

# 基于多项式混沌展开的结构动力特性 高阶统计矩计算\*

万华平, 郇永敢, 钟 剑, 任伟新

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

(本刊编委任伟新来稿)

**摘要:** 结构参数的不确定性会导致其动力特性的不确定性, 量化动力特性的不确定性能为结构动力设计分析提供准确的动力信息. 统计矩是表征结构动力特性不确定性非常重要的统计量, 比如均值和方差. 传统的 Monte-Carlo(蒙特-卡洛)模拟方法需要大量次数的模型运算来保证结果的收敛, 其用于复杂结构的动力特性统计矩计算因耗时太高而使用受限. 该文采用多项式混沌展开替代模型来取代计算花费高的有限元模型, 然后在替代模型框架下快速有效地计算结构动力特性的统计矩. 该方法在建立替代模型之初只需要少量次数有限元分析, 后续的统计矩计算无需有限元模型, 因此从根本上解决了动力特性统计矩计算花费高的难题. 该文的多项式混沌展开方法适用于参数服从任意概率分布, 能够有效地计算高阶统计矩, 为量化结构动力特性不确定性提供更多统计矩信息. 最后通过平铝板算例验证了此方法的有效性.

**关键词:** 不确定性; 动力特性; 高阶统计矩; 多项式混沌展开

**中图分类号:** O324

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.390165

## 引 言

结构动力特性是结构动力响应分析和动力设计的基础, 因此结构动力特性非常重要. 结构动力特性主要取决于结构系统刚度、质量分布以及边界条件等因素, 对于结构的抗震抗风设计、振动分析等均有重要意义, 如用来防止共振现象和减隔震设置等<sup>[1]</sup>. 然而结构参数的真实值很难或者不可能准确获得, 引起结构参数不确定性来源主要包括材料特性的不确定性、几何尺寸的不确定性、结构边界条件的不确定性以及结构物理性质的不确定性等<sup>[2]</sup>. 结构参数不确定性必将会导致结构动力特性具有不确定性(变异性), 因此有必要量化参数不确定性传递给动力特性不确定性的信息, 为结构动力分析提供更为准确的动力信息.

统计矩(比如均值和方差)是表征结构动力特性不确定性非常重要的统计量, 反映了结构动力特性变化的统计特性. 高阶统计矩可用来逼近动力特性的的概率密度函数, 可为表征动力特性不确定提供更全面的信息. MCS(Monte-Carlo simulation)方法是结构动力特性不确定性

\* 收稿日期: 2018-06-13; 修订日期: 2018-10-16

**基金项目:** 国家自然科学基金(51878235; 51508144); 香江学者计划(XJ2016039); 中国博士后科学基金(2015M581981); 安徽省自然科学基金(1608085QE118)

**作者简介:** 万华平(1986—), 男, 副教授(E-mail: huaping.wan@hftu.edu.cn);

任伟新(1960—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: renwx@hfut.edu.cn).

量化最基本的方法,它主要是对结构进行大量的有限元分析,然后对得到的动力特性进行统计,进而得到动力特性的统计矩和概率密度函数等.MCS方法<sup>[3-5]</sup>虽然简单且便于实施,但其涉及到大量次数的模型计算,计算成本很高.摄动法<sup>[6-8]</sup>在动力特性不确定性量化也得到广泛的应用,但是当随机参数较多且模型非线性程度较高时,其计算结果不够理想.与此同时,区间分析法<sup>[9-12]</sup>也在结构动力特性确定性量化中得到广泛应用.上述摄动法和区间分析法均需要得到结构的系统矩阵(质量、刚度和阻尼矩阵),然而复杂结构的有限元模型往往是借助商用有限元软件建立的,因此提取结构的系统矩阵并进行后续的迭代计算是非常困难的.

为了克服MCS等方法的不足,本文提出采用多项式混沌展开(polynomial chaos expansion, PCE)替代模型取代原复杂的有限元模型.多项式混沌展开建立的思想是响应可以表示成随机参数的正交多项式形式,可很好地近似随机参数与目标量的输入输出关系.本文提出的多项式混沌展开方法适用于随机参数服从任意概率分布,且可用来计算动力特性的高阶统计矩.该方法的具体实施流程是:不确定参数为自变量和目标变量结构动力特性为因变量,将结构动力特性的统计矩分解为单随机变量统计特征与多项式混沌展开系数的组合形式,然后进行简单运算即可得到结构动力特性的统计矩.多项式混沌展开法在结构动力特性高阶统计矩计算的有效性通过一平板结构进行验算,计算结果与MCS法进行对比.除此之外,本文还探究了结构随机变量变异系数对结构动力特性统计矩的影响.

