文章编号:1000-0887(2019)06-0663-19

立方 Schrödinger 方程的半隐格式 BDF2-FEM 无条件最优误差估计*

代　猛，　尹小艳

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

摘要： 研究了立方 Schrödinger 方程的二阶向后差分有限元方法(BDF2-FEM)的无条件最优误差估计.首先,将误差分为时间误差和空间误差两部分.通过引入时间离散方程,得到时间离散方程解的一致有界性,并给出时间误差估计.从而得到该方程在半隐格式下 BDF2-FEM 无条件最优误差估计.最后,用数值算例验证了理论分析.

关 键 词： 无条件收敛； 向后 Euler 法； Galerkin 有限元方法； Schrödinger 方程

中图分类号： O241.82　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.390209

引　　言

非线性 Schrödinger 方程是一个经典偏微分方程,该方程是孤立子理论中最重要的可积模型,广泛应用在物理中的许多领域,例如,非线性光学、等离子体物理学[1-2].Li 和 Sun(李步扬、孙伟伟)在分析非线性抛物型方程半隐格式 Galerkin 有限元方法的最优误差估计[3-4]中提出了一种新的分析误差的方法,通过引入一个时间离散方程,把非线性抛物型方程的误差分为时间误差和空间误差两部分,通过分析该时间离散方程,得到了强范数下时间离散方程解的一致有界性,进而得到了全离散有限元解的一致有界性,最后得出最优误差估计是无条件稳定的.最近,该方法也被用于讨论非线性 Schrödinger 方程,由向后 Euler 方法(BDF)研究该方程,向后 Euler 法常用于分析常微分方程(ODEs)[5],该方法具有稳定、迭代简单的优点.向后 Euler 法目前也用于解决偏微分方程(PDEs)[6].Cai(蔡文涛)等将该误差分析技巧应用到非线性 Schrödinger 方程中,给出了在 L^2 范数下的半隐格式向后 Euler 有限元方法的无条件最优误差估计[7]和全显格式下的 BDF2-FEM 的无条件最优误差估计[8],并得到最优误差估计对时间步长无强制条件,进一步说明了该最优误差估计是无条件收敛的,并将该分析方法推广到其他的非线性抛物型方程.基于这种分析技巧并综合向后 Euler 法和 BDF2 两种离散格式,本文利用半隐格式 BDF2-FEM 分析该方程的最优误差估计,通过引入一个时间离散方程,将误差分为时间误差和空间误差两部分,得到强范数下时间离散方程解的一致有界性,进而得到全离散有限元解的一致有界性,从而得到立方 Schrödinger 方程在 L^2 范数下的无条件最优误差估计,且

* **收稿日期：** 2018-07-31；**修订日期：** 2019-04-13
基金项目： 国家自然科学基金(面上项目)(11771259);中央高校基础科研业务费(JB180714)
作者简介： 代猛(1993—), 男, 硕士生(E-mail: dm1614720343@163.com);
尹小艳(1979—), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: xyyin@mail.xidian.edu.cn).

在半隐格式下的 BDF2-Galerkin FEM[9] 最优误差估计对时间步长无强制条件.相比较以前的工作,该分析方法是无条件收敛的,对时间步长无约束条件,并降低了计算的复杂度.进一步地,该方法可以推广到其他的非线性抛物型方程.

1　预 备 知 识

在这一节中,定义 Schrödinger 方程为

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \Delta u + (-|u|^2 + |u|^4)u = g, & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T, \\ u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 u 是定义在 $\Omega \times [0,T]$ 上的复值函数,$\Omega \subset R^2$ 为有界域,边界为 $\partial\Omega$.假设 $f:\mathbf{R} \longmapsto \mathbf{R}$ 是属于 $C^2(\mathbf{R})$ 的已知函数,g 为常函数.

令 Γ_h 是一个三角正则剖分,该剖分将区域 Ω 剖分成三角形 T_j, $j = 1,2,\cdots,M$ 的集合,且剖分尺度 $h = \max_j\{\mathrm{diam}\, T_j\}$.若 T_j 在边界上,则定义 $\tilde{T}_j$ 为曲边部分;若 T_j 为内部单元,则 $\tilde{T}_j = T_j$.由上述定义,有限元空间为

$$V_h = \{v_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})\};\ S_h = \{v_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})\},$$

式中 $v_h|_{T_j}$ 是次数为 r 的多项式,在 $\partial\Omega$ 上 $v_h = 0$;$v_h|_{\tilde{T}_j}$ 是次数为 r 的多项式;V_h 是 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间且 S_h 是 $H^1(\Omega)$ 的子空间.定义 $\varphi := \{\varphi v : \varphi v = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上;$\varphi v = v$ 在 T_j 上 $\forall v \in S_h\}$.令 F: $\mathbf{C}(\bar{\Omega}) \longmapsto S_h$ 为 Lebesgue 算子且赋值 $\Pi_h = \varphi F$,则 Π_h 是 $\mathbf{C}(\bar{\Omega}) \longmapsto V_h$ 的插值算子.

设 u,v 是 $L^2(\Omega)$ 内的复值函数,定义 L^2 内积空间为

$$(u,v) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\,\overline{v(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中 $\bar{v}$ 是 v 的共轭函数.由文献[10-11]中的插值方法,得

$$\|\Pi_h v - v\|_{L^2} + h\|\nabla(\Pi_h v - v)\|_{L^2} \leqslant Ch^{r+1}\|v\|_{H^{r+1}}, \qquad \forall v \in H^{r+1}(\Omega), \tag{2}$$

其中 C 是正常数.

定义 R_h: $H_0^1(\Omega) \longmapsto V_h$ 的 Ritz 投影算子,则

$$(\nabla(v - R_h v), \nabla w) = 0, \qquad \forall v,w \in V_h. \tag{3}$$

由文献[12-13]所述的有限元方法,得

$$\|v - R_h v\|_{L^2} + h\|\nabla(v - R_h v)\|_{L^2} \leqslant Ch^{r+1}\|v\|_{H^{r+1}}, \qquad \forall v \in H^{r+1}(\Omega). \tag{4}$$

定义逆不等式为

$$\|v\|_{L^\infty} \leqslant Ch^{-d/2}\|v\|_{L^2}, \qquad d = 2,3,\ v \in V_h. \tag{5}$$

令 τ 大于 0 为时间步长,$t^n = n\tau$,$n = 0,1,\cdots,N$ 是 $[0,T]$ 上的一个正则剖分,这里 $t^N = T$,定义 $u^n = u(x,t_n)$.对于序列 $\{y^n\}_{n=0}^N$ 定义二阶向后差分形式为

$$D_\tau y^n = \frac{1}{\tau}\left(\frac{3}{2}y^n - 2y^{n-1} + \frac{1}{2}y^{n-2}\right), \qquad n = 2,3,\cdots,N. \tag{6}$$

由 BDF2-Galerkin FEM 求解 Schrödinger 方程(1)的数值解 $U_h^n \in V_h$,得

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(D_\tau U_h^n, v_h) - (\nabla U_h^n, \nabla v_h) + (2(-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)U_h^n - \\ &\quad (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)U_h^n, v_h) = (g^n, v_h), \qquad n = 2,3,\cdots,N. \end{aligned} \tag{7}$$

对 $\forall v_h \in V_h$,在初值条件下,$U_h^0 = \Pi_h u_0$ 且 U_h^1 满足

$$\mathrm{i}\left(\frac{U_h^1 - U_h^0}{\tau}, v_h\right) - \left(\nabla\frac{U_h^1 + U_h^0}{2}, \nabla v_h\right) + \frac{1}{2}((-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4)U_h^1 +$$

$$(-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)U_h^1,v_h)=\left(\frac{g^1+g^0}{2},v_h\right),\qquad \forall v_h\in V_h, \tag{8}$$

这里

$$\mathrm{i}\left(\frac{U_h^{1*}-U_h^0}{\tau},v_h\right)-(\nabla U_h^{1*},\nabla v_h)+((-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)U_h^0,v_h)=(g^1,v_h),$$
$$\forall v_h\in V_h. \tag{9}$$

设 U^n 是上述时间半离散方程的解,则对于 $n=2,3,\cdots,N$, 有

$$\mathrm{i}D_\tau U^n+\Delta U^n+2(-|U^{n-1}|^2+|U^{n-1}|^4)U^n-$$
$$(-|U^{n-2}|^2+|U^{n-2}|^4)U^n=g^n. \tag{10}$$

边界条件为

$$\begin{cases}U^n(\boldsymbol{x})=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ n=2,3,\cdots,N,\\ U^0(\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega;\end{cases} \tag{11}$$

初值条件为

$$\mathrm{i}\,\frac{U^1-U^0}{\tau}+\Delta\left(\frac{U^1+U^0}{2}\right)+\frac{1}{2}((-|U^{1*}|^2+|U^{1*}|^4)U^1+$$
$$(-|U^0|^2+|U^0|^4)U^1)=\frac{g^1+g^0}{2}. \tag{12}$$

对 $\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,U^{1*}$ 定义为

$$\mathrm{i}\,\frac{U^{1*}-U^0}{\tau}+\Delta U^{1*}+(-|U^0|^2+|U^0|^4)U^0=g^1. \tag{13}$$

在任意形式 $\|\cdot\|$ 的定义下误差函数可分解为[14]

$$\|U_h^n-u^n\|\leqslant\|e^n\|+\|e_h^n\|+\|U^n-R_hU^n\|,$$

这里

$$e^n=U^n-u^n,\ e_h^n=R_hU^n-U_h^n.$$

引理 1(Gronwall 不等式[15]) 令 τ,B,a_k,b_k,c_k 以及 $\gamma_k(k\geqslant0)$ 为非负数,得

$$a_n+\tau\sum_{k=0}^n b_k\leqslant\tau\sum_{k=0}^n\gamma_k a_k+\tau\sum_{k=0}^n c_k+B,\qquad n\geqslant0. \tag{14}$$

设 $\tau\gamma_k<1$, 取 $\varrho_k=(1-\tau\gamma_k)^{-1}$, 得

$$a_n+\tau\sum_{k=0}^n b_k\leqslant\exp\Big(\tau\sum_{k=0}^n\gamma_k\varrho_k\Big)\Big(\tau\sum_{k=0}^n c_k+B\Big),\qquad n\geqslant0. \tag{15}$$

在证明过程中会用到下面的公式[16].

