)$$

其中 h 为常数.

系统(13)的不动点 $(x, 0)$ 必须满足

$$-\omega_0^2 x - \alpha x^3 - \beta x^5 = 0. \quad (16)$$

本文主要考虑 $\alpha < 0, \beta > 0$ 的非线性恢复力情形,由式(16)的根分析系统不动点的稳定性,可知当 $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha\omega_0^2 > 0$ 时,系统(13)有 5 个不动点,其中 $(0, 0)$, $\left(\sqrt{\frac{-\alpha^2 - N}{2\beta}}, 0\right)$ 和 $\left(-\sqrt{\frac{-\alpha^2 - N}{2\beta}}, 0\right)$ 是中心点, $\left(\sqrt{\frac{-\alpha^2 + N}{2\beta}}, 0\right)$ 和 $\left(-\sqrt{\frac{-\alpha^2 + N}{2\beta}}, 0\right)$ 是鞍点 ($N = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}$).故未扰系统有两条异宿轨,其相平面如图 11 所示.

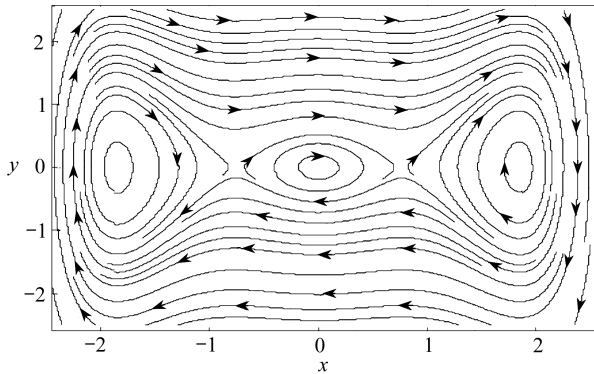


图 11 系统(13)的相平面

Fig. 11 The phase plane of system (13)

通过积分可得到连接两个鞍点的两条异宿轨为

$$x_{\pm}^0(t) = \frac{\sqrt{2} G \sinh(Tt/2)}{\sqrt{-v + \cosh(Tt)}}, \quad y_{\pm}^0(t) = \frac{TG\sqrt{2}(1-v) \cosh(Tt/2)}{2(-v + \cosh(Tt))^{3/2}}, \quad (17)$$

其中

$$G = \sqrt{-\frac{\alpha - N}{2\beta}}, \quad T = G^2 \sqrt{2\beta(M^2 - 1)}, \quad M^2 = \frac{\alpha - N}{\alpha + N}, \quad v = \frac{5 - 3M^2}{3M^2 - 1}.$$

3.2 混沌阈值求解及预测

式(17)对应的 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{q}_{\pm}^0) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{q}_{\pm}^0(t), t + t_0), \quad (18)$$

其中, \wedge 为合取符号,且

$$\mathbf{q}_{\pm}^0(t) = \begin{pmatrix} x_{\pm}^0 \\ y_{\pm}^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}_{\pm}^0(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0^2 x_{\pm}^0 - \alpha [x_{\pm}^0(t)]^3 - \beta [x_{\pm}^0(t)]^5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_{\pm}^0(t), t + t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cy_{\pm}^0(t) + F \cos(\omega(t + t_0)) \end{pmatrix}.$$

因此,有

$$M_{\pm}(t_0) = -cI_1 + FI_2 \cos(\omega t_0), \tag{19}$$

其中

$$I_1 = \frac{G^2 T}{2(1+v)} \left((v+2) + \frac{\arcsin v + \pi/2}{\sqrt{1-v}} (1+2v) \right), I_2 = \frac{2G\pi\omega}{T \sinh(\pi\omega/T)}.$$

由 $M_{\pm}(t_0) = 0$ 得

$$\cos(\omega t_0) = \pm \frac{cI_1}{FI_2}. \tag{20}$$

要使这个方程有解, 必须有 $cI_1/(FI_2) < 1$, 在此条件下, 记方程(20)的解为 t_0^{\pm} , 即有 $M_{\pm}(t_0^{\pm}) = 0$, 又因为

$$M'_{\pm}(t_0^{\pm}) = \mp \omega FI_2 \sin(\omega t_0^{\pm}) \neq 0, \tag{21}$$

所以 t_0^{\pm} 是简单零点, 故当 $F/c > I_2/I_1$ 时, 系统具有 Smale 马蹄意义下的混沌.