## 1 多项式混沌展开

### 1.1 理论基础

将任意多项式混沌展开应用于不确定性量化时,组成多项式混沌展开模型的最优基底取决于各个随机变量的概率密度函数.对于正交多项式序列 $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^m$ , $\varphi_l(x)$ 是第 $l$ 阶多项式, $\omega(x)$ 为该多项式的正测度(positive measure),则该正交多项式序列满足以下关系:

$$\langle \varphi_l(x), \varphi_j(x) \rangle = \int_S \varphi_l(x) \varphi_j(x) \omega(x) dx = \gamma_l \delta_{lj}, \quad (1)$$

其中, $S$ 为满足正测度 $\omega(x)$ 的积分区域, $\gamma_l = \langle \varphi_l(x), \varphi_l(x) \rangle$ 为标准化常量, $x$ 为单变量; $\delta_{lj}$ 为Kronecker(克罗内克)符号.

正交多项式序列满足下面的3项递推关系<sup>[13]</sup>:

$$\begin{cases} \varphi_{i+1}(x) = (x - a_i) \varphi_i(x) - b_i \varphi_{i-1}(x), & i = 0, 1, 2, \dots, \\ \varphi_{-1}(x) = 0, \\ \varphi_0(x) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

递推系数如下:

$$a_i = \frac{\langle x \varphi_i, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$b_i = \begin{cases} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle, & i = 0, \\ \frac{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_{i-1}, \varphi_{i-1} \rangle}, & i = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (4)$$

由上式可知递推系数由正测度 $\omega(x)$ 唯一确定,由此能够确定出与单随机变量任意概率密度函数相匹配的正交多项式基底.多维的多项式混沌展开式为多个单变量正交多项式连乘再相

加形式,如下所示:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_q=0}^{N_q} \beta_{i_1 \cdots i_q} \psi_{i_1 \cdots i_q}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

式中,  $\psi_{i_1 \cdots i_q}(\mathbf{x}) = \varphi_{i_1}(x_1) \varphi_{i_2}(x_2) \cdots \varphi_{i_q}(x_q)$ ,  $\varphi_{i_k}(x_k)$  为单变量  $x_k$  所保留正交多项式的  $i_k$  次项,  $\beta_{i_1 \cdots i_q}$  为多项式混沌展开系数,  $N_k$  是单变量  $x_k$  的正交多项式的阶数.

在实际应用中,多项式混沌展开达到一定阶数时即可满足所要求的模拟精度,故在使用多项式混沌展开模型时可以进行截断.对于  $d$  个随机参数,每个参数的最高阶次均设定为  $p$  时,则多项式混沌展开的待定系数个数为

$$K + 1 = \frac{(d + p)!}{d! p!}. \quad (6)$$

此时多项式混沌展开为

$$y \approx \sum_{\alpha \in A^{p,d}} \beta_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}), \quad A^{p,d} \equiv \{ \alpha \in N^d : \| \alpha \|_1 \leq p \}. \quad (7)$$

如当  $d = 3$ , 取多项式混沌展开阶次  $p = 2$ , 设单变量的前两阶一维多项式基底为  $\varphi_{i,0}(x_i) = 1$ ,  $\varphi_{i,1}(x_i)$ ,  $\varphi_{i,2}(x_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 则对应的三参数二阶多项式混沌展开为

$$y = \beta_0 + \beta_1 \varphi_{1,1}(x_1) + \beta_2 \varphi_{2,1}(x_2) + \beta_3 \varphi_{3,1}(x_3) + \beta_{1,2} \varphi_{1,1}(x_1) \varphi_{2,1}(x_2) + \beta_{1,3} \varphi_{1,1}(x_1) \varphi_{3,1}(x_3) + \beta_{2,3} \varphi_{2,1}(x_2) \varphi_{3,1}(x_3) + \beta_{1,1} \varphi_{1,2}(x_1) + \beta_{2,2} \varphi_{2,2}(x_2) + \beta_{3,3} \varphi_{3,2}(x_3). \quad (8)$$

接下来介绍几种标准的多项式混沌展开例子,即对应于概率密度为正态分布、beta 分布和均匀分布.关于其他概率分布(即任意概率分布)的多项式混沌展开的推导请查阅文献[14].

## 1.2 标准的多项式混沌展开

### 1.2.1 Hermite 多项式

Hermite 多项式是一类经常使用的经典多项式.对应于随机变量服从正态分布的情况,其概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)/(2\sigma^2)}; \quad (9)$$

递推系数为

$$\begin{cases} a_i = \mu, & i \geq 0, \\ b_i = i\sigma^2, & i \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

表 1 中列出了对应标准正态分布 ( $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ) 的前 5 项一维 Hermite 多项式,如图 1 所示.