引理 2 若 $\alpha(\phi)=\alpha_n\phi^n+\cdots+\alpha_0$ 和 $\beta(\phi)=\beta_n\phi^n+\cdots+\beta_0$ 是两个次数至多为 n 的多项式且这两个多项式至少有一个次数为 n, 同时这两个多项式没有公约数.令$(\cdot,\cdot)$为内积,若

$$\mathrm{Re}\,\frac{\alpha(\phi)}{\beta(\phi)}\geqslant0,\qquad|\phi|\geqslant1,$$

则存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})\in R^{n\times n}$ 和实数 $\delta_0,\cdots,\delta_n$, 使得对内积空间中 $v^0,\cdots,v^n$, 有

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=0}^n\alpha_i v^i,\sum_{i=0}^n\beta_i v^j\right)=\sum_{i,j=0}^n g_{i,j}(v^i,v^j)-\sum_{i,j=0}^n g_{i,j}(v^{i-1},v^{j-1})+\Big|\sum_{i=0}^n\delta_i v^i\Big|. \tag{16}$$

引理 3 当 $q\leqslant5$ 时, $\exists0\leqslant\zeta_q<1$,使得 n 阶 BDF 方法形成的多项式

$$\alpha(\phi)=\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\phi^{n-j}(\phi-1)^j$$

满足

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha(\phi)}{\phi^n-\zeta_n\phi^{n-1}}\geqslant 0,\qquad |\phi|\geqslant 1, \tag{17}$$

这里 ζ_n 可能的最小值有:

$$\zeta_1=\zeta_2=0,\ \zeta_3=0.0836,\ \zeta_4=0.2878,\ \zeta_5=0.8160.$$

假设 1 方程(1)的解存在且满足

$$\|u_0\|_{H^{r+1}}+\|u\|_{L^\infty((0,T);H^{r+1})}+\|u_t\|_{L^2((0,T);H^{r+1})}+\|u_{tt}\|_{L^2((0,T);H^1)}+\|u_{ttt}\|_{L^2((0,T);L^2)}\leqslant C. \tag{18}$$

定理 1 设方程(1)在边界条件(11)及初值条件(12)下有唯一解 u, 且满足假设 1.那么全离散方程(7)~(9)有唯一有限元解 U_h^n,且存在 $\tau_0>0$ 和 $h_0>0$,使得当 $\tau\leqslant\tau_0$,$h\leqslant h_0$ 时,有

$$\|u^n-U_h^n\|_{L^2}\leqslant C(\tau^2+h^{r+1}), \tag{19}$$

其中 C 是 Ω 上与 τ 和 h 无关的正常数.

2 时间误差估计

在本节中,给出 e^n 的误差边界和 $\{U^n\}_{n=0}^N$ 在强范数下的一致有界性.设 u 是方程(1) 的解,则 $n\geqslant 2$ 时,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}D_\tau u^n+\Delta u^n+2(-|u^{n-1}|^2+|u^{n-1}|^4)u^n-(-|u^{n-2}|^2+|u^{n-2}|^4)u^n=\\&\quad\mathrm{i}D_\tau u^n-\mathrm{i}u_t^n+(2(-|u^{n-1}|^2+|u^{n-1}|^4)-\\&\quad(-|u^{n-2}|^2+|u^{n-2}|^4)-(-|u^n|^2+|u^n|^4))u^n,\end{aligned} \tag{20}$$

u^1 满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{u^1-u_0}{\tau}+\Delta u^1+(-|u^0|^2+|u^0|^4)u^0=\\&\quad\mathrm{i}\frac{u^1-u_0}{\tau}-\mathrm{i}u_t^1+(-|u^0|^2+|u^0|^4)u^0-(-|u^1|^2+|u^1|^4)u^1,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{u^1-u_0}{\tau}+\Delta\frac{u^1+u_0}{2}+\frac{1}{2}((-|u^1|^2+|u^1|^4)u^1+(-|u^0|^2+|u^0|^4)u^1)=\\&\quad\mathrm{i}\left(\frac{u^1-u_0}{\tau}-u_t^{1/2}\right)+\Delta\left(\frac{u^1+u_0}{2}-u^{1/2}\right)+\frac{1}{2}((-|u^1|^2+|u^1|^4)u^1+\\&\quad(-|u^0|^2+|u^0|^4)u^1)-(-|u^{1/2}|^2+|u^{1/2}|^4)u^{1/2}.\end{aligned} \tag{22}$$

令

$$\begin{aligned}Q^n&=\mathrm{i}D_\tau u^n-\mathrm{i}u_t^n+2(-|u^{n-1}|^2+|u^{n-1}|^4)u^n-\\&\quad(-|u^{n-2}|^2+|u^{n-2}|^4)u^n-(-|u^n|^2+|u^n|^4)u^n,\qquad n\geqslant 2,\\Q^{1^*}&=\mathrm{i}\frac{u^1-u_0}{\tau}-\mathrm{i}u_t^1+(-|u^0|^2+|u^0|^4)u^0-(-|u^1|^2+|u^1|^4)u^1,\\Q^1&=\mathrm{i}\left(\frac{u^1-u_0}{\tau}-u_t^{1/2}\right)+\Delta\left(\frac{u^1+u_0}{2}-u^{1/2}\right)+\frac{1}{2}((-|u^1|^2+|u^1|^4)u^1+\\&\quad(-|u^0|^2+|u^0|^4)u^1)-(-|u^{1/2}|^2+|u^{1/2}|^4)u^{1/2}.\end{aligned}$$

由假设 1 和 Taylor 展开式有

$$\left(\sum_{n=1}^N\tau\|Q^n\|_{L^2}^2\right)^{1/2}+\tau(\|Q^{1^*}\|_{L^2}+\|\nabla Q^{1^*}\|_{L^2})\leqslant C\tau^2. \tag{23}$$

定理 2 设方程(1)的唯一解 u 满足假设 1,那么存在正常数 τ_0,使得当 $\tau < \tau_0$ 时,时间半离散方程(10)~(13)有唯一解 $U^n, n = 1,2,\cdots,N$, 则

$$\| e^n \|_{L^2} + \| \nabla e^n \|_{L^2} + \tau^{1/2} \| e^n \|_{H^2} \leqslant C\tau^2, \tag{24}$$

$$\max_{2\leqslant n\leqslant N} \| D_\tau U^n \|_{H^2} + \max_{1\leqslant n\leqslant N} \| U^n \|_{H^2} \leqslant C. \tag{25}$$

证明 由方程(10)~(13)是线性椭圆方程知,它们的解 U^n 存在且唯一.在研究方程(24)、(25)之前,首先由数学归纳证明下面的初步误差估计,存在正常数 τ'_0,当 $\tau < \tau'_0$ 时,

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N} \| U^n \|_{L^\infty} \leqslant K, \tag{26}$$

这里 $K = \max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} \| u^n \|_{L^\infty} + 1$.

由方程(13)和(21),得

$$\mathrm{i}\frac{e^{1*}}{\tau} + \Delta e^{1*} = Q^{1*}, \tag{27}$$

这里 $e^{1*} = u^1 - U^{1*}$.

取方程(27)两端乘以 e^{1*} 并在 Ω 内作内积有

$$\mathrm{i}\frac{\| e^{1*} \|_{L^2}^2}{\tau} - \| \nabla e^{1*} \|_{L^2}^2 = (Q^{1*}, e^{1*}). \tag{28}$$

由方程(23)和(28)的虚部,得

$$\| e^{1*} \|_{L^2} \leqslant \tau \| Q^{1*} \|_{L^2} \leqslant C\tau^2. \tag{29}$$

取方程(27)两端乘以 Δe^{1*} 并在 Ω 内作内积,有

$$-\mathrm{i}\frac{\| \nabla e^{1*} \|_{L^2}^2}{\tau} + \| \Delta e^{1*} \|_{L^2}^2 = (Q^{1*}, \Delta e^{1*}). \tag{30}$$

由上述表达式可得

$$\| \nabla e^{1*} \|_{L^2}^2 \leqslant \tau |(Q^{1*}, \Delta e^{1*})| \leqslant \frac{1}{2}\tau^2 \| \nabla Q^{1*} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| \nabla e^{1*} \|_{L^2}^2 \tag{31}$$

以及

$$\| \Delta e^{1*} \|_{L^2}^2 \leqslant |(Q^{1*}, \Delta e^{1*})| \leqslant \frac{1}{2} \| Q^{1*} \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| \Delta e^{1*} \|_{L^2}^2. \tag{32}$$

由方程(23)和(29)、(31)、(32),得

$$\| \nabla e^{1*} \|_{L^2} + \tau \| \Delta e^{1*} \|_{L^2} \leqslant C\tau^2. \tag{33}$$

设 Ω 是光滑的,且由 Dirichlet 边界条件,得

$$\| e^{1*} \|_{H^2} \leqslant C \| \Delta e^{1*} \|_{L^2} \leqslant C\tau. \tag{34}$$

由假设 1 和式(34),得

$$\| U^{1*} \|_{L^\infty} \leqslant \| u^1 \|_{L^\infty} + \| u^{1*} - U^{1*} \|_{L^\infty} \leqslant \| u^1 \|_{L^\infty} + C \| e^{1*} \|_{H^2} \leqslant K, \tag{35}$$

$$\| U^{1*} \|_{H^2} \leqslant \| u^1 \|_{H^2} + \| e^{1*} \|_{H^2} \leqslant C. \tag{36}$$

则存在一个正常数 τ_1,使得 $\tau \leqslant \tau_1$, 方程(35)、(36)成立.