4 系统动态分岔与混沌特性仿真分析

动态分岔及混沌是非线性系统特有的一种运动形式, 通过数值仿真分析该系统的混沌特性, 本文取一组基本参数: $c = 1.80, \alpha = -0.20, \beta = 0.65, F = 0.22, \omega_0 = \omega = 1.0$, 初始值取 $(0.20, -0.01)$.

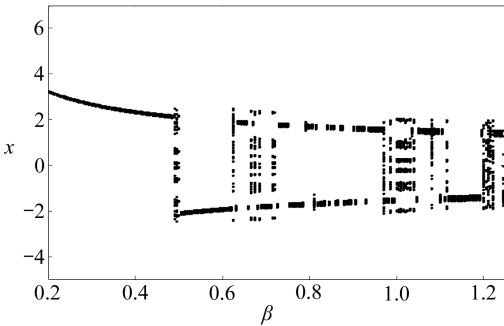


图 12 系统随五次非线性项系数 β 变化的动态分岔图

Fig. 12 The dynamic bifurcation diagram with quintic nonlinear coefficient β of the system

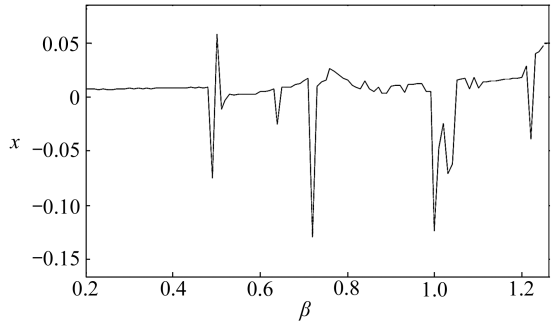
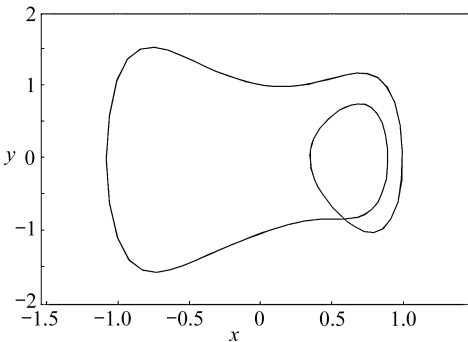
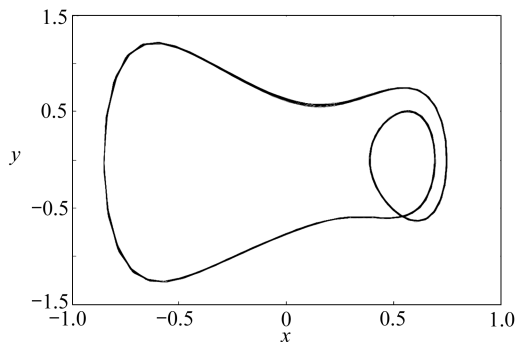