表 1 前 5 项 Hermite 多项式

Table 1 The 1st 5 Hermite polynomials

$k$	one-dimensional Hermite polynomial $H_k(x), x \in (-\infty, +\infty)$
0	1
1	$x$
2	$x^2 - 1$
3	$x^3 - 3x$
4	$x^5 - 10x^3 + 15x$

### 1.2.2 Jacobi 多项式

Jacobi 多项式混沌展开对应于概率密度分布为 beta 分布, beta 分布的概率密度函数为

$$p(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1. \tag{11}$$

递推系数为

$$\begin{cases} a_i = \frac{\alpha(\alpha + \beta) + \alpha(2i - 2) + 2i\beta + i(2i - 1)}{(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i - 2)}, & i \geq 0, \\ b_i = \frac{i(\alpha + \beta + i - 2)(\alpha + i - 1)(\beta + i - 1)}{(\alpha + \beta + 2i - 1)(\alpha + \beta + 2i - 3)(\alpha + \beta + 2i - 2)}, & i \geq 1. \end{cases} \tag{12}$$

取  $\alpha = 1, \beta = 2$  时, 表 2 列出了前 5 项一维 Jacobi 多项式, 如图 2 所示.

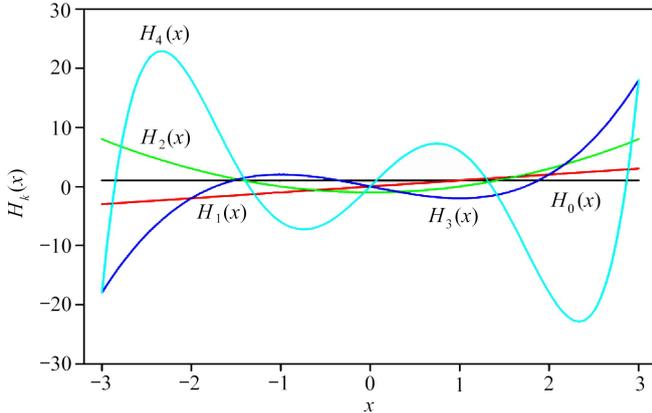


图 1 前 5 项 Hermite 多项式曲线图

Fig. 1 The 1st 5 Hermite polynomial curves

表 2 前 5 项 Jacobi 多项式

Table 2 The 1st 5 Jacobi polynomials

$k$	one-dimensional Jacobi polynomial $J_k(x), x \in (0, 1)$
0	1
1	$x - \frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{10}(10x^2 - 8x + 1)$
3	$\frac{1}{35}(35x^3 - 45x^2 + 15x - 1)$
4	$\frac{1}{126}(126x^4 - 224x^3 + 126x^2 - 24x + 1)$

### 1.2.3 Legendre 多项式

Legendre 多项式混沌展开对应于概率密度分布为均匀分布. 很显然均匀分布是 beta 分布的一个特例, 当  $\alpha = \beta = 0$  时 beta 分布退化为均匀分布如下:

$$p(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [-1, 1]. \tag{13}$$

因此令式 (12) 的  $\alpha = \beta = 0$ , 可得到 Legendre 的递推系数:

$$\begin{cases} a_i = 0, & i \geq 0, \\ b_i = \frac{i^2}{4i^2 - 1}, & i \geq 1. \end{cases} \tag{14}$$

表 3 列出了前 5 项一维 Legendre 多项式, 如图 3 所示.

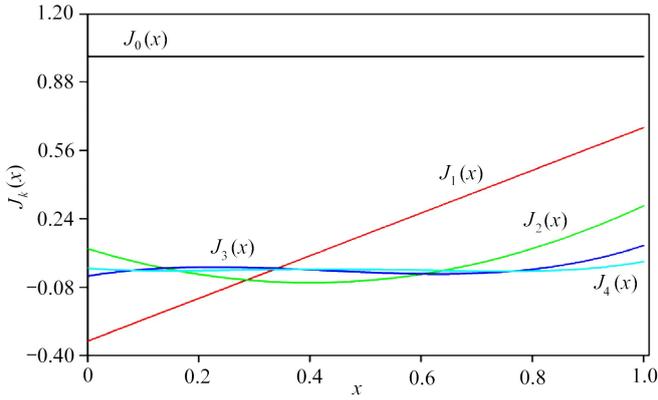


图 2 前 5 项 Jacobi 多项式曲线图

Fig. 2 The 1st 5 Jacobi polynomial curves

表 3 前 5 项 Legendre 多项式

Table 3 The 1st 5 Legendre polynomials

$k$	one-dimensional Legendre polynomial $L_k(x), x \in [-1, 1]$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