由方程(9)和(22)得到误差方程为

$$\frac{\mathrm{i}}{\tau} e^1 + \frac{1}{2}\Delta e^1 + \frac{1}{2}\Phi^1 = Q^1, \tag{37}$$

这里

$$\Phi^1 = (-|u^1|^2 u^1 + |u^1|^4 u^1) - (-|U^{1*}|^2 U^1 + |U^{1*}|^4 U^1) + \\ 2(-|u_0|^2 + |u_0|^4) e^1.$$

取方程(37)两端乘以 e^1 做内积,得

$$\frac{\mathrm{i}}{\tau}\|e^1\|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\|\nabla e^1\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}(\Phi^1,e^1)=(Q^1,e^1). \tag{38}$$

由方程(36)和假设 1,得

$$\begin{aligned}\|\Phi^1\|_{L^2}\leqslant\;&\|(-1+2\xi)(|u^1|+|U^{1*}|)e^1u^1+\\&(-|U^{1*}|^2+|U^{1*}|^4)e^1\|_{L^2}+\|2(-|u^0|^2+|u^0|^4)\|_{L^2}\leqslant\\&C\tau^2+C\|e^1\|_{L^2},\end{aligned} \tag{39}$$

式中 ξ 是由中值定理得到的中值,若在下文中出现中值一律省略下标,均用 ξ 表示.

取方程(38)的虚部,得

$$\|e^1\|_{L^2}^2\leqslant C\tau\|\Phi^1\|_{L^2}^2+C\tau\|Q^1\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\tau\|e^1\|_{L^2}^2. \tag{40}$$

由方程(23)和(39),得

$$\|e^1\|_{L^2}\leqslant C\tau^2. \tag{41}$$

在方程(37)两端乘以 Δe^1, 得

$$-\frac{\mathrm{i}}{\tau}\|\nabla e^1\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Delta e^1\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}(\Phi^1,\Delta e^1)=(Q^1,\Delta e^1). \tag{42}$$

由方程(23)、(39)和(42)的实部和虚部,得

$$\|\nabla e^1\|_{L^2}+\tau^{1/2}\|\Delta e^1\|_{L^2}\leqslant C\tau^2. \tag{43}$$

由上述表达式可得

$$\|U^1\|_{L^\infty}\leqslant\|u^1\|_{L^\infty}+\|u^1-U^1\|_{L^\infty}\leqslant\|u^1\|_{L^\infty}+C\|e^1\|_{H^2}\leqslant K,$$

则存在一个正常数 τ_2,使得 $\tau\leqslant\tau_2$, 上述结果成立.

因此,当 $n=1$ 时,方程(26)成立.假设 $n\leqslant m-1$ 对于方程(26)成立,现用数学归纳法证明 $n=m$ 成立.

由方程(10)和(20)得到误差方程为

$$\mathrm{i}D_\tau e^n+\Delta e^n+\Phi^n=Q^n, \tag{44}$$

这里

$$\begin{aligned}\Phi^n=\;&2[(-|u^{n-1}|^2+|u^{n-1}|^4)u^n-((-|U^{n-1}|^2+|U^{n-1}|^4)U^n)]-\\&[(-|u^{n-2}|^2+|u^{n-2}|^4)u^n-(-|U^{n-2}|^2+|U^{n-2}|^4)U^n].\end{aligned} \tag{45}$$

由 Φ^n 的定义、假设 1 和数学归纳法,得

$$\begin{aligned}\|\Phi^n\|_{L^2}\leqslant\;&2\|(-|u^{n-1}|^2+|u^{n-1}|^4)e^n+\\&(-1+2\xi)(|u^{n-1}|+|U^{n-1}|)e^{n-1}U^n\|_{L^2}+\\&\|(-|u^{n-2}|^2+|u^{n-2}|^4)e^n+\\&(-1+2\xi)(|u^{n-2}|+|U^{n-2}|)e^{n-2}U^n\|_{L^2}\leqslant\\&C\|e^n\|_{L^2}+C\|e^{n-1}\|_{L^2}+C\|e^{n-2}\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{46}$$

在方程(44)两端乘以 e^n,并在 Ω 内做内积,得

$$(\mathrm{i}D_\tau e^n,e^n)-\|\nabla e^n\|_{L^2}^2+(\Phi^n,e^n)=(Q^n,e^n). \tag{47}$$

根据引理 2,将 $D_\tau e^n$ 展开,则

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{\tau}\left(\frac{3}{2}e^n-2e^{n-1}+\frac{1}{2}e^{n-2},e^n\right)=\\&\quad\frac{\mathrm{i}}{\tau}\left(\sum_{i,j=1}^2 g_{i,j}(e^{n+i-2},e^{n+j-2})-\sum_{i,j=1}^2 g_{i,j}(e^{n+i-3},e^{n+j-3})+\left|\sum_{i=1}^2\sigma_i e^{n-i}\right|\right).\end{aligned} \tag{48}$$

由上述方程的虚部,得

$$\frac{1}{\tau}\left\| \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(e^{n+i-2}, e^{n+j-2}) - \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(e^{n+i-3}, e^{n+j-3}) \right\|_{L^2} \leqslant$$
$$\| \mathrm{Im}(\Phi^n, e^n) \|_{L^2}^2 + \| \mathrm{Im}(Q^n, e^n) \|_{L^2}^2. \tag{49}$$

令

$$| A^1 |_G^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(e^{i-1}, e^{j-1}),$$

则

$$| A^n |_G^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(e^{n+i-2}, e^{n+j-2}).$$

由方程(45)、(48)及 Young 不等式,得

$$| A^n |_G^2 - | A^{n-1} |_G^2 \leqslant \| \mathrm{Im}(\Phi^n, e^n) \|_{L^2}^2 + \| \mathrm{Im}(Q^n, e^n) \|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C\tau \| \Phi^n \|_{L^2}^2 + C\tau \| Q^n \|_{L^2}^2 + \tau \| e^n \|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C\tau \| e^n \|_{L^2}^2 + C\tau^4. \tag{50}$$

对方程(49)从 $n = 1$ 到 $n = m$ 求和,则

$$| A^n |_G^2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} C\tau \| e^n \|_{L^2}^2 + C\tau^4 + | A^1 |_G^2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} C\tau \| e^n \|_{L^2}^2 + C\tau^4 + | e^1 |_{L^2}^2. \tag{51}$$

根据方程(50)、(51),有

$$\| e^n \|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} C\tau \| e^{n+i-2} \|_{L^2}^2 \leqslant | A^n |_G^2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} C\tau \| e^n \|_{L^2}^2 + C\tau^4. \tag{52}$$

由方程(47)~(51)和 Gronwall 不等式,得

$$\| e^n \|_{L^2} \leqslant C\tau^2. \tag{53}$$

则存在一个正常数 τ_3,使得 $\tau \leqslant \tau_3$, 方程(53)成立。

在方程(44)两边乘以 $D_\tau e^n$,并在 Ω 内做内积,得

$$\mathrm{i} \| D_\tau e^n \|_{L^2}^2 - (\nabla e^n, D_\tau \nabla e^n) + (\Phi^n, D_\tau e^n) = (Q^n, D_\tau e^n). \tag{54}$$

由上述方程的实部和引理 2,得

$$\frac{1}{\tau}\left\| \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\nabla e^{n+i-2}, \nabla e^{n+j-2}) - \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\nabla e^{n+i-3}, \nabla e^{n+j-3}) + \left| \sum_{i=1}^{2} \sigma_i \nabla e^{n-i} \right| \right\|_{L^2} \leqslant$$
$$| \mathrm{Re}(\Phi^n, D_\tau e^n) | + | \mathrm{Re}(Q^n, D_\tau e^n) |. \tag{55}$$

下面,给出 $| \mathrm{Re}(\Phi^n, D_\tau e^n) |$ 和 $| \mathrm{Re}(Q^n, D_\tau e^n) |$ 的边界,对于方程(44) 乘以 Φ^n,在 Ω 内做内积,则

$$(\mathrm{i}D_\tau e^n, \Phi^n) - (\nabla e^n, \nabla \Phi^n) + \| \Phi^n \|_{L^2}^2 = (Q^n, \Phi^n). \tag{56}$$

