

一种健壮的低耗散通量分裂格式*

胡立军¹, 袁礼², 翟健³

- (1. 衡阳师范学院 数学与统计学院, 湖南 衡阳 421002;
2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190;
3. 曙光信息产业(北京)有限公司, 北京 100193)

摘要: 随着计算流体力学的快速发展,设计精确、高效并且健壮的数值格式变得尤为重要.通过对3种流行的通量分裂方法(AUSM、Zha-Bilgen和Toro-Vázquez)的对流通量和压力通量进行特征分析,构造了一种简单、低耗散并且健壮的通量分裂格式(命名为R-ZB格式).采用Zha-Bilgen分裂方法将Euler方程的通量分裂成对流通量和压力通量,其中对流通量采用迎风方法来计算,压力通量采用低耗散的HLL格式来计算,从而克服了原始的HLL格式不能精确分辨接触间断的缺点.数值实验表明,该文给出的R-ZB格式不仅保留了原始Zha-Bilgen格式简单高效、能够精确分辨接触间断等优点,而且具有更好的健壮性,在计算二维问题时不会出现数值激波不稳定现象.

关键词: Euler方程; Zha-Bilgen分裂; HLL; R-ZB; 低耗散; 数值激波不稳定性

中图分类号: O354; O241.82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.390132

引言

近几十年来,尽管流体力学数值方法的研究取得了巨大的进步,设计出了许多高精度、高效率的数值格式,但是在流体力学的数值模拟中仍然还有许多问题需要解决^[1].中心格式、通量差分裂(FDS)格式、通量向量分裂(FVS)格式和AUSM(advection upstream splitting method)类格式广泛地应用于计算流体力学中,其中,中心格式不能精确地分辨中间特征场并且强烈地依赖与问题相关的参数^[2],这极大地限制了它的应用.基于Godunov方法的通量差分裂格式需要求解两个相邻状态之间的局部Riemann(黎曼)问题.尽管Godunov和Van Leer系统地阐述了Euler方程精确Riemann解法器的构造过程,但是大多数情况下计算精确的Riemann解会很困难,并且精确Riemann解的数值黏性过小,在计算某些算例时,会产生数值震荡.因此,设计精确、健壮的近似Riemann解法器成为了流体力学数值方法研究的热点问题.著名的近似Riemann解法器包括Roe^[3]、HLL^[4](Harten, Lax and Van Leer)、HLLC^[5](Harten, Lax and Van Leer with contact)和Osher^[6]等.其中,两波近似的HLL格式非常高效和健壮,但是不能捕捉接触间断极大地限制了它的应用.Roe、HLLC和Osher格式能够精确地分辨激波和接触间断,从而广泛应用于流体力学的数值模拟中.但使用它们计算某些多维问题时,会导致非物理现象的出现,包括膨胀激波、负内能、慢行激波、carbuncle现象,双Mach(马赫)杆和奇偶失联等现象^[7].

通量向量分裂方法,例如Steger-Warming格式^[8]和Van Leer格式^[9-10],能够避免激波不稳

* 收稿日期: 2018-04-25; 修订日期: 2018-06-13

作者简介: 胡立军(1985—),男,博士(通讯作者). E-mail: hulijun@lsec.cc.ac.cn).

定现象并且在计算中非常高效,然而它们不能精确地捕捉与线性波所对应的间断,因此在计算接触面时会产生过大的耗散,这会严重地影响接触波、物质界面、剪切波、涡流以及燃烧面的分辨率^[11].Liou 和 Steffen^[12]结合通量差分裂方法和通量向量分裂方法的优点,将 Euler 方程的通量分裂成对流部分和压力部分,提出了一种能够分辨接触波的通量分裂格式,AUSM 格式.经过许多研究人员的共同努力,AUSM 格式已经发展成为更加健壮、精确并且高效的 AUSM 类格式^[13-15].类似的分裂方法还包括 Zha-Bilgen 分裂^[16-17]以及最近出现的 Toro-Vázquez 分裂^[7],关于它们的最新进展可参见文献[18-22].这 3 种分裂方法的主要差异在于能量方程中的对流项,其中 Liou-Steffen 分裂的对流项是总焓;Zha-Bilgen 分裂的对流项是总能;Toro-Vázquez 分裂的对流项是动能.尽管这些通量分裂格式能够分辨接触面,但是在计算多维问题时,还会出现不同程度的数值激波不稳定现象.