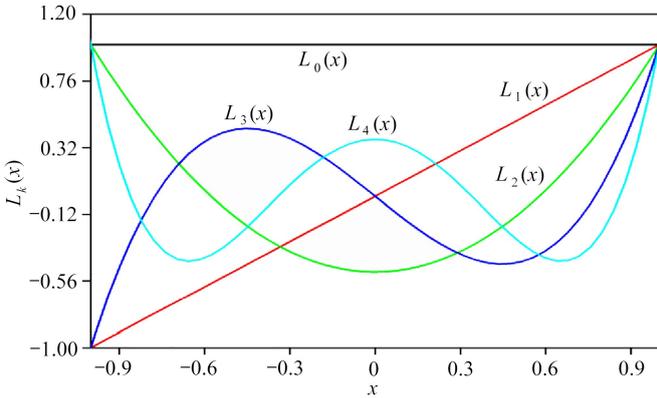


图 3 前 5 项 Legendre 多项式曲线图

Fig. 3 The 1st 5 Legendre polynomial curves

## 2 基于多项式混沌展开的统计矩计算

多项式混沌展开完全由其系数决定, 本文采用回归方法来估计多项式混沌展开系数, 即最小二乘法拟合方法. 假设共有  $n$  组样本,  $\mathbf{y} = \{y_i\}$  是每组样本所获得的系统输出向量, 截断的  $K + 1$  个多项式混沌展开系数表示为  $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ , 则系数最优值估计为求解下式最小化问题  $\mathbf{y}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\alpha} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}_{\alpha} \in N^{K+1}} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{\alpha \in A^{p,d}} \boldsymbol{\beta}_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}_i) \right)^2, \quad A^{p,d} \equiv \{ \boldsymbol{\alpha} \in N^d : \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \leq p \}. \quad (15)$$

设定符号如下:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}_1) & \psi_1(\mathbf{x}_1) & \cdots & \psi_k(\mathbf{x}_1) \\ \psi_0(\mathbf{x}_2) & \psi_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & \psi_k(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_0(\mathbf{x}_n) & \psi_1(\mathbf{x}_n) & \cdots & \psi_k(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (16)$$

则式(15)的最优解为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\alpha} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}. \quad (17)$$

一旦多项式混沌展开被确定,接下来就可以在多项式混沌展开替代模型框架下求解动力特性的统计矩.为了描述方便,多项式混沌展开写成如下形式:

$$y(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 \psi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_k \psi_k(\mathbf{x}). \quad (18)$$

则动力特性的  $k$  阶统计矩可由下式计算:

$$\mu^k = \int y^k(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (19)$$

由于  $y(\mathbf{x})$  为多项式混沌展开形式,因此其  $k$  次方也为多项式形式.注意到多项式为多个变量不同次方乘积连加形式,因此式(19)最后转化为求解单变量原点矩问题.比如动力特性的一阶统计矩可表示如下:

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 E(\psi_1(\mathbf{x})) + \cdots + \beta_k E(\psi_k(\mathbf{x})) = \beta_0, \quad (20)$$

式中  $E(\cdot)$  表示求均值运算.

由式(18)和(20)可知,采用多项式混沌展开替代模型使结构动力特性的高阶统计矩的高维积分问题转变为一维积分问题,使问题变得非常简单.因此,利用多项式混沌展开替代模型可从根本上解决复杂结构动力特性的统计矩计算耗时巨大的问题.

### 3 方法验证

采用一块长为 0.55 m、宽为 0.1 m 的平铝板(图 4)算例来验证多项式混沌展开方法的有效性.

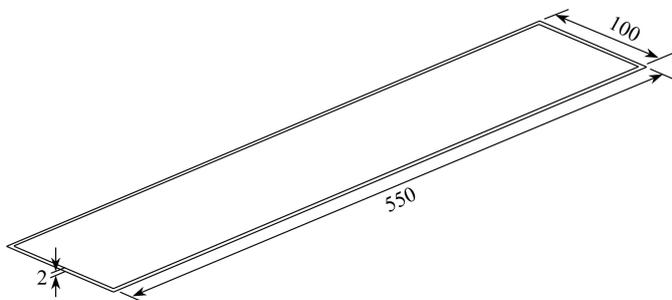


图 4 平铝板尺寸示意图(单位:mm)

Fig. 4 Schematic diagram of the aluminum plate(unit: mm)

平铝板在制作过程中存在物理材料和结构几何尺寸等不确定性,为此假设弹性模量服从正态分布,均值为  $E = 7.0 \times 10^{10}$  Pa, 变异系数  $\rho_{\text{cov}}$  为 0.1; 质量密度服从均匀分布,均值为  $D =$

$2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 变异系数  $\rho_{\text{cov}}$  为 0.1; 厚度服从正态分布, 均值为  $T = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 变异系数  $\rho_{\text{cov}}$  为 0.15. 剪切模量  $G$  视为确定性参数  $G = 2.6 \times 10^{10} \text{ Pa}$ . 该平板的有限元模型在 ANSYS 有限元软件平台上建立. 整块平板采用壳单元 (Shell63) 模拟, 有限元模型共有 561 个节点和 500 个单元. 平铝板的有限元模型及前四阶模态如图 5 所示.