图 13 系统随五次非线性项系数 β 变化的最大 Lyapunov 指数

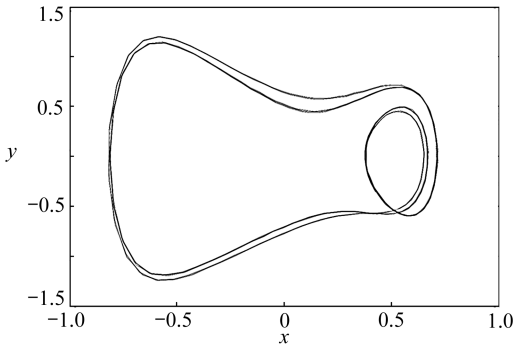
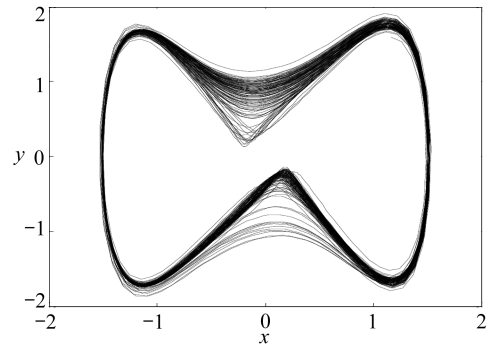
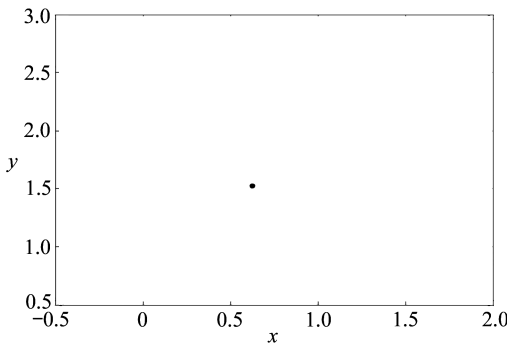
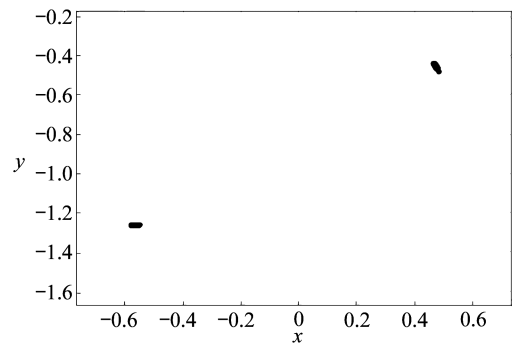
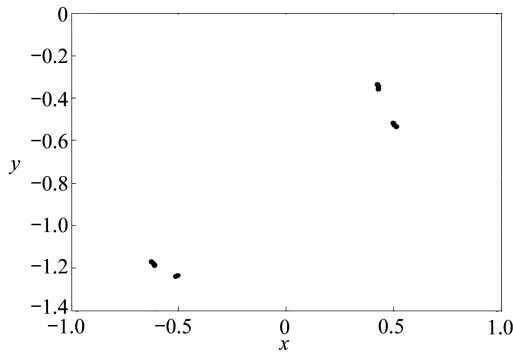
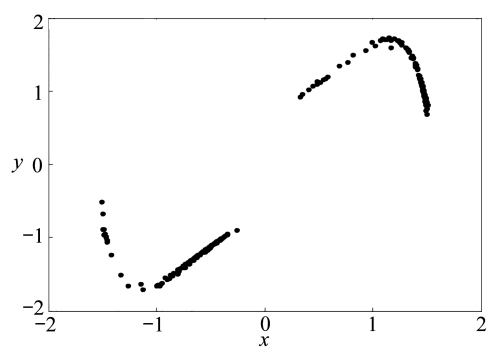
Fig. 13 The maximum Lyapunov exponent changing with quintic nonlinear coefficient β of the system



(a) $\beta = 0.45$



(b) $\beta = 0.88$

(c) $\beta = 1.05$ (d) $\beta = 1.22$ 图 14 系统随五次非线性项系数 β 变化的相轨图Fig. 14 The phase diagram changing with quintic nonlinear coefficient β of the system(a) $\beta = 0.45$ (b) $\beta = 0.88$ (c) $\beta = 1.05$ (d) $\beta = 1.22$ 图 15 系统随五次非线性项系数 β 变化的 Poincaré 截面Fig. 15 The Poincaré sections changing with quintic nonlinear coefficient β of the system