在治愈数值激波不稳定性方面,Quirk^[23]建议在强激波附近使用耗散格式(例如 HLLC 格式).Kim 等^[7]定义了一种探测强激波横向的函数,根据该探测函数来混合 HLL 格式和 HLLC 格式从而消除 HLLC 格式的激波不稳定性.Hu(胡立军)等^[24]通过混合 HLLC 格式和 FORCE 格式来消除 HLLC 格式的不稳定性.Wu 等^[25]提出了一种类似的混合格式用来治愈 Roe 格式的激波不稳定性.Ren^[26]通过使用旋转格式来消除 Roe 格式的不稳定性.在文献[27]中,胡立军等分析了 Euler 方程的数值激波在特定流动和扰动形式下的不稳定性,并且提出了一种混合方法来治愈 HLLC 格式的激波不稳定性.然而,所有这些尝试要么会引入自由参数增加格式的耗散,要么会显著地增加计算量.

本文通过对 3 种流行的通量分裂方法(AUSM、Zha-Bilgen 和 Toro-Vázquez)的对流通量和压力通量进行特征分析,构造了一种简单、精确并且健壮的通量分裂格式(命名为 R-ZB 格式).基本思路是:利用 Zha-Bilgen 分裂方法,将 Euler 方程的通量分裂成对流通量和压力通量两部分,其中,对流通量采用迎风格式来计算,压力通量采用低耗散的 HLL 格式来计算,从而克服原始的 HLL 格式不能精确分辨接触间断的缺点.数值实验表明,本文给出的 R-ZB 格式不仅保留了原始通量分裂格式简单高效的优点,而且具有更好的健壮性,在计算二维问题时不会出现数值激波不稳定现象.

本文结构如下:第 1 节介绍了控制方程组;第 2 节对 3 种流行的对流-压力分裂方法进行特征分析;第 3 节详细介绍了 R-ZB 格式的构造方法;第 4 节展示数值算例的结果和分析;最后,第 5 节是全文的结论.

1 控制方程组

考虑二维 Euler 方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

这里 ρ 为密度, u, v 分别为 x 方向和 y 方向的速度, p 为压力, E 为总能.状态方程为

$$p = (\gamma - 1) \left[E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right], \quad (3)$$

$\gamma = 1.4$ 为比热比.

用守恒型数值方法求解方程组(1):

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}), \quad (4)$$

其中 $\mathbf{F}_{i+1/2,j}, \mathbf{G}_{i,j+1/2}$ 分别为 x 方向和 y 方向的数值通量.

2 对流-压力分裂方法的特征分析

接下来,使用3种流行的对流-压力分裂方法将二维 Euler 方程组的通量分裂成对流通量和压力通量,并且对其进行特征分析来展示它们在计算中的物理特性.

2.1 Liou-Steffen 分裂

采用 Liou-Steffen 分裂^[12]方法将通量分裂成为对流通量和压力通量:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_c^L + \mathbf{F}_p^L = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}_c^L + \mathbf{G}_p^L = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ v(E+p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \end{array} \right. \quad (5)$$

其中 \mathbf{F}_c^L 和 \mathbf{G}_c^L 分别表示 x 方向和 y 方向的对流通量, \mathbf{F}_p^L 和 \mathbf{G}_p^L 分别表示 x 方向和 y 方向的压力通量.