根据上述方程,由方程(46)、(53)及 Young 不等式,得

$$| \mathrm{Re}(\Phi^n, D_\tau e^n) | \leqslant | \mathrm{Im}(Q^n, \Phi^n) | + | \mathrm{Im}(\nabla R^n, \nabla e^n) | \leqslant$$
$$\frac{1}{2} \| \nabla \Phi^n \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| \nabla e^n \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| Q^n \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| \Phi^n \|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C(\| \nabla e^n \|_{L^2}^2 + \| \nabla e^{n-1} \|_{L^2}^2 + \| \nabla e^{n-2} \|_{L^2}^2) + \frac{1}{2} \| Q^n \|_{L^2}^2 + C\tau^4. \tag{57}$$

同时,将方程(55)的右端写为

$$| \mathrm{Re}(Q^n, D_\tau e^n) | = | \mathrm{Re}(\mathrm{i}D_\tau u^n - \mathrm{i}u_t^n + 2(-| u^{n-1} |^2 u^n + | u^{n-1} |^4 u^n) -$$
$$(-| u^{n-2} |^2 u^n + | u^{n-2} |^4 u^n) - (-| u^n |^2 u^n + | u^n |^4 u^n), D_\tau e^n) | \leqslant$$

$$|(D_\tau u^n - u_t^n, D_\tau e^n)| + |2(-|u^{n-1}|^2 u^n + |u^{n-1}|^4 u^n) - (-|u^{n-2}|^2 u^n + |u^{n-2}|^4 u^n) - (-|u^n|^2 u^n + |u^n|^4 u^n), D_\tau e^n)|. \tag{58}$$

对方程(44)两端乘以 $D_\tau u^n - u_t^n$,在 Ω 内做内积,得

$$(\mathrm{i}D_\tau e^n, D_\tau u^n - u_t^n) - (\nabla e^n, \nabla(D_\tau u^n - u_t^n)) + (\Phi^n, D_\tau u^n - u_t^n) = (Q^n, D_\tau u^n - u_t^n). \tag{59}$$

对上述方程,由方程(46)、(53)、Taylor 公式和 Young 不等式,得

$$\begin{aligned}&|(D_\tau e^n, D_\tau u^n - u_t^n)| \leqslant \\ &\frac{1}{2}\|\nabla e^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(D_\tau u^n - u_t^n)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + \\ &\frac{1}{2}\|Q^n\|_{L^2}^2 + \|(D_\tau u^n - u_t^n)\|_{L^2}^2 \leqslant \\ &\frac{1}{2}\|\nabla e^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(D_\tau u^n - u_t^n)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|Q^n\|_{L^2}^2 + C\tau^4.\end{aligned} \tag{60}$$

对方程(44)两端乘以

$$2(-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4)u^n - (-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4)u^n - (-|u^n|^2 + |u^n|^4)u^n,$$

在 Ω 内做内积,得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}(D_\tau e^n, 2(-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4)u^n - (-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4)u^n - \\ &\quad (-|u^n|^2 + |u^n|^4)u^n) + (\Delta e^n, 2(-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4)u^n - \\ &\quad (-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4)u^n - (-|u^n|^2 + |u^n|^4)u^n) + \\ &\quad (\Phi^n, 2(-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4)u^n - (-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4)u^n - \\ &\quad (-|u^n|^2 + |u^n|^4)u^n) = \\ &\quad (Q^n, 2(-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4)u^n - (-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4)u^n - \\ &\quad (-|u^n|^2 + |u^n|^4)u^n).\end{aligned} \tag{61}$$

对上述方程,由方程(46)、(53)、假设 1 和 Young 不等式,得

$$\begin{aligned}&|(D_\tau e^n, 2(-|u^{n-1}|^2 u^n + |u^{n-1}|^4 u^n) - \\ &\quad (-|u^{n-2}|^2 u^n + |u^{n-2}|^4 u^n) - (-|u^n|^2 u^n + |u^n|^4 u^n))| \leqslant \\ &\quad C\|\nabla e^n\|_{L^2}^2 + C\|2(-|u^{n-1}|^2 u^n + |u^{n-1}|^4 u^n) - \\ &\quad (-|u^{n-2}|^2 u^n + |u^{n-2}|^4 u^n)\|_{H^1}^2 + C\|-|u^n|^2 u^n + |u^n|^4 u^n\|_{H^1}^2 + \\ &\quad C\|\Phi^n\|_{L^2}^2 + C\|Q^n\|_{L^2}^2 \leqslant \\ &\quad C\|\nabla e^n\|_{L^2}^2 + C\|Q^n\|_{L^2}^2 + C\tau^4.\end{aligned} \tag{62}$$

由方程(23)、(54)~(62)及假设 1,得

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\nabla e^{n+i-2}, \nabla e^{n+j-2}) - \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\nabla e^{n+i-3}, \nabla e^{n+j-3})\right\|_{L^2} \leqslant \\ &\quad C\tau(\|\nabla e^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla e^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla e^{n-2}\|_{L^2}^2) + C\tau\|Q^n\|_{L^2}^2 + C\tau^4.\end{aligned} \tag{63}$$

于是由方程(62)、(63)及引理 2,得

$$\|\nabla e^n\| \leqslant C\tau^2. \tag{64}$$

则存在一个正常数 τ_4,使得 $\tau \leqslant \tau_4$,方程(64)成立.

在方程(44)两端乘以 Δe^n,并在 Ω 内做内积,得

$$\begin{aligned}&-3\mathrm{i}\frac{\|\nabla e^n\|_{L^2}^2}{2\tau} + 2\mathrm{i}\frac{(\nabla e^{n-1}, \nabla e^n)}{\tau} - \mathrm{i}\frac{(\nabla e^{n-2}, \nabla e^n)}{2\tau} + \\ &\quad \|\Delta e^n\|_{L^2}^2 + (\Phi^n, \Delta e^n) = (Q^n, \Delta e^n).\end{aligned} \tag{65}$$

由上述不等式,得

$$\|\Delta e^n\|_{L^2}^2 = \mathrm{Re}(Q^n,\Delta e^n) - \mathrm{Re}(\Phi^n,\Delta e^n) - \frac{2}{\tau}\mathrm{Im}(\nabla e^{n-1},\nabla e^n) + \frac{1}{2\tau}\mathrm{Im}(\nabla e^{n-2},\nabla e^n). \tag{66}$$

由上述方程的实部、Young 不等式及方程(23)、(46)、(53)、(64),得

$$\begin{aligned}\|\Delta e^n\|_{L^2}^2 \leqslant{} & \frac{C}{\tau}(\|\nabla e^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla e^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla e^{n-2}\|_{L^2}^2) + C\|Q^n\|_{L^2}^2 + C\|\Phi^n\|_{L^2}^2 \leqslant \\ & \frac{C}{\tau}\tau^4 + \|\nabla e^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla e^{n-2}\|_{L^2}^2 + C\|Q^n\|_{L^2}^2 \leqslant C\tau^3,\end{aligned} \tag{67}$$

于是

$$\|e^n\|_{H^2} \leqslant C\tau^{3/2}. \tag{68}$$

根据上述误差估计和假设 1,有

$$\|U^n\|_{L^\infty} \leqslant \|u^n\|_{L^\infty} + \|e^n\|_{L^\infty} \leqslant \|u^n\|_{L^\infty} + C\|e^n\|_{H^2} \leqslant K. \tag{69}$$

则存在一个正常数 τ_5,使得 $\tau \leqslant \tau_5$,上述结果成立.令 $\tau_0' = \min\{\tau_1,\cdots,\tau_5\}$.由此完成了方程(26)的证明. □

下面,证明方程(24)、(25).由于已完成了方程(26)的数学归纳,则当 $n=N$ 时,方程(53)、(64)和(68)均可证,所以方程(24)成立.由假设 1 和方程(24)得

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|U^n\|_{H^2} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant N}\|e^n\|_{H^2} + \max_{1\leqslant n\leqslant N}\|u^n\|_{H^2} \leqslant C, \tag{70}$$

$$\max_{2\leqslant n\leqslant N}\|D_\tau U^n\|_{H^2} \leqslant \max_{2\leqslant n\leqslant N}\|D_\tau e^n\|_{H^2} + \max_{2\leqslant n\leqslant N}\|D_\tau u^n\|_{H^2} \leqslant C. \tag{71}$$

则存在一个正常数 τ_6,使得 $\tau \leqslant \tau_6$,方程(70)、(71)成立.令 $\tau_0 = \min\{\tau_0',\tau_6\}$,由此完成了定理 2 的证明. □

3 全离散有限元解

引理 4 若时间离散方程(10)~(13)有唯一解,则

$$\|R_hU^n\|_{L^\infty} \leqslant M. \tag{72}$$

证明 由方程(2)、(4)、(5)以及(25),得

$$\begin{aligned}\|R_hU^n\|_{L^\infty} \leqslant{} & \|R_hU^n - \Pi_hU^n\|_{L^\infty} + \|\Pi_hU^n\|_{L^\infty} \leqslant \\ & Ch^{2-d/2}\|U^n\|_{H^2} + C\|U^n\|_{L^\infty} \leqslant M.\end{aligned}$$

引理 4 的证明完成. □

定理 3 设方程(1)的唯一解 u 满足假设 1,那么有限元方程(7)~(9)有唯一解 $U_h^n, n=1,2,\cdots,N$,且存在 $\tau'>0, h'>0$,使得当 $\tau\leqslant\tau', h\leqslant h'$ 有

$$\|e_h^n\|_{L^2} \leqslant Ch^2, \tag{73}$$

$$\|U_h^n\|_{L^\infty} \leqslant M+1. \tag{74}$$

证明 首先证明方程(7)~(9)的解存在且唯一,若线性全离散方程(7)有唯一解 U^m,当且仅当 $U_h^n, n=1,2,\cdots,m-1$,对应的齐次方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{\tau}(\lambda_h,v_h) - (\nabla\lambda_h,\nabla v_h) + (2(-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)\lambda_h - \\ &\quad (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)\lambda_h, v_h) = 0, \qquad \lambda_h = U_h^n,\ n=1,2,\cdots,m-1\end{aligned} \tag{75}$$

只有零解,则方程(7)的解存在且唯一.实际上,取上述方程 $v_h=\lambda_h$,得

$$\frac{\mathrm{i}}{\tau}\|\lambda_h\|_{L^2}^2-\|\nabla\lambda_h\|_{L^2}^2+(2(-|U_h^{n-1}|^2+|U_h^{n-1}|^4)-$$
$$(-|U_h^{n-2}|^2+|U_h^{n-2}|^4))\|\lambda_h\|_{L^2}^2=0.$$

显然,实部和虚部均为 0,易得 $\lambda_h=0$.因此齐次方程(75)只有零解.则对应的方程(7)的解存在且是唯一的.同理可得方程(8)和(9)的解存在且唯一.