4.1 五次非线性项 β 变化时系统的分岔特性分析

图 12 是该 Duffing 系统随五次非线性项系数 β 变化的动态分岔图,图 13 是其对应的最大 Lyapunov 指数,图 14 为其相应的相轨图,图 15 为其对应的 Poincaré 截面。

4.2 外激励 F 变化时系统的分岔特性分析

由动态分岔(图 16)及最大 Lyapunov 指数曲线(图 17)可看出,随着 F 的变化,系统通向混沌的路径:周期 5 运动→阵发性混沌→混沌运动→退化为阵发性混沌→退化为周期 2 运动。

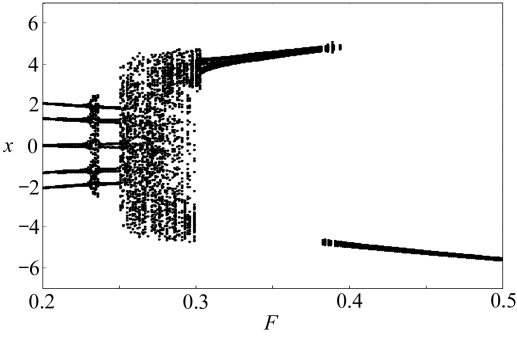


图 16 系统随外激励 F 变化的动态分岔图

Fig. 16 The dynamic bifurcation diagram with excitation amplitude F of the system

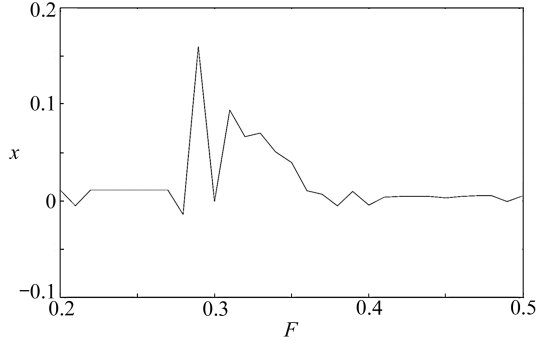
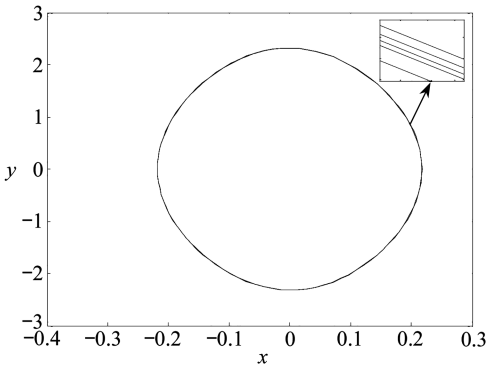
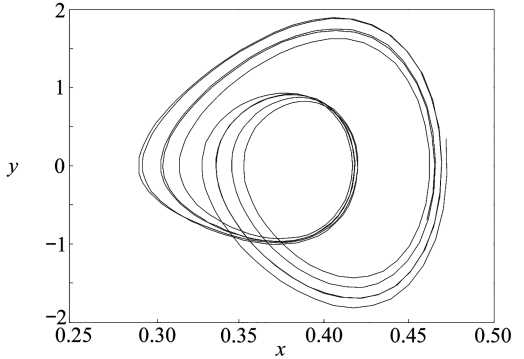


图 17 系统随外激励 F 变化的最大 Lyapunov 指数

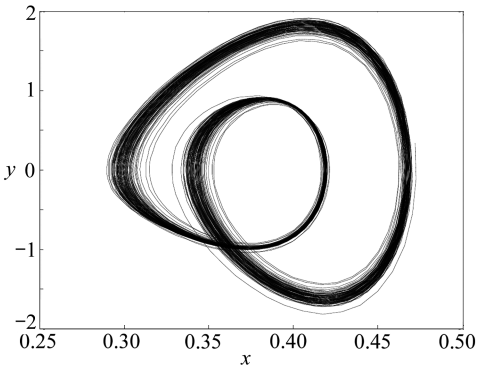
Fig. 17 The maximum Lyapunov exponent changing with excitation amplitude F of the system