2.1.1 对流系统

考虑对流子系统

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_c^L}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_c^L}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

将对流子系统式(6)写成拟线性形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}^L \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B}^L \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}^L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ u \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2+v^2) - H \right] & H - (\gamma-1)u^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 & 0 & 2v & 0 \\ v \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(u^2+v^2) - H \right] & -(\gamma-1)uv & H - (\gamma-1)v^2 & \gamma v \end{bmatrix}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$H = (E + p)/\rho$ 为总焓, \mathbf{A}^L 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{cx} = \lambda_2^{cx} = \lambda_3^{cx} = u, \lambda_4^{cx} = \gamma u; \quad (9)$$

\mathbf{B}^L 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{cy} = \lambda_2^{cy} = \lambda_3^{cy} = v, \lambda_4^{cy} = \gamma v. \quad (10)$$

2.1.2 压力系统

考虑压力子系统

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_p^L}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_p^L}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

将压力子系统式(11)写成拟线性形式:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{M}^L \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{N}^L \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (13)$$

\mathbf{M}^L 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{px} = -(\gamma-1)u, \lambda_2^{px} = \lambda_3^{px} = \lambda_4^{px} = 0; \quad (14)$$

\mathbf{N}^L 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{py} = -(\gamma-1)v, \lambda_2^{py} = \lambda_3^{py} = \lambda_4^{py} = 0. \quad (15)$$

从式(9)可以看出,对流量 \mathbf{F}_c^L 的特征值是 $(u, u, u, \gamma u)$, 因此对流量信息传播的方向仅仅依赖于 x 方向的速度,这与物理特性相符合.然而,压力通量有一个非零的特征值 $-(\gamma-1)u$, 在计算中会出现涡流趋势,这与物理现象相矛盾.因此,基于 Liou-Steffen 分裂的数值格式的健壮性和精度都会受到影响,尽管 AUSM 类格式在计算流体力学中已取得了较大的成功.

2.2 Zha-Bilgen 分裂

采用 Zha-Bilgen 分裂^[16]方法将通量分裂成为对流量和压力通量:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_c^Z + \mathbf{F}_p^Z = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ uE \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ \rho u \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}_c^Z + \mathbf{G}_p^Z = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ vE \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ \rho v \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (16)$$

对流通量 \mathbf{F}_c^Z 和 \mathbf{G}_c^Z 的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{A}^Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\frac{uE}{\rho} & \frac{E}{\rho} & 0 & u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 & 0 & 2v & 0 \\ -\frac{vE}{\rho} & 0 & \frac{E}{\rho} & v \end{bmatrix}. \quad (17)$$

\mathbf{A}^Z 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{cx} = \lambda_2^{cx} = \lambda_3^{cx} = \lambda_4^{cx} = u; \quad (18)$$

\mathbf{B}^Z 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{cy} = \lambda_2^{cy} = \lambda_3^{cy} = \lambda_4^{cy} = v. \quad (19)$$

压力通量 \mathbf{F}_p^Z 和 \mathbf{G}_p^Z 的 Jacobi 矩阵为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma-1)u\left(u^2+v^2-\frac{E}{\rho}\right) & (\gamma-1)\left(\frac{E}{\rho}-\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right) & -(\gamma-1)uv & (\gamma-1)u \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}^Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2) & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u\left(u^2+v^2-\frac{E}{\rho}\right) & -(\gamma-1)uv & (\gamma-1)\left(\frac{E}{\rho}-\frac{1}{2}u^2-\frac{3}{2}v^2\right) & (\gamma-1)v \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (20)$$

\mathbf{M}^Z 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{px} = -a\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \lambda_2^{px} = \lambda_3^{px} = 0, \quad \lambda_4^{px} = a\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad (21)$$

\mathbf{N}^Z 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{py} = -a\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \lambda_2^{py} = \lambda_3^{py} = 0, \quad \lambda_4^{py} = a\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (22)$$

其中 $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ 是声速.