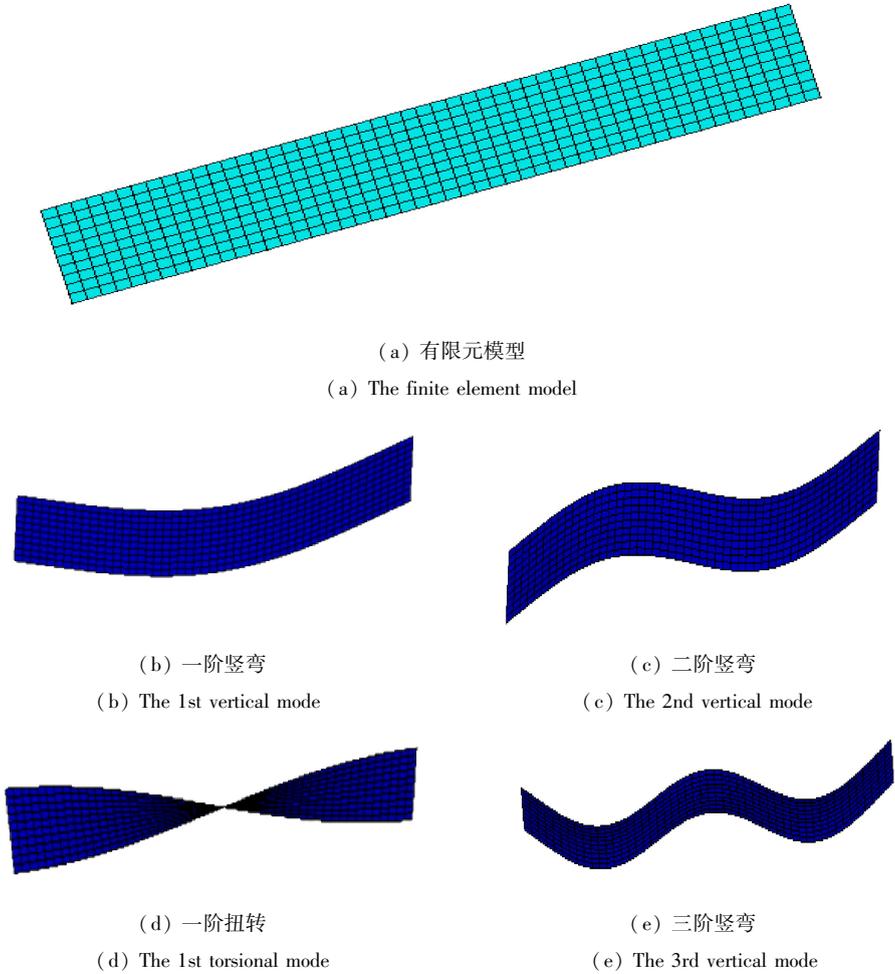


图 5 平铝板有限元模型及前四阶模态

Fig. 5 The finite element model and the 1st 4 modes of the aluminum plate

表 4 一阶竖弯固有频率高阶统计矩计算

Table 4 Calculation of high order statistical moments of the 1st vertical mode natural frequency

statistical moments	PCE	MCS	relative error $\varepsilon / \%$
the 1st order $F_1^{(1)} / \text{Hz}$	34.762 8	34.762 2	0.001 7
the 2nd order $F_2^{(1)} / \text{Hz}^2$	1.241 9E+3	1.241 9E+3	0.000 0
the 3rd order $F_3^{(1)} / \text{Hz}^3$	4.552 7E+4	4.552 5E+4	0.004 4
the 4th order $F_4^{(1)} / \text{Hz}^4$	1.710 4E+6	1.710 4E+6	0.000 0
the 5th order $F_5^{(1)} / \text{Hz}^5$	6.577 9E+7	6.578 5E+7	0.009 1

首先采用 Sobol 实验设计方法<sup>[15]</sup>用来产生训练样本, 然后对每个训练样本执行有限元分析, 得到训练样本对应的目标量, 即固有频率. 接着根据训练样本点来构建多项式混沌展开替

代模型,最后基于替代模型来计算固有频率的统计矩.本文提出的方法可以计算任意高阶统计矩,限于篇幅仅列出前五阶统计矩.与此同时,MCS 方法用来验证本文方法的精度,对比结果如表 4~7 所示.由表 4~7 可以看到,多项式混沌展开方法与 MCS 方法的结果非常接近,最大相对误差仅为 0.009 4%,表明本文提出的基于多项式混沌展开的统计矩计算方法的准确性.