下面应用数学归纳证明误差估计方程(74).由 $U_h^0=\Pi_h u_0$、方程(2)、(4)和假设 1,得到

$$\|u_0-\Pi_h u_0\|_{L^2}\leqslant Ch^2\|u_0\|_{H^2}\leqslant Ch^2. \tag{76}$$

由上述不等式,方程(72)以及假设 1,得

$$\|e_h^0\|_{L^2}=\|R_hU^0-U_h^0\|_{L^2}=\|R_hU^0-u_0+u_0-\Pi_hu_0\|_{L^2}\leqslant$$
$$\|R_hU^0-u_0\|_{L^2}+\|u_0-\Pi_hu_0\|_{L^2}\leqslant Ch^2\|u_0\|_{H^2}\leqslant Ch^2. \tag{77}$$

由方程(5)、(72)和(77),得

$$\|U_h^0\|_{L^\infty}\leqslant\|R_hU^0\|_{L^\infty}+\|R_hU^0-U_h^0\|_{L^\infty}\leqslant$$
$$M+Ch^{-d/2}\|e_h^0\|_{L^2}\leqslant M+1. \tag{78}$$

则存在一个正常数 h_1,使得 $h\leqslant h_1$, 方程(78)成立.

由方程(3)、(9)和(13)得

$$\mathrm{i}\left(\frac{e_h^{1*}}{\tau},v_h\right)-(\nabla e_h^{1*},\nabla v_h)+((-|u^0|^2u^0+|u^0|^4u^0)-$$
$$(-|u_h^0|^2u_h^0+|u_h^0|^4u_h^0),v_h)=$$
$$-\mathrm{i}\left(\frac{U^{1*}-R_hU^{1*}}{\tau},v_h\right)+\mathrm{i}\left(\frac{U^0-U_h^0}{\tau},v_h\right), \tag{79}$$

这里 $e_h^{1*}=R_hU^{1*}-U_h^{1*}$.

令上述方程 $v=e_h^{1*}$, 则

$$\frac{\mathrm{i}}{\tau}\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2-\|\nabla e_h^{1*}\|_{L^2}^2+((-|U^0|^2U^0+|U^0|^4U^0)-$$
$$(-|U_h^0|^2U_h^0+|U_h^0|^4U_h^0),e_h^{1*})=$$
$$-\mathrm{i}\left(\frac{U^{1*}-R_hU^{1*}}{\tau},e_h^{1*}\right)+\mathrm{i}\left(\frac{U^0-U_h^0}{\tau},e_h^{1*}\right). \tag{80}$$

由上述方程的虚部,得

$$\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2\leqslant\tau|\mathrm{Im}((-|U^0|^2U^0+|U^0|^4U^0)-$$
$$(-|U_h^0|^2U_h^0+|U_h^0|^4U_h^0),e_h^{1*})|+$$
$$|\mathrm{Re}(U^1-R_hU^1,e_h^{1*})|+|\mathrm{Re}(U^0-U_h^0,e_h^{1*})|\leqslant$$
$$\tau|(-1+2\xi)((|U^0|^2-|U_h^0|^2)U^0+$$
$$(-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)(U^0-R_hU^0+R_hU^0-U_h^0),e_h^{1*})|+$$
$$|(U^1-R_hU^1,e_h^{1*})|+|(U^0-U_h^0,e_h^{1*})|. \tag{81}$$

令 $\alpha_1=(-1+2\xi)((|U^0|^2-|U_h^0|^2)U^0+(-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)(U^0-R_hU^0+R_hU^0-U_h^0),e_h^{1*})$,由假设 1、Young 不等式、方程(4)、(35)、(36)、(77)和(78),得

$$|\alpha_1|\leqslant|((-1+2\xi)(U^0-R_hU^0)(|U^0|+|U_h^0|)U^0,e_h^{1*})|+$$
$$|((-1+2\xi)(R_hU^0-U_h^0)(|U^0|+|U_h^0|)U^0,e_h^{1*})|+$$
$$|((-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)(U^{1*}-R_hU^{1*}),e_h^{1*})|+$$

$$
\begin{aligned}
&|((-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)e_h^0,e_h^{1*})|\leqslant\\
&2\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2+C\|e_h^0\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|(-1+2\xi)(U^0-R_hU^0)(|U^0|+|U_h^0|)U^0\|_{L^2}^2+\\
&\frac{1}{2}\|(-1+2\xi)(R_hU^0-U_h^0)(|U^0|+|U_h^0|)U^0\|_{L^2}^2+\\
&\frac{1}{2}\|(-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)(U^0-R_hU^0)\|_{L^2}^2\leqslant\\
&(2+C)\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2+Ch^4.
\end{aligned}\tag{82}
$$

由假设 1、方程(4)、(36)、(78)、(81)和(82),得

$$
\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2\leqslant(2+C)\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2\tau+\frac{1}{3}\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2+Ch^4.\tag{83}
$$

则存在一个正常数 h_2,使得 $h\leqslant h_2$, 方程(83)成立.

$$
\|e_h^{1*}\|_{L^2}\leqslant Ch^2.\tag{84}
$$

由方程(5)、(72)和上述不等式,得

$$
\begin{aligned}
&\|U_h^{1*}\|_{L^\infty}\leqslant\|R_hU^{1*}\|_{L^\infty}+\|R_hU^{1*}-U_h^{1*}\|_{L^\infty}\leqslant\\
&\quad M+Ch^{-d/2}\|e_h^{1*}\|_{L^2}\leqslant M+1.
\end{aligned}
$$

则存在一个正常数 h_3,使得 $h\leqslant h_3$, 上述结果成立.

由方程(3)、(8)和(12),得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{\tau}(e_h^1-e_h^0,v_h)-\frac{1}{2}(\nabla(e_h^1+e_h^0),\nabla v_h)+\\
&\quad\frac{1}{2}((-|U^{1*}|^2U^1+|U^{1*}|^4U^1)-(-|U_h^{1*}|^2U_h^1+|U_h^{1*}|^4U_h^1),v_h)+\\
&\quad\frac{1}{2}((-|U^0|^2U^1+|U^0|^4U^1)-(-|U_h^0|^2U_h^1+|U_h^0|^4U_h^1),v_h)=\\
&\quad-\frac{\mathrm{i}}{\tau}((U^1-U^0)-R_h(U^1-U^0),v_h).
\end{aligned}\tag{85}
$$

令上述方程 $v_h=e_h^1+e_h^0$, 得

$$
\begin{aligned}
&\|e_h^1\|_{L^2}^2-\|e_h^0\|_{L^2}^2\leqslant\\
&\quad C\tau|((-1+2\xi)(U^{1*}-R_hU_h^{1*})(|U^{1*}|+|U_h^{1*}|)U^1,e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-1+2\xi)e_h^{1*}(|U^{1*}|+|U_h^{1*}|)U^1,e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-|U_h^{1*}|^2+|U_h^{1*}|^4)(|U^1|^2-|U_h^1|),e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-|U_h^{1*}|^2+|U_h^{1*}|^4)e_h^1,e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-1+2\xi)(U^0-R_hU_h^0)(|U^0|+|U_h^0|)U^1,e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-1+2\xi)e_h^1(|U^0|+|U_h^0|)U^1,e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)(U^1-R_hU^1),e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((-|U_h^0|^2+|U_h^0|^4)e_h^1,e_h^1+e_h^0)|+\\
&\quad C\tau|((U^1-U^0)-R_h(U^1-U^0),e_h^1+e_h^0)|.
\end{aligned}\tag{86}
$$

由方程(25)、(35)、(36)、(77)和(86)得

$$
\begin{aligned}
&\|e_h^1\|_{L^2}^2\leqslant\|e_h^0\|_{L^2}^2+Ch^4\|U^1\|_{H^2}^2+C\tau(\|e_h^0\|_{L^2}^2+\|e_h^1\|_{L^2}^2)+\\
&\quad\|e_h^{1*}\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|e_h^1\|_{L^2}^2+Ch^4\|(U^0+U^1)\|_{H^2}^2\leqslant
\end{aligned}
$$

$$C\tau \| e_h^1 \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| e_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^4, \tag{87}$$