式(18)~(22)表明,对流通量的特征值等于各自方向的速度,从而表现出良好的对流特性.此外,压力通量的特征值与声速成比例,这也反映了声速波的特征性质.因此,基于 Zha-Bilgen 分裂的数值格式在理论上表现出很好的健壮性和精度.

2.3 Toro-Vázquez 分裂

Toro 和 Vázquez-Cendón^[11]采用了如下的方式将 Euler 方程的通量分裂成对流通量和压力通量:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_c^T + \mathbf{F}_p^T = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ \frac{1}{2} \rho u(u^2 + v^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho u \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}_c^T + \mathbf{G}_p^T = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ \frac{1}{2} \rho v(u^2 + v^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho v \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (23)$$

对流通量 \mathbf{F}_c^T 和 \mathbf{G}_c^T 的 Jacobi 矩阵分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -u(u^2 + v^2) & \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 & uv & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ -v^2 & 0 & 2v & 0 \\ -v(u^2 + v^2) & uv & \frac{3}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 & 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (24)$$

\mathbf{A}^T 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{cx} = 0, \lambda_2^{cx} = \lambda_3^{cx} = \lambda_4^{cx} = u; \quad (25)$$

\mathbf{B}^T 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{cy} = 0, \lambda_2^{cy} = \lambda_3^{cy} = \lambda_4^{cy} = v. \quad (26)$$

压力通量 \mathbf{F}_p^T 和 \mathbf{G}_p^T 的 Jacobi 矩阵分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) & -(\gamma - 1)u & -(\gamma - 1)v & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma u(u^2 + v^2) - \frac{\gamma u E}{\rho} & \frac{\gamma E}{\rho} - \gamma \left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 \right) & -\gamma uv & \gamma u \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) & -(\gamma - 1)u & -(\gamma - 1)v & \gamma - 1 \\ \gamma v(u^2 + v^2) - \frac{\gamma v E}{\rho} & -\gamma uv & \frac{\gamma E}{\rho} - \gamma \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 \right) & \gamma v \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (27)$$

\mathbf{M}^T 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{px} = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4a^2}}{2}, \lambda_2^{px} = \lambda_3^{px} = 0, \lambda_4^{px} = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4a^2}}{2}; \quad (28)$$

N^T 的 4 个特征值分别为

$$\lambda_1^{py} = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4a^2}}{2}, \lambda_2^{py} = \lambda_3^{py} = 0, \lambda_4^{py} = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4a^2}}{2}. \quad (29)$$

式(25)~(29)表明,对流通量有一个特征值等于 0,这会影晌数值格式的对流特性.此外,压力通量的特征值是声速和对流速度的非线性组合,在实际计算中会导致一些非物理现象的出现.因此,基于 Toro-Vázquez 分裂的数值格式的精度和健壮性也会受到影响.

3 二维 Euler 方程的 R-ZB 格式

从 2.2 小节的特征分析可以看出,基于 Zha-Bilgen 分裂方法构造一种精确并且健壮数值格式在理论上是可行的.在这一节中,首先介绍 Zha 和 Bilgen 基于 Zha-Bilgen 分裂方法构造的 Zha-Bilgen 格式^[16],然后提出一种健壮的 R-ZB 通量分裂格式来提高 Zha-Bilgen 格式的精度和健壮性.

3.1 Zha-Bilgen 格式

以 x 方向为例,将二维 Euler 方程的通量分裂成对流通量和压力通量两部分:

$$F(U) = C + P = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ uE \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ pu \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ pu \end{bmatrix} = uQ + P. \quad (30)$$