表 5 二阶竖弯固有频率高阶统计矩计算

Table 5 Calculation of high order statistical moments of the 2nd vertical mode natural frequency

statistical moments	PCE	MCS	relative error $\varepsilon$ /%
the 1st order $F_1^{(2)}$ /Hz	96.257 3	96.255 6	0.001 8
the 2nd order $F_2^{(2)}$ /Hz <sup>2</sup>	9.521 7E+3	9.521 3E+3	0.004 2
the 3rd order $F_3^{(2)}$ /Hz <sup>3</sup>	9.664 7E+5	9.664 4E+5	0.003 1
the 4th order $F_4^{(2)}$ /Hz <sup>4</sup>	1.005 3E+8	1.005 3E+8	0.000 0
the 5th order $F_5^{(2)}$ /Hz <sup>5</sup>	1.070 4E+10	1.070 5E+10	0.009 3

表 6 一阶扭转固有频率高阶统计矩计算

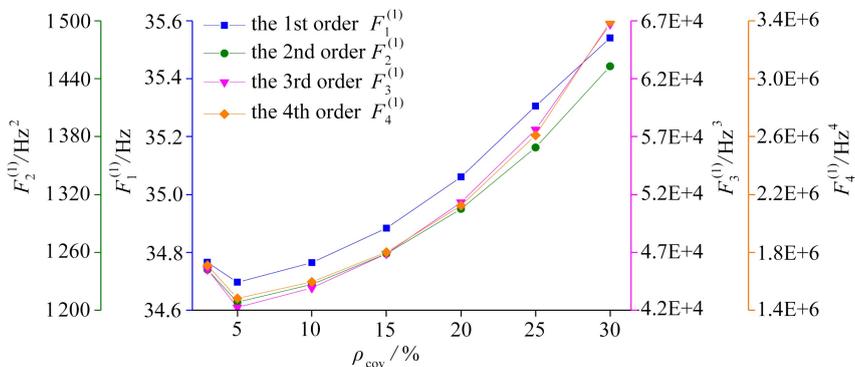
Table 6 Calculation of high order statistical moments of the 1st torsional mode natural frequency

statistical moments	PCE	MCS	relative error $\varepsilon$ /%
the 1st order $R_1^{(1)}$ /Hz	114.157 9	114.155 5	0.002 1
the 2nd order $R_2^{(1)}$ /Hz <sup>2</sup>	1.335 9E+4	1.335 9E+4	0.000 0
the 3rd order $R_3^{(1)}$ /Hz <sup>3</sup>	1.600 3E+6	1.600 2E+6	0.006 2
the 4th order $R_4^{(1)}$ /Hz <sup>4</sup>	1.959 8E+8	1.959 7E+8	0.005 1
the 5th order $R_5^{(1)}$ /Hz <sup>5</sup>	2.451 0E+10	2.451 1E+10	0.004 1

表 7 三阶竖弯固有频率高阶统计矩计算

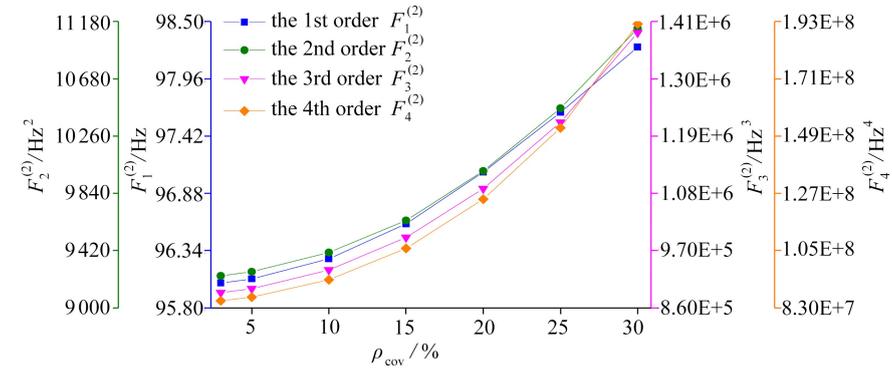
Table 7 Calculation of high order statistical moments of the 3rd vertical mode natural frequency

statistical moments	PCE	MCS	relative error $\varepsilon$ /%
the 1st order $F_1^{(3)}$ /Hz	189.639 8	189.636 5	0.001 7
the 2nd order $F_2^{(3)}$ /Hz <sup>2</sup>	3.695 7E+4	3.695 5E+4	0.005 4
the 3rd order $F_3^{(3)}$ /Hz <sup>3</sup>	7.390 0E+6	7.389 7E+6	0.004 1
the 4th order $F_4^{(3)}$ /Hz <sup>4</sup>	1.514 4E+9	1.514 3E+9	0.006 6
the 5th order $F_5^{(3)}$ /Hz <sup>5</sup>	3.176 4E+11	3.176 7E+11	0.009 4