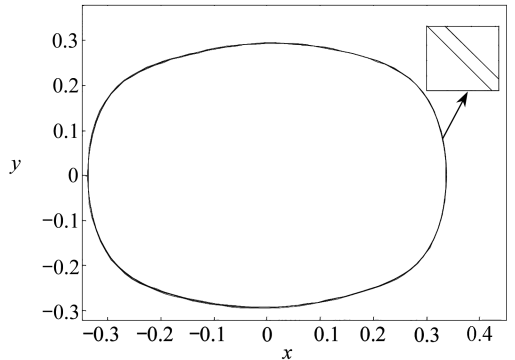
(a) $F = 0.21$



(b) $F = 0.25$



(c) $F = 0.28$



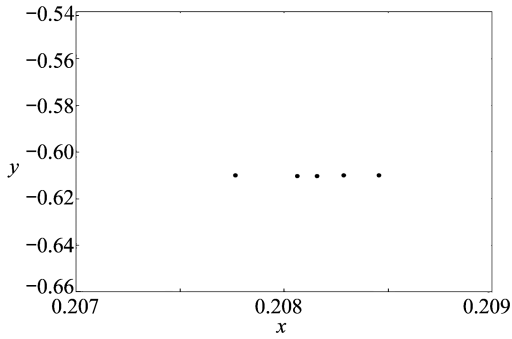
(d) $F = 0.40$

图 18 系统随外激励 F 变化的相轨图

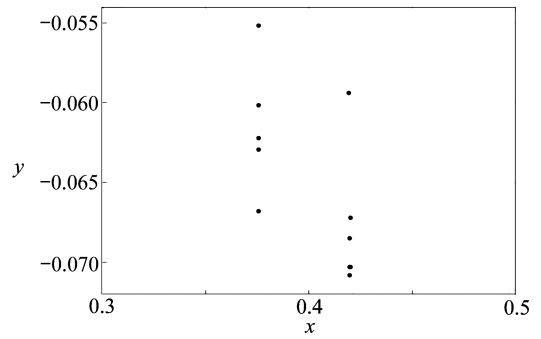
Fig. 18 The phase diagram changing with excitation amplitude F of the system

图 18 为系统随 F 变化的相轨图.当 $F = 0.21$ 时,系统为周期 5 运动,见图 18(a)中的局部放大图,为 5 条闭合的曲线,对应的 Poincaré 截面为 5 个点(图 19(a));当 $F = 0.25$ 时,系统进入周期 10 的运动,其相轨迹是一条自相交的十轨道封闭曲线(图 18(b)),对应的 Poincaré 截面为图 19(b);随后系统由阵发性混沌进入混沌运动,此时系统所对应的相轨迹是图 18(c),是一组不封闭的曲线,说明此时系统不具有周期性,对应的 Poincaré 截面是图 19(c);随后在

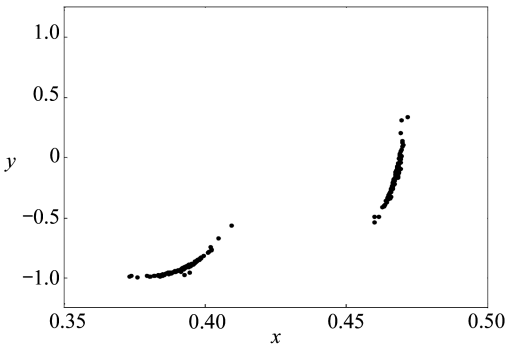
$F = 0.40$ 时,系统退化为周期 2 运动(图 19(d)).