经过分裂之后,数值通量可以写成对流通量和压力通量之和:

$$F_{i+1/2,j} = C_{i+1/2,j} + P_{i+1/2,j}. \quad (31)$$

3.1.1 对流通量的计算

对流通量采用简单的迎风格式来计算:

$$C_{i+1/2,j} = C_L^+ + C_R^-, \quad (32)$$

其中

$$C_L^+ = \max(0, u_L) Q_L, \quad C_R^- = \min(0, u_R) Q_R. \quad (33)$$

3.1.2 压力通量的计算

压力通量的两个分量可采用不同的方法来计算,分量 p 采用类似于 AUSM 格式的方法来计算:

$$p_{i+1/2,j} = p_L^+ + p_R^-, \quad (34)$$

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} p (1 \pm Ma), & |Ma| \leq 1, \\ \frac{1}{2} p \frac{(Ma \pm |Ma|)}{Ma}, & |Ma| > 1, \end{cases} \quad (35)$$

其中 $Ma = u/a$ 为 Mach 数.

分量 pu 采用如下公式来计算:

$$(pu)_{i+1/2,j} = (pu)_L^+ + (pu)_R^-, \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (pu)_L^+ = p_L \begin{cases} 0, & Ma_L \leq -1, \\ \frac{1}{2}(u_L + a_L), & -1 < Ma_L < 1, \\ u_L, & Ma_L \geq 1, \end{cases} \\ (pu)_R^- = p_R \begin{cases} u_R, & Ma_R \leq -1, \\ \frac{1}{2}(u_R - a_R), & -1 < Ma_R < 1, \\ 0, & Ma_R \geq 1, \end{cases} \end{array} \right. \quad (37)$$

其中 Ma_L 和 Ma_R 分别代表界面左边和右边的 Mach 数。

3.2 R-ZB 格式

原始的 Zha-Bilgen 格式形式简单,计算效率高,但是在计算某些多维问题时,会产生激波不稳定现象。接下来,构造一种健壮的 R-ZB 格式,不仅保留原始 Zha-Bilgen 格式简单高效、能够分辨接触间断等优点,而且具有更好的健壮性,在计算中不会出现激波不稳定现象。

首先,利用 Zha-Bilgen 分裂将通量分裂成对流通量和压力通量,具体见式(30)。接下来将介绍 R-ZB 格式对流通量和压力通量的计算公式。

3.2.1 R-ZB 格式对流通量的计算

利用 Mach 数 $Ma = u/a$ 将式(30)中的对流通量改写为

$$C = Ma \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} a. \quad (38)$$

采用下面的迎风方法来计算对流通量的数值通量:

$$C_{i+1/2,j} = Ma_{1/2} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}_k a_{1/2}. \quad (39)$$

迎风方向 k 根据 x 方向的界面平均速度 $\bar{u} = (u_L + u_R)/2$ 来选取:

$$k = \begin{cases} \text{L}, & \bar{u} \geq 0, \\ \text{R}, & \bar{u} < 0. \end{cases} \quad (40)$$

界面 Mach 数 $Ma_{1/2}$ 和界面声速 $a_{1/2}$ 的计算公式为

$$\left\{ \begin{array}{l} Ma_{1/2} = \begin{cases} \frac{\bar{u}}{\bar{u} - S_L}, & \bar{u} \geq 0, \\ \frac{\bar{u}}{\bar{u} - S_R}, & \bar{u} < 0, \end{cases} \\ a_{1/2} = \begin{cases} u_L - S_L, & \bar{u} \geq 0, \\ u_R - S_R, & \bar{u} < 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (41)$$

波速 S_L 和 S_R 按照以下方式来选取:

$$S_L = \min(0, u_L - a_L, \tilde{u} - \tilde{a}), \quad S_R = \max(0, u_R + a_R, \tilde{u} + \tilde{a}), \quad (42)$$

其中, \tilde{u}, \tilde{a} 为状态 (U_L, U_R) 之间的 Roe 平均量.