因此

$$\| e_h^1 \|_{L^2} \leqslant Ch^2. \tag{88}$$

由方程(5)、(72)和上述不等式，得

$$\begin{aligned} &\| U_h^1 \|_{L^\infty} \leqslant \| R_h U^1 \|_{L^\infty} + \| R_h U^1 - U_h^1 \|_{L^\infty} \leqslant \\ &\quad M + Ch^{-d/2} \| e_h^1 \|_{L^2} \leqslant M + 1. \end{aligned} \tag{89}$$

则存在一个正常数 h_4，使得 $h \leqslant h_4$，方程(89)成立。

因此，当 $n = 1$ 时方程(74)成立。假设 $n \leqslant m - 1$ 对于方程(74)成立，现在证明 $n = m$ 成立。由方程(3)、(7)和(10)得

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}(D_\tau e_h^n, v_h) - (\nabla e_h^n, \nabla v_h) + (2((-|U^{n-1}|^2 + |U^{n-1}|^4)U^n - \\ &\quad (-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)U_h^n) - (-|U^{n-2}|^2 + |U^{n-2}|^4)U^n + \\ &\quad (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)U_h^n, v_h) = -\mathrm{i}(D_\tau(U^n - R_h U^n), v_h). \end{aligned} \tag{90}$$

令 $v_h = e_h^n$，代入上述方程得

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{i}}{\tau}\left(\frac{3}{2} e_h^n - 2e_h^{n-1} + \frac{1}{2} e_h^{n-2}, e_h^n\right) - \| \nabla e_h^n \|_{L^2}^2 + \\ &\quad (2((-|U^{n-1}|^2 + |U^{n-1}|^4)U^n - (-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)U_h^n) - \\ &\quad (-|U^{n-2}|^2 + |U^{n-2}|^4)U^n + (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)U_h^n, e_h^n) = \\ &\quad -\mathrm{i}(D_\tau(U^n - R_h U^n), e_h^n). \end{aligned} \tag{91}$$

取上述方程的虚部及引理 2，得

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(e_h^{n+i-2}, e_h^{n+j-2}) - \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(e_h^{n+i-3}, e_h^{n+j-3}) \right\|_{L^2} \leqslant \\ &\quad \tau \,|\, (2((-|U^{n-1}|^2 + |U^{n-1}|^4)U^n - (-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)U_h^n) - \\ &\quad (-|U^{n-2}|^2 + |U^{n-2}|^4)U^n + \\ &\quad (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)U_h^n, e_h^n) \,| + \tau \,|\, (D_\tau(U^n - R_h U^n), e_h^n) \,|. \end{aligned} \tag{92}$$

令

$$\begin{aligned} S_2 = &(2((-|U^{n-1}|^2 + |U^{n-1}|^4)U^n - (-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)U_h^n) - \\ &(-|U^{n-2}|^2 + |U^{n-2}|^4)U^n + (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)U_h^n, e_h^n). \end{aligned} \tag{93}$$

由假设 1、Young 不等式、方程(4)、(24)、(25)以及数学归纳法，得

$$\begin{aligned} &|S_2| \leqslant |\, 2((-1 + 2\xi)(U^{n-1} - R_h U^{n-1} + R_h U^{n-1} - U_h^{n-1}) \times \\ &\quad (|U^{n-1}| + |U_h^{n-1}|)U^n, e_h^n) \,| + \\ &\quad |\, (2(-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)(U^n - R_h U^n + R_h U^n - U_h^n), e_h^n) \,| + \\ &\quad |\, ((-1 + 2\xi)(U^{n-2} - R_h U^{n-2} + R_h U^{n-2} - U_h^{n-2})(|U^{n-2}| + |U_h^{n-2}|)U^n, e_h^n) \,| + \\ &\quad |\, ((-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)(U^n - R_h U^n + R_h U^n - U_h^n), e_h^n) \,| \leqslant \\ &\quad Ch^4 + C(\| e_h^n \|_{L^2} + \| e_h^{n-1} \|_{L^2} + \| e_h^{n-2} \|_{L^2}). \end{aligned} \tag{94}$$

由方程(4)、引理 2、Young 不等式及 Gronwall 不等式，得

$$\| e_h^n \|_{L^2} \leqslant Ch^2. \tag{95}$$

由方程(5)、(72)和上述不等式，得

$$\| U_h^n \|_{L^\infty} \leqslant \| R_h U^n \|_{L^\infty} + \| R_h U^n - U_h^n \|_{L^\infty} \leqslant M + Ch^{-d/2} \| e_h^n \|_{L^2} \leqslant M + 1.$$

则存在一个正常数 h_5，使得 $h \leqslant h_5$，上式成立。令 $h' = \min\{h_1, \cdots, h_5\}$。由此完成了方程(74)的

证明. □

下面证明方程(73),由于方程(74)用数学归纳法可证,当 $n = N$ 时方程(95)也成立,由此证明完成. □

注 1 上述误差估计在 L^2 范数下是最优的,由于在定理 3 中 L^2 误差估计与 τ 无关,因此可由逆不等式得到 H^1 的误差估计:

$$\| \nabla e_h^n \|_{L^2} \leqslant Ch^{-1} \| e_h^n \|_{L^2} \leqslant Ch.$$

由假设 1、定理 2、定理 3 和方程(4),可得到 $r = 1$ 时 L^2 和 H^1 范数下的最优误差估计.

推论 1 设方程(1)的唯一解 u 满足假设 1,那么有限元方程(7)~(9)有唯一解 $U_h^n, n = 1, 2, \cdots, N$,且存在 $\tau'' > 0, h'' > 0$, 使得当 $\tau \leqslant \tau'', h \leqslant h''$ 有

$$\| u^n - U_h^n \|_{L^2} \leqslant C(\tau^2 + h^2),$$

$$\| u^n - U_h^n \|_{H^1} \leqslant C(\tau^2 + h).$$

下面证明定理 1.设 $\sigma_h^n = R_h u^n - U_h^n$, 且由方程(2)、(4)和假设 1,得

$$\| \sigma_h^0 \| \leqslant \| R_h u_0 - u_0 + u_0 - \Pi_h u_0 \|_{L^2} \leqslant Ch^{r+1}. \tag{96}$$

由方程(3)、(9)和(21),得

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\left(\frac{\sigma_h^{1*} - \sigma_h^0}{\tau}, v_h\right) - (\nabla \sigma_h^{1*}, \nabla v_h) + \\ & \quad ((-| u_0 |^2 + | u_0 |^4) u^0 - (-| U_h^0 |^2 + | U_h^0 |^4) U_h^0, v_h) = \\ & \quad (Q^{1*}, v_h) - \mathrm{i}\left(\frac{u^1 - u_0 - R_h(u^1 - u_0)}{\tau}, v_h\right), \end{aligned} \tag{97}$$

这里 $\sigma_h^{1*} = R_h u^1 - U_h^{1*}$.

对上述方程,令 $v_h = \sigma_h^{1*}$,为证明过程简洁,取 $E^1 = \sigma_h^{1*}, E^0 = \sigma_h^0$, 由引理 2 得到

$$\frac{\mathrm{i}}{\tau}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(E^i, E^j) - \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(E^{i-1}, E^{j-1}) + \left| \sum_{i=1}^{2} \sigma_i E^{n-i} \right|\right) = \mathrm{i}\left(\frac{\sigma_h^{1*} - \sigma_h^0}{\tau}, v_h\right). \tag{98}$$

令

$$| B^1 |_G^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(E^i, E^j),$$

则

$$| B^0 |_G^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(E^{i-1}, E^{j-1}).$$

由方程(96)、(97)和 Young 不等式,得

$$\begin{aligned} & \| E^1 \|_{L^2} \leqslant \| B^1 \|_{L^2} \leqslant \\ & \quad \| E^0 \|_{L^2} + C\tau | (((-| u_0 |^2 + | u_0 |^4) - (-| U_h^0 |^2 + | U_h^0 |^4)) u_0, E^1) | + \\ & \quad C\tau | ((-| U_h^0 |^2 + | U_h^0 |^4)(u_0 - R_h u_0), E^1) | + \\ & \quad C\tau | ((-| U_h^0 |^2 + | U_h^0 |^4) E^0, E^1) | + \\ & \quad C\tau | (Q^{1*}, E^1) | + C\tau \left| \left(\frac{u^1 - u_0 - R_h(u^1 - u_0)}{\tau}, E^1\right) \right|. \end{aligned} \tag{99}$$

根据 Young 不等式、假设 2、方程(4)、(74)和(95),得

$$\begin{aligned} & \| E^1 \|_{L^2} \leqslant Ch^{2(r+1)} + \tau | ((-1 + 2\xi)(u_0 - R_h u_0)(| u_0 | + | U_h^0 |) u_0, E^1) | + \\ & \quad \tau | ((-1 + 2\xi)(R_h u_0 - U_h^0)(| u_0 | + | U_h^0 |) u_0, E^1) | + Ch^{2(r+1)} + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\| E^1 \|_{L^2} + C\tau^2 \| Q^{1*} \|_{L^2} + Ch^{2(r+1)} \| u^1 - u_0 \|_{H^{r+1}}. \tag{100}$$