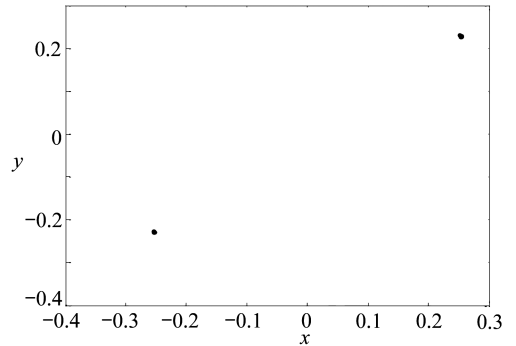
(a) $F = 0.21$



(b) $F = 0.25$



(c) $F = 0.28$



(d) $F = 0.40$

图 19 系统随外激力 F 变化的 Poincaré 截面

Fig. 19 The Poincaré sections changing with excitation amplitude F of the system

5 结 论

考虑一类含有外激力和五次非线性恢复力的 Duffing 系统,运用多尺度法求解得到该系统的幅频响应方程,给出阻尼系数 c 、三次非线性项系数 α 、五次非线性项系数 β 和外激力 F 变化时的幅频特性曲线,同时运用奇异性理论分析该系统的静态分岔特性,并讨论了 3 种情形下的转迁集与对应拓扑曲线结构.其次运用 Hamilton 函数得到该系统的异宿轨道,且利用 Melnikov 方法获得该系统进入混沌的必要条件,最后运用数值仿真,得到了系统随五次非线性项系数和外激力变化下的分岔与混沌,发现这两个参数可以使系统进入混沌.本文的研究为进一步探讨具有高次非线性项的 Duffing 系统提供了一定的理论参考,对于解决工程实际问题也具有一定的现实意义.

参考文献(References):

- [1] MOON F C, HOLMES P J. A magnetoelastic strange attractor[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, **65**(2): 285-296.
- [2] MOON F C, HOLMES P J. Addendum: a magnetoelastic strange attractor[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1980, **69**(2): 339.
- [3] HOLMES C, HOLMES P. Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, **78**(2): 161-174.

- [4] LAZER A C, MCKENNA P J. On the existence of stable periodic solutions of differential equations of Duffing type[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1990, **110**: 125-133.
- [5] 王坤, 关新平, 丁喜锋, 等. Duffing 振子系统周期解的唯一性与精确周期信号的获取方法[J]. 物理学报, 2010, **59**(10): 6859-6863. (WANG Kun, GUAN Xinping, DING Xifeng, et al. Acquisition method of precise periodic signal and uniqueness of periodic solutions of Duffing oscillator system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(10): 6859-6863. (in Chinese))
- [6] 韩祥临, 林万涛, 许永红, 等. 广义 Duffing 扰动振子随机共振机理的渐近解[J]. 物理学报, 2014, **63**(17): 35-39. (HAN Xianglin, LIN Wantao, XU Yonghong, et al. Asymptotic solution to the generalized Duffing equation for disturbed oscillator in stochastic resonance[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(17): 35-39. (in Chinese))
- [7] YAGASAKI K. Homoclinic tangles, phase locking, and chaos in a two-frequency perturbation of Duffing's equation[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 1999, **9**(1): 131-148.
- [8] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001. (LIU Yanzhu, CHEN Liqun. *Nonlinear Vibrations*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese))
- [9] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, **20**: 130-141.
- [10] NOVAK S, FREHLICH R G. Transition to chaos in the Duffing oscillator[J]. *Physical Review*, 1982, **26**(6): 3660-3663.
- [11] STAGLIANO J J, WERSINGER J M, SLAMINKA E E. Doubling bifurcation of destroyed T^2 tori [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1996, **92**(3/4): 164-177.
- [12] HUANG J, JING Z. Bifurcation and chaos in the three-well Duffing equation with one external forcing[J]. *Chaos Solition and Fractals*, 2009, **40**(3): 1449-1466.
- [13] 侯东晓, 赵红旭, 刘彬. 一类含 Mathieu-Duffing 振子的相对转动系统的分岔和混沌[J]. 物理学报, 2013, **62**(23): 232-242. (HOU Dongxiao, ZHAO Hongxu, LIU Bin. Bifurcation and chaos in some relative rotation systems with Mathieu-Duffing oscillator[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(23): 232-242. (in Chinese))
- [14] 张莹, 都琳, 岳晓乐, 等. 随机参数作用下参激双势阱 Duffing 系统的随机动力学行为分析[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1198-1207. (ZHANG Ying, DU Lin, YUE Xiaole, et al. Stochastic nonlinear dynamics analysis of double-well Duffing systems under random parametric excitations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(11): 1198-1207. (in Chinese))
- [15] 张艳龙, 王丽, 石建飞. Duffing 系统在双参数平面上的分岔演化过程[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 324-333. (ZHANG Yanlong, WANG Li, SHI Jianfei. Bifurcation evolution of Duffing systems on 2-parameter planes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 324-333. (in Chinese))
- [16] 姚海洋, 王海燕, 张之深, 等. 一种基于广义 Duffing 振子的水中弱目标检测方法[J]. 物理学报, 2017, **66**(12): 227-238. (YAO Haiyang, WANG Haiyan, ZHANG Zhishen, et al. A method of detecting underwater weak target based on generalized Duffing oscillator[J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, **66**(12): 227-238. (in Chinese))
- [17] 刘莉, 徐伟, 岳晓乐, 等. 一类含非黏滞阻尼的 Duffing 单边碰撞系统的激变研究[J]. 物理学报, 2013, **62**(20): 200501. (LIU Li, XU Wei, YUE Xiaole, et al. Global analysis of crises in a Duffing vibro-impact oscillator with non-viscously damping[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(20): 200501. (in Chinese))