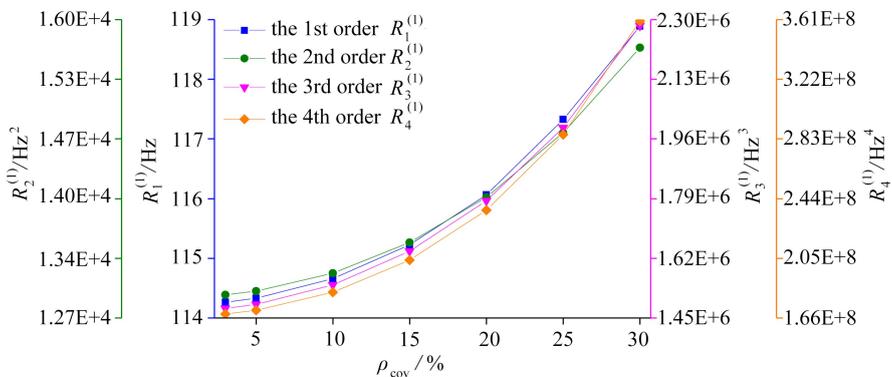
(a) 一阶竖弯频率

(a) The 1st vertical frequency



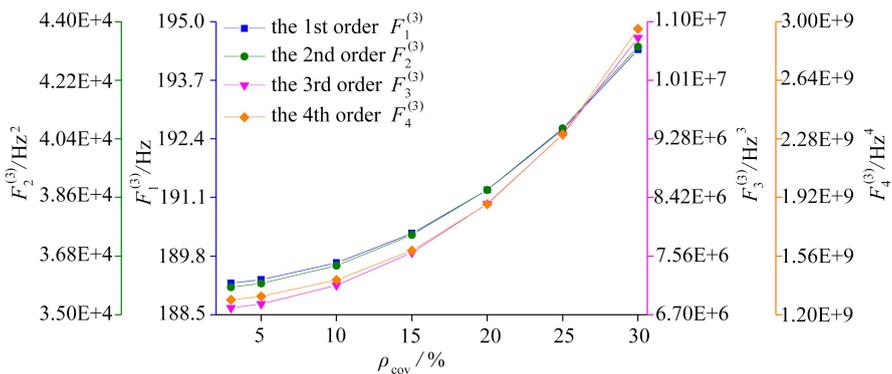
(b) 二阶竖弯频率

(b) The 2nd vertical frequency



(c) 一阶扭转频率

(c) The 1st torsional frequency



(d) 三阶竖弯频率

(d) The 3rd vertical frequency

图 6 前四阶固有频率统计矩与变异系数变化关系

Fig. 6 Statistical moments of the 1st 4 natural frequencies against the coefficient of variation

在验证本文方法的有效性后，接下来探究参数变异性系数大小对平板结构的固有频率统计矩的影响。为此将随机变量的变异系数分别设定为 3%，5%，10%，15%，20%，25% 和 30%，然后采用多项式混沌展开方法来计算固有频率的统计矩。绘制统计矩随参数变异系数变化的

关系曲线,结果如图6所示(注意为了展示方便,在此只给出了前四阶统计矩的结果).由图6(a)可以看出,随着随机变量变异系数的增大,一阶竖弯固有频率统计矩在开始时有轻微下降,随后随着变异系数的增大而随之增大;由图6(b)、(c)和(d)可知,对应的固有频率统计矩均随着变异系数的增大而随之增大.总体上说,平板结构的固有频率的统计矩随着随机参数变异系数的增大而增大.

## 4 总 结

本文提出了基于多项式混沌展开的结构固有频率的高阶统计矩计算方法,适用于任意分布的随机变量.该方法实现是根据结构单随机变量的概率密度函数选择相应的正交多项式,由各随机变量的正交多项式连乘再相加得到多维度的多项式混沌展开式.多项式混沌展开来表征不确定性参数与结构固有频率之间的映射关系,接着在替代模型基础上计算固有频率的统计矩.利用多项式混沌展开系数与单个随机变量统计特征之间的组合关系可快速地计算出结构固有频率的统计矩.本文方法不涉及复杂的积分运算,达到了高效快速计算固有频率高阶统计矩的目的.文中采用平铝板为例来验证多项式混沌展开的有效性,计算结果与MCS方法结果相对比.结果表明本文方法与MCS方法的结果非常接近,最大相对误差仅为0.0094%,表明了本文方法用于结构固有频率的高阶统计矩计算的精度高.最后本文还探讨了结构随机变量变异系数对结构动力特性统计矩的影响,结果表明结构固有频率的统计矩随着随机变量变异系数的增大而增大.