3.2.2 R-ZB 格式压力通量的计算

压力通量采用 Harten 等提出的 HLL 格式^[4]来计算:

$$P_{i+1/2,j} = \frac{S_R}{S_R - S_L} P_L - \frac{S_L}{S_R - S_L} P_R + \frac{S_R S_L}{S_R - S_L} (U_R - U_L). \quad (43)$$

上式可以改写成

$$P_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(P_L + P_R) + \delta U, \quad (44)$$

其中 δU 为数值耗散项, 将其写成分量形式

$$\delta U = \frac{S_R + S_L}{2(S_R - S_L)} (P_L - P_R) - \frac{S_R S_L}{S_R - S_L} \begin{bmatrix} \rho_L - \rho_R \\ (\rho u)_L - (\rho u)_R \\ (\rho v)_L - (\rho v)_R \\ E_L - E_R \end{bmatrix}. \quad (45)$$

跨越接触间断时, 密度会改变而压力不会改变. 因此, 为了避免接触间断的数值耗散, 采用文献[28]中的方法, 将式(45)右端最后一项的密度差用压力差来代替. 根据等熵条件 $a^2 = \delta p / \delta \rho$, 式(45)可以改写成

$$\delta U = \frac{S_R + S_L}{2(S_R - S_L)} (P_L - P_R) - \frac{S_R S_L}{\bar{a}^2(S_R - S_L)} \begin{bmatrix} P_L - P_R \\ (pu)_L - (pu)_R \\ (pv)_L - (pv)_R \\ \frac{\bar{a}^2(p_L - p_R)}{2} + \frac{(pq)_L - (pq)_R}{2} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

其中

$$q = u^2 + v^2, \quad \bar{a} = (a_L + a_R)/2.$$

4 数值实验

这一节将计算一些典型的一维和二维算例来比较传统的 Zha-Bilgen 格式和健壮的 R-ZB 格式在数值计算中的表现. 计算中采用二阶 Runge-Kutta 格式^[29]进行时间离散来获得二阶时间精度, 空间重构采用基于特征变量的二阶 MUSCL 重构^[30].

表 1 R-ZB 格式的精度测试

Table 1 The accuracy test of the R-ZB scheme

mesh size	L-1 error	L-1 order	L-∞ error	L-∞ order
16×16	7.14E-2	-	1.35E-1	-
32×32	2.14E-2	1.74	4.43E-2	1.61
64×64	5.78E-3	1.89	1.25E-2	1.83
128×128	1.43E-3	2.02	3.32E-3	1.91
256×256	3.51E-4	2.03	8.41E-4	1.98
512×512	8.49E-5	2.05	2.06E-4	2.03

4.1 精度分析

使用文献[31]中的数值算例对 R-ZB 格式进行精度测试. 计算区域为 $[0, 2] \times [0, 2]$, 初始条件为

$$\rho_0 = 1 + 0.2\sin[\pi(x + y)], u_0 = 1.0, v_0 = -0.5, p_0 = 1. \quad (47)$$

使用周期性边界条件,计算 CFL 数为 0.9,计算时间 $T = 4$.该问题的精确解为

$$\rho(x, y) = 1 + 0.2\sin[\pi(x + y - 0.5t)]. \quad (48)$$

从表 1 可以看出,R-ZB 格式不仅能够达到空间的二阶精度,而且误差下降的速度会随着网格的加密而越来越快,表现出了良好的网格收敛性.

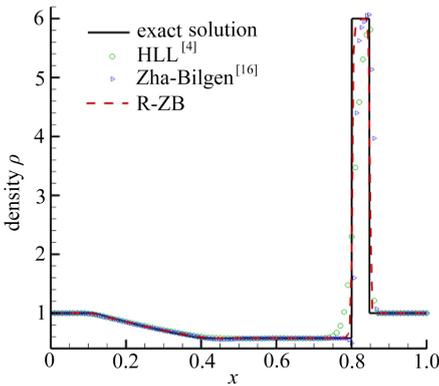
4.2 一维 Riemann 问题

计算两个一维 Riemann 问题来进行格式的比较.计算区间为 $[0, 1]$,计算中使用的网格数为 100,CFL 数为 0.9.具体的左右状态,初始间断的位置和计算时间如表 2 所示.后文中将展示精确解和 3 种数值格式(HLL 格式^[4]、Zha-Bilgen 格式^[16]以及本文构造的 R-ZB 格式)的计算结果.