- [18] 唐友福, 刘树林, 雷娜, 等. 基于广义局部频率的 Duffing 系统频域特征分析[J]. 物理学报, 2012, **61**(17): 67-75. (TANG Youfu, LIU Shulin, LEI Na, et al. Feature analysis in frequency domain of Duffing system based on general local frequency[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(17): 67-75. (in Chinese))
- [19] RONG H W, XU W, FANG T. Principal response of Duffing oscillator to combined deterministic and narrow-band random parametric excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **210**(4): 483-515.

Analysis of Resonance and Bifurcation Characteristics of Some Duffing Systems With Quintic Nonlinear Restoring Forces

PENG Rongrong

(*School of Sciences, Nanchang Institute of Science & Technology,
Nanchang 330108, P.R.China*)

Abstract: Some Duffing systems with external excitation and quintic nonlinear restoring forces were considered, the amplitude-frequency response equation for the system was obtained with the multi-scale method, and the amplitude-frequency characteristic curves and their changing rules under different parameter changes were given. At the same time, the singularity theory was applied to get the transition sets and the corresponding topological structures of the system in 3 cases. Second, the fixed point of the system was determined, and the Hamiltonian function was used to get the heteroclinic orbit of the system, so the threshold of chaos in the Smale horseshoe sense was obtained with the Melnikov method. Then, the dynamic bifurcation and chaotic behavior of the system under external excitation and quintic nonlinear coefficients were given through numerical simulation. It is found that there are nonlinear phenomena such as periodic motion, period doubling motion, quasi periodic motion and chaos. The correctness of the theory was verified with nonlinear methods such as the Lyapunov exponent, the phase diagram and the Poincaré sections. The work provides a theoretical reference for further understanding of the nonlinear characteristics of Duffing systems and their evolution laws.

Key words: Duffing system; quintic nonlinearity; bifurcation; chaos

引用本文/Cite this paper:

彭荣荣. 一类含五次非线性恢复力的 Duffing 系统共振与分岔特性分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(10): 1122-1134.

PENG Rongrong. Analysis of resonance and bifurcation characteristics of some Duffing systems with quintic nonlinear restoring forces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(10): 1122-1134.