## 参考文献(References):

- [1] 万华平,任伟新,颜王吉.桥梁结构动力特性不确定性的全局灵敏度分析的解析方法[J].振动工程学报,2016,29(3):429-435.(WAN Huaping, REN Weixin, YAN Wangji. Analytical global sensitivity analysis for uncertainty in structural dynamic properties of bridges[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(3): 429-435.(in Chinese))
- [2] 万华平,任伟新,钟剑.桥梁结构固有频率不确定性量化的高斯过程模型方法[J].中国科学:技术科学,2016,46(9):919-925.(WAN Huaping, REN Weixin, ZHONG Jian. Gaussian process model-based approach for uncertainty quantification of natural frequencies of bridge[J]. *Scientia Sinica: Technologica*, 2016, 46(9): 919-925.(in Chinese))
- [3] SHINOZUKA M, ASTILL C J. Random eigenvalue problems in structural analysis[J]. *AIAA Journal*, 1972, 10(4): 456-462.
- [4] SZEKELY G S, SCHUELLER G I. Computational procedure for a fast calculation of eigenvectors and eigenvalues of structures with random properties[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(8/10): 799-816.
- [5] WAN H P, MAO Z, TODD M D, et al. Analytical uncertainty quantification for modal frequencies with structural parameter uncertainty using a Gaussian process metamodel[J]. *Engineering Structures*, 2014, 75: 577-589.
- [6] 陈塑寰,张宗芬.结构固有频率的统计特性[J].振动工程学报,1991,4(1):90-95.(CHEN Shuhuan, ZHANG Zongfen. Statistics of structural natural frequencies[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1991, 4(1): 90-95.(in Chinese))
- [7] 刘春华,秦权.桥梁结构固有频率的统计特征[J].中国公路学报,1997,10(4):50-55.(LIU

- Chunhua, QIN Quan. Statistics of natural frequencies for bridge structures[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 1997, **10**(4): 50-55.(in Chinese)
- [8] ADHIKARI S, FRISWELL M I. Random matrix eigenvalue problems in structural dynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**(3): 562-591.
- [9] QIU Z P, WANG X J, FRISWELL M I. Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **282**(1/2): 297-312.
- [10] MODARES M, MULLEN R, MUHANNA R. Natural frequencies of a structure with bounded uncertainty[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2006, **132**(12): 1363-1371.
- [11] MOENS D, VANDEPITTE D. Interval sensitivity theory and its application to frequency response envelope analysis of uncertain structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(21/24): 2486-2496.
- [12] WANG C, GAO W, SONG C M, et al. Stochastic interval analysis of natural frequency and mode shape of structures with uncertainties[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(9): 2483-2503.
- [13] GAUTSCHI W. *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2004.
- [14] WAN H P, REN W X, TODD M D. An efficient metamodeling approach for uncertainty quantification of complex systems with arbitrary parameter probability distributions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, **109**(5): 739-760.
- [15] WAN H P, REN W X. Parameter selection in finite-element-model updating by global sensitivity analysis using Gaussian process metamodel[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2015, **141**(6): 04014164.

# Computation of High-Order Moments of Structural Dynamic Characteristics Based on Polynomial Chaos Expansion

WAN Huaping, TAI Yonggan, ZHONG Jian, REN Weixin

(College of Civil Engineering, Hefei University of Technology,  
Hefei 230009, P.R.China)

(Contributed by REN Weixin, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Uncertainty of structural parameters leads to uncertainty of structural dynamic characteristics. Quantification of uncertainty of dynamic characteristics provides accurate dynamic information for structural dynamic analysis. Statistical moments (e.g., mean and variance) mainly represent the uncertainty of structural dynamic properties. The Monte-Carlo simulation (MCS) requires a large number of model evaluations to ensure the convergence of the results, which hinders its application to the large-scale, complex engineering structures. The polynomial chaos expansion (PCE) surrogate model was used to replace the computationally expensive finite element model (FEM), and then the statistical moments of structural dynamic characteristics were efficiently calculated. The presented PCE-based method only needs a small set of model runs before the model formulation and subsequently does not require the FEM for calculations of the statistical moments. Therefore, the issue of the high computational cost associated with the computations of dynamic characteristic statistical moments was solved. The method is suitable for parameters with arbitrary probability distribution and has high computational efficiency in calculating the high-order statistical moments. Finally, the effectiveness of the developed method was verified through an example of an aluminum plate.

**Key words:** uncertainty; dynamic characteristic; high-order statistical moment; polynomial chaos expansion

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51878235; 51508144); China Postdoctoral Science Foundation(2015M581981)

---

引用本文/Cite this paper:

万华平, 郇永敢, 钟剑, 任伟新. 基于多项式混沌展开的结构动力特性高阶统计矩计算[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(12): 1331-1342.

WAN Huaping, TAI Yonggan, ZHONG Jian, REN Weixin. Computation of high-order moments of structural dynamic characteristics based on polynomial chaos expansion[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(12): 1331-1342.