于是由方程(99)、(100),得

$$\| \sigma_h^{1*} \|_{L^2} \leqslant C(\tau^2 + h^{r+1}). \tag{101}$$

由方程(3)、(12)和(22),得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\left(\frac{\sigma_h^1 - \sigma_h^0}{\tau}, v_h\right) - \frac{1}{2}(\nabla(\sigma_h^1 + \sigma_h^0), \nabla v_h) + \\
&\quad \frac{1}{2}((-|u^1|^2 + |u^1|^4) - (-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4)u^1, v_h) + \\
&\quad \frac{1}{2}((-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4)(u^1 - R_h u^1), v_h) + \\
&\quad \frac{1}{2}((-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4)\sigma_h^1, v_h) + \\
&\quad \frac{1}{2}((-|u^0|^2 + |u^0|^4) - (-|U_h^1|^2 + |U_h^1|^4)u^1, v_h) + \\
&\quad \frac{1}{2}((-|U_h^0|^2 + |U_h^0|^4)(u^1 - R_h u^1), v_h) + \\
&\quad \frac{1}{2}((-|U_h^0|^2 + |U_h^0|^4)\sigma_h^1, v_h) = -\mathrm{i}\left(\frac{u^1 - R_h u^1 - (u^0 - R_h u_0)}{\tau}, v_h\right) + (Q^1, v_h).
\end{aligned}$$

令上述方程 $v_h = \sigma_h^1 + \sigma_h^0$, 由其虚部,得

$$\begin{aligned}
\| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 \leqslant &\| \sigma_h^0 \|_{L^2}^2 + C\tau |(((-|u^1|^2 + |u^1|^4) - \\
&(-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4))u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau |((-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4)(u^1 - R_h u^1), \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau |((-|U_h^{1*}|^2 + |U_h^{1*}|^4)\sigma_h^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau |(((-|u^0|^2 + |u^0|^4) - (-|U_h^0|^2 + |U_h^0|^4))u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau |((-|U_h^0|^2 + |U_h^0|^4)(u^1 - R_h u^1), \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau |((-|U_h^0|^2 + |U_h^0|^4)\sigma_h^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau \left|\left(\frac{u^1 - R_h u^1 - (u^0 - R_h u_0)}{\tau}, \sigma_h^1 + \sigma_h^0\right)\right| + \\
&C\tau |(Q^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| := \sum_{i=1}^{9} I_i.
\end{aligned} \tag{102}$$

根据 Young 不等式、假设 1、方程(4)、(96)和(101),得

$$\begin{aligned}
I_1 \leqslant &\ Ch^{2(r+1)}, \\
I_2 \leqslant &\ C\tau |((-1 + 2\xi)(u^1 - R_h u^1)(|u^1| + |U_h^{1*}|)u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| + \\
&C\tau |((-1 + 2\xi)\sigma_h^{1*}(|u^1| + |U_h^{1*}|)u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0)| \leqslant \\
&C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + C\tau \| \sigma_h^0 \|_{L^2}^2 + C\tau \| \sigma_h^{1*} \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)} \leqslant \\
&C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)} + C\tau^4, \\
I_3 \leqslant &\ Ch^{2(r+1)} + C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + C\tau \| \sigma_h^0 \|_{L^2} + C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 \leqslant \\
&C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)} + C\tau^4,
\end{aligned}$$

$$I_4 \leqslant Ch^{2(r+1)} + C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + C\tau \| \sigma_h^0 \|_{L^2} + C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)} + C\tau^4,$$
$$I_5 \leqslant C\tau | ((-1+2\xi)(u^0 - R_h u^0)(|u^0| + |U_h^0|)u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0) | \leqslant$$
$$C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)},$$
$$I_6 \leqslant C\tau | ((-1+2\xi)\sigma_h^0(|u^0| + |U_h^0|)u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0) | \leqslant$$
$$C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)},$$
$$I_7 \leqslant C\tau | ((-|U_h^0|^2 + |U_h^0|^4)(u^1 - R_h u^1)u^1, \sigma_h^1 + \sigma_h^0) | \leqslant$$
$$C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)},$$
$$I_8 \leqslant C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + \| \sigma_h^0 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)} \| u^1 - u^0 \|_{H^{r+1}}^2 \leqslant$$
$$C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)},$$
$$I_9 \leqslant C\tau \| Q^1 \|_{L^2}^2 + C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C\tau \| \sigma_h^1 \|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)} + Ch^{2(r+1)}.$$

于是由上述不等式,可得

$$\| \sigma_h^1 \|_{L^2} \leqslant C(\tau^2 + h^{r+1}). \tag{103}$$

由方程(3)、(12)和(22),得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}(D_\tau \sigma_h^n, v_h) - (\nabla \sigma_h^n, \nabla v_h) + (2((-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4) - \\
&\quad (-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4))u^n, v_h) + \\
&\quad (2(-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)(u^n - U_h^n), v_h) - \\
&\quad ((-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)(u^n - U_h^n), v_h) - \\
&\quad (((-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4) - (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4))U_h^n, v_h) = \\
&\quad -\mathrm{i}(D_\tau(u^n - R_h u^n), v_h) + (Q^n, v_h).
\end{aligned} \tag{104}$$

根据引理 2,将 $D_\tau \sigma_h^n$ 展开,得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{\tau}\left(\frac{3}{2}\sigma_h^n - 2\sigma_h^{n-1} + \frac{1}{2}\sigma_h^{n-2}, \sigma_h^n\right) = \\
&\quad \frac{i}{\tau}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\sigma_h^{n+i-2}, \sigma_h^{n+j-2}) - \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\sigma_h^{n+i-3}, \sigma_h^{n+j-3}) + \left| \sum_{i=1}^{2} \upsilon_i \sigma_h^{n-i} \right| \right).
\end{aligned} \tag{105}$$

令

$$|\Theta^1|_G^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\sigma_h^{i-1}, \sigma_h^{j-1}),\ |\Theta^n|_G^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{i,j}(\sigma_h^{n+i-2}, \sigma_h^{n+j-2}).$$

根据方程(104)、(105)以及 Young 不等式,有

$$\begin{aligned}
&|\Theta^n|_G^2 - |\Theta^{n-1}|_G^2 \leqslant \\
&\quad C\tau | (2((-|u^{n-1}|^2 + |u^{n-1}|^4) - (-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4))u^n, \sigma_h^n) | + \\
&\quad C\tau | (2(-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)(u^n - R_h u^n), \sigma_h^n) | - \\
&\quad C\tau | (2(-|U_h^{n-1}|^2 + |U_h^{n-1}|^4)\sigma_h^n, \sigma_h^n) | + \\
&\quad C\tau | (2(-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)(u^n - R_h u^n), \sigma_h^n) | - \\
&\quad C\tau | (2(-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4)\sigma_h^n, \sigma_h^n) | + \\
&\quad C\tau | (2((-|u^{n-2}|^2 + |u^{n-2}|^4) - (-|U_h^{n-2}|^2 + |U_h^{n-2}|^4))U_h^n, \sigma_h^n) | + \\
&\quad C\tau | (D_\tau(u^n - R_h u^n), \sigma_h^n) | + C\tau | (Q^n, v_h) | := \sum_{i=1}^{8} J_i.
\end{aligned} \tag{106}$$

由假设 1、方程(4)和(74),得

$$
\begin{aligned}
J_1 &\leqslant C\tau \mid ((-1+2\xi)(u^{n-1}-R_h u^{n-1})(\mid u^{n-1}\mid+\mid U_h^{n-1}\mid)u^n,\sigma_h^n)\mid + \\
&\quad C\tau \mid ((-1+2\xi)\sigma_h^{n-1}(\mid u^{n-1}\mid+\mid U_h^{n-1}\mid)u^n,\sigma_h^n)\mid \leqslant \\
&\quad C\tau \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_2 &\leqslant C\tau \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_3 &\leqslant C\tau \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_4 &\leqslant C\tau \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_5 &\leqslant C\tau \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_6 &\leqslant C\tau \mid ((-1+2\xi)(u^{n-2}-R_h u^{n-2})(\mid u^{n-2}\mid+\mid U_h^{n-2}\mid)U_h^n,\sigma_h^n)\mid + \\
&\quad C\tau \mid ((-1+2\xi)\sigma_h^{n-2}(\mid u^{n-2}\mid+\mid U_h^{n-2}\mid)U_h^n,\sigma_h^n)\mid \leqslant \\
&\quad C\tau \|\sigma_h^{n-2}\|_{L^2}^2 + \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_7 &\leqslant C\tau \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}, \\
J_8 &\leqslant C\tau \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + \|Q^n\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

对方程(106)从 $n=1$ 到 $n=m$ 求和,得

$$
\begin{aligned}
&\mid \Theta^n \mid_G^2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} C\tau \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + C\tau^4 + Ch^{2(r+1)} + \mid \Theta^1 \mid_G^2 \leqslant \\
&\quad \sum_{n=2}^{N} C\tau \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + C\tau^4 + Ch^{2(r+1)} + \mid \sigma_h^1 \mid_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{107}
$$

由方程(103)、(107)和 $\|\sigma_h^n\|_{L^2}^2$ 的正则性,得

$$
\begin{aligned}
&\|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{n=2}^{N} C\tau \|\sigma_h^{n+i-2}\|_{L^2}^2 \leqslant \mid \Theta^n \mid_G^2 \leqslant \\
&\quad \sum_{n=2}^{N} C\tau \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + C\tau^4 + Ch^{2(r+1)} .
\end{aligned} \tag{108}
$$

由方程(105)~(108)和 Gronwall 不等式,得

$$
\|\sigma_h^n\|_{L^2} \leqslant C(\tau^2 + h^{r+1}) . \tag{109}
$$

则存在一个正常数 h_6,使得 $h \leqslant h_6$, 方程(109)成立.