表 2 一维 Riemann 问题的初始值

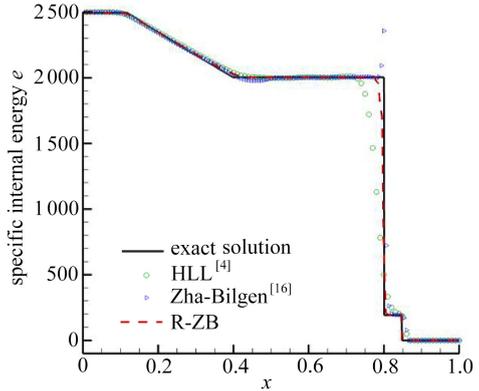
Table 2 Initial data for 1D Riemann problems

	$(\rho, u, p)_L$	$(\rho, u, p)_R$	x_0	T_0
RP1	(1.0, -19.597 45, 1 000.0)	(1.0, -19.597 45, 0.01)	0.8	0.012
RP2	(1.0, 2.0, 0.1)	(1.0, -2.0, 0.1)	0.5	0.8



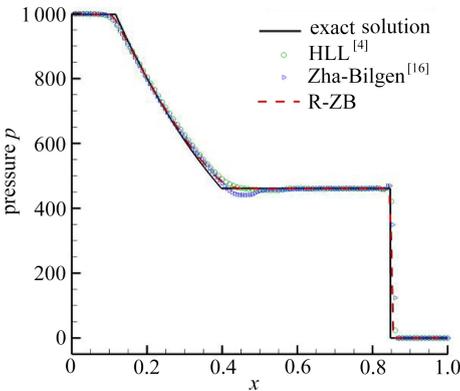
(a) 密度 ρ 的分布图

(a) The profile of density



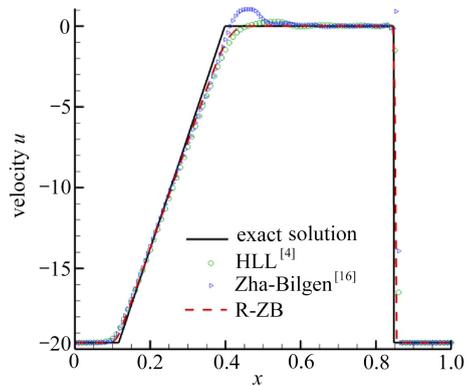
(b) 内能 e 的分布图

(b) The profile of specific internal energy



(c) 压力 p 的分布图

(c) The profile of pressure



(d) 速度 u 的分布图

(d) The profile of velocity

图 1 一维 Riemann 问题算例 1 的计算结果

Fig. 1 The solutions of case 1 of 1D Riemann problems

算例 1 由一个右行激波,一个静止的接触间断和一个左行的膨胀波所构成.从图 1 可以看到,HLL 格式不能捕捉接触间断,Zha-Bilgen 格式在膨胀波的尾部和激波的顶部有过冲;R-ZB 格式不仅可以捕捉接触间断,而且在激波和膨胀波附近不会出现过冲.

算例 2 由两个分别向两侧运动的激波和一个中间静止的接触间断所构成.从图 2 可以看到,使用 HLL 格式和 Zha-Bilgen 格式进行计算时,密度和内能在接触间断附近会出现波动.在激波附近 Zha-Bilgen 格式的计算结果会出现小的波动,尤其在密度的计算结果中波动表现得更为明显;而 R-ZB 格式在计算接触间断和激波时都表现得非常好.