令 $h_0 = \min\{h', h_6\}$, 由此,根据方程(4)和(109),完成了定理 1 的证明. □

4 数 值 算 例

例 考虑下面的 Schrödinger 方程:

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}u_t + \Delta u + \mid u \mid^2 u = g, & \boldsymbol{x} \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T, \\
u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
u = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,
\end{cases} \tag{110}
$$

这里 $\Omega = \{(x,y):(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.5^2\}$.由下面的精确解 u 定义右端项 g 和初值条件:

$$
u = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(3 + 2t^2)x(2-x)y(5-y) .
$$

在计算过程中,分别用二阶向后差分的线性有限元方法和二次有限元方法求解方程(110).为确定 L^2 范数的最优收敛速度,线性有限元选用 $\tau = O(h)$,二次有限元选用 $\tau^2 = O(h^3)$.取 $T = 0.5,1,1.5,2$, 在表 1 和 2 中给出数值结果.由表 1 和 2 可以看出,在 L^2 范数下线性有限元误

差估计与 h^2 成正例，且二次有限元的误差估计与 h^3 成正例.因此，数值结果与理论分析一致.

表 1 L^2 范数线性有限元误差估计

Table 1 L^2- error estimates of the linear FEM

h	$\Vert u(\cdot,t_n) - U_h^n \Vert_{L^2}$			
	$T = 0.5$	$T = 1$	$T = 1.5$	$T = 2$
1/16	1.124 5E−2	2.961 7E−2	5.442 3E−2	1.557 3E−1
1/32	2.389 0E−3	7.195 8E−3	1.331 6E−2	3.806 8E−2
1/64	5.524 9E−4	1.650 1E−3	3.301 2E−3	9.242 7E−3
1/128	1.368 5E−4	3.894 1E−4	7.965 8E−4	2.289 6E−3
1/256	3.337 8E−5	9.691 7E−5	1.943 8E−4	5.664 3E−4
order α	2.10	2.06	2.03	2.03

表 2 L^2 范数二次有限元误差估计

Table 2 L^2- error estimates of the quadratic FEM

h	$\Vert u(\cdot,t_n) - U_h^n \Vert_{L^2}$			
	$T = 0.5$	$T = 1$	$T = 1.5$	$T = 2$
1/16	2.361 9E−4	6.162 7E−4	1.486 2E−3	3.635 2E−3
1/32	2.216 4E−5	6.292 8E−5	1.549 9E−4	3.857 5E−4
1/64	2.519 7E−6	6.251 7E−6	1.731 8E−5	4.397 9E−5
1/128	2.664 7E−7	7.086 1E−7	1.842 1E−6	4.775 5E−6
1/256	2.893 3E−8	7.712 4E−8	1.985 7E−7	5.205 1E−7
order α	3.25	3.24	3.22	3.19

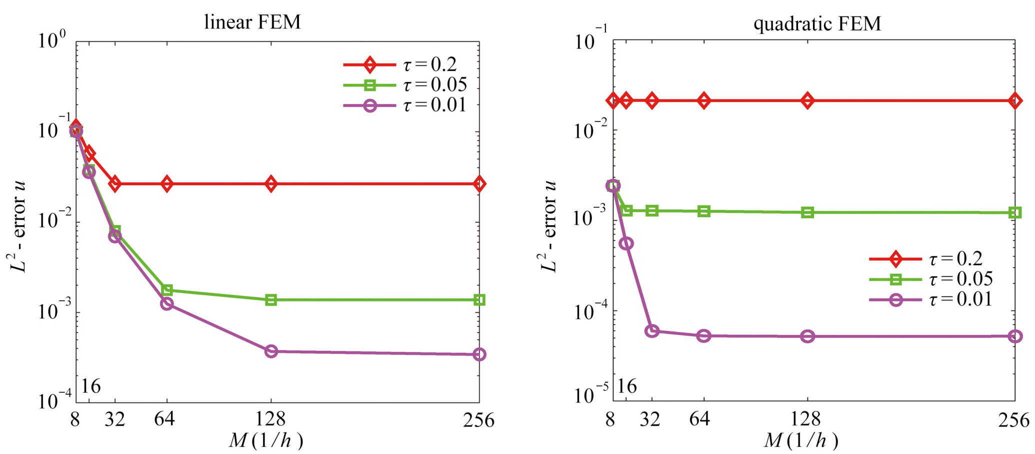

图 1 线性和二次有限元方法的 L^2 误差估计

Fig. 1 L^2- norm errors of the linear and quadratic FEMs

为进一步说明无条件稳定，在 $T = 1$ 时，研究二阶向后差分线性有限元估计和二次有限元估计与时间步长 $\tau = 0.2, 0.05, 0.01$，网格尺度 $1/h = 8, 16, 32, 128, 256$ 的关系.从图 1 可以看出，对固定时间步长 τ，当网格尺度逐步加细时，在 L^2 范数下线性有限元和二次有限元误差估计基本趋向于常数.因此，方程(110)的 BDF2-FEM 算法的稳定性对时间步长无强制条件.

5 结　　论

本文由 BDF2-FEM 方法得到了立方 Schrödinger 方程在 L^2 范数下的无条件最优误差估计.

通过将该方程的误差分为时间误差和空间误差两部分,给出了强范数下时间离散方程解的一致有界性.进一步地,得到了全离散有限元解的一致有界性,并得到了最优误差估计对时间步长无强制条件.另外,该方法还可以分析其他的非线性抛物型方程.

参考文献(References):

[1] DELFOUR M, FORTIN M, PAYRE G. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **44**(2): 277-288.

[2] EBAID A, KHALED S M. New types of exact solutions for nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8): 1984-1992.

[3] LI B Y, SUN W W. Error analysis of linearized semi-implicit Galerkin finite element methods for nonlinear parabolic equations[J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2013, **10**(3): 622-633.

[4] LI B Y, SUN W W. Unconditionally optimal error estimates of a Crank-Nicolson Galerkin method for the nonlinear thermistor equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012, **52**(2): 933-954.

[5] LAMBERT J D. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: the Initial Value Problem*[J]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1991.

[6] BAKER G, DOUGALIS V, KARAKASHIAN O. On a higher accurate fully discrete Galerkin approximation to the Navier-Stokes equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1982, **39**(160): 339-375.

[7] CAI W, LI J, CHEN Z. Unconditional convergence and optimal error estimates of the Euler semi-implicit scheme for a generalized nonlinear Schrödinger equation[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2016, **42**(6): 1311-1330.

[8] CAI W, LI J, CHEN Z. Unconditional optimal error estimates for BDF2-FEM for a nonlinear Schrödinger equation[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, **331**: 23-41.

[9] DUPONT T. Three-level Galerkin methods for parabolic equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1974, **11**(2): 392-410.

[10] 姜礼尚, 庞之垣. 有限元方法及其理论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.(JIANG Lishang, PANG Zhiyuan. *Finite Element Method and Its Theory*[M]. Beijing: People's Education Press, 1979.(in Chinese))

[11] BREZZI F, RAPPAZ J, RAVIART P A. *Finite Dimensional Approximation of Nonlinear Problems*[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[12] AKRIVIS G, LARSSON S. Linearly implicit finite element methods for the time-dependent Joule heating problem[J]. *Bit Numerical Mathematics*, 2005, **45**(3): 429-442.

[13] JENSEN M, MALQVIST A. Finite element convergence for the Joule heating problem with mixed boundary conditions[J]. *Bit Numerical Mathematics*, 2013, **53**(2): 475-496.

[14] BULUT H, PANDIR Y, DEMIRAY S T. Exact solutions of nonlinear Schrödinger equation with dual power-law nonlinearity by extended trial equation method[J]. *Waves Random Complex Media*, 2014, **24**(4): 439-451.

[15] HEYWOOD J G, RANNACHER R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem IV: error analysis for second-order time discretization[J]. *SIAM Journal on*

Numerical Analysis, 1984, **27**(2): 353-384.

[16] FEIT M D, FLECK J A, STEIGER A. Solution of the Schrödinger equation by a spectral method II: vibrational energy levels of triatomic molecules[J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, **78**(1): 301-308.

Unconditionally Optimal Error Estimates of the Semi-Implicit BDF2-FEM for Cubic Schrödinger Equations

DAI Meng, YIN Xiaoyan

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *P.R.China*)

Abstract: The optimal error estimates of the semi-implicit BDF2-FEM were studied for cubic Schrödinger equations. First, an error estimate was divided into 2 parts: the temporal-discretization and the spatial-discretization. Through introduction of a temporal-discretization equation, the uniform boundedness of the solution and the temporal error estimate were obtained. The unconditionally optimal error estimates of the 2nd-order backward difference (BDF2-FEM) semi-implicit scheme for cubic Schrödinger equations were given. Finally, numerical examples verify the theoretical analysis.

Key words: unconditional convergence; backward Euler method; Galerkin finite element method; Schrödinger equation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11771259)

引用本文/Cite this paper:

代猛, 尹小艳. 立方 Schrödinger 方程的半隐格式 BDF2-FEM 无条件最优误差估计[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 663-681.

DAI Meng, YIN Xiaoyan. Unconditionally optimal error estimates of the semi-implicit BDF2-FEM for cubic Schrödinger equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 663-681.