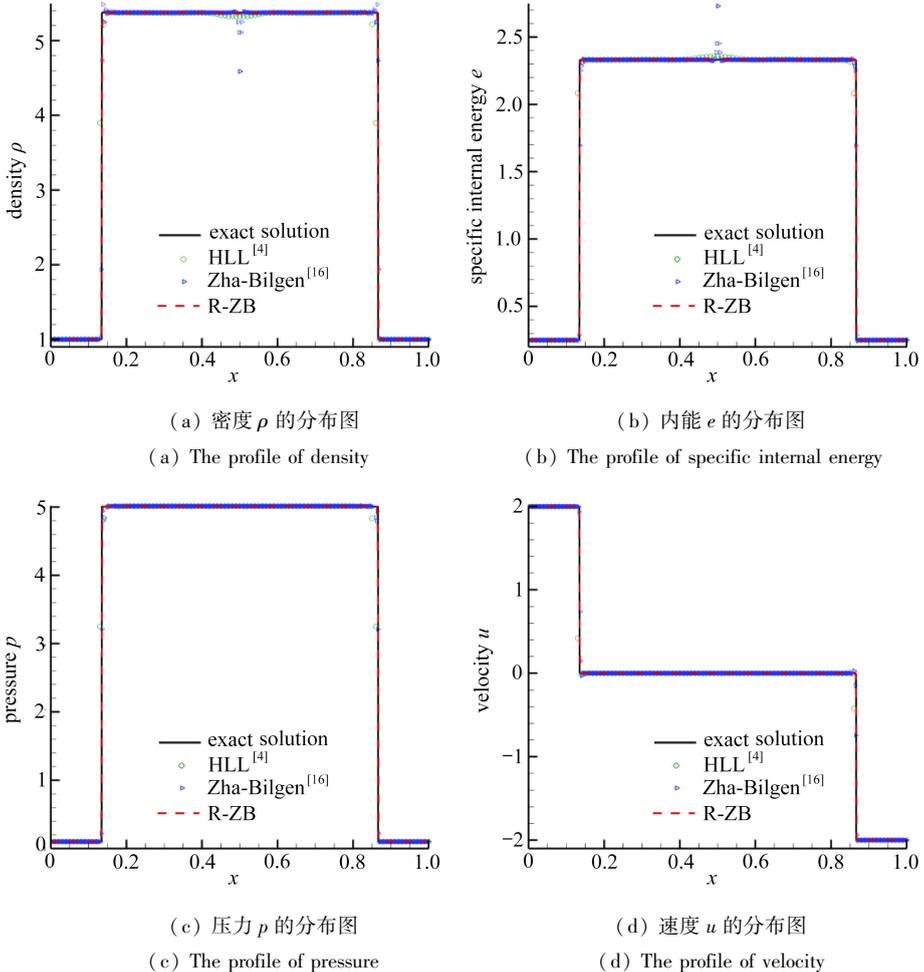


图 2 一维 Riemann 问题算例 2 的计算结果

Fig. 2 The solutions of case 2 of 1D Riemann problems

4.3 一维爆轰波问题

计算 Woodward 和 Colella^[32]提出的一维爆轰波问题,计算区域为 $[0, 1]$,初始条件为

$$\begin{cases} \rho_L = 1.0, u_L = 0.0, p_L = 1\,000.0, & 0 \leq x \leq 0.1, \\ \rho_M = 1.0, u_M = 0.0, p_M = 0.01, & 0.1 < x \leq 0.9, \\ \rho_R = 1.0, u_R = 0.0, p_R = 100.0, & 0.9 < x \leq 1.0. \end{cases} \quad (49)$$

计算中使用的网格数为 1 000,CFL 数为 0.9,计算时间为 0.038,左右边界均使用反射边界条件,使用网格数为 3 000 的 HLLC 格式的计算结果作为参考解.在该算例中,两个强爆轰波相

互碰撞,产生一个新的接触间断.从图 3 可以看出,相比于 HLL 格式和 Zha-Bilgen 格式,R-ZB 格式的计算结果会更接近参考解,尤其是在接触间断附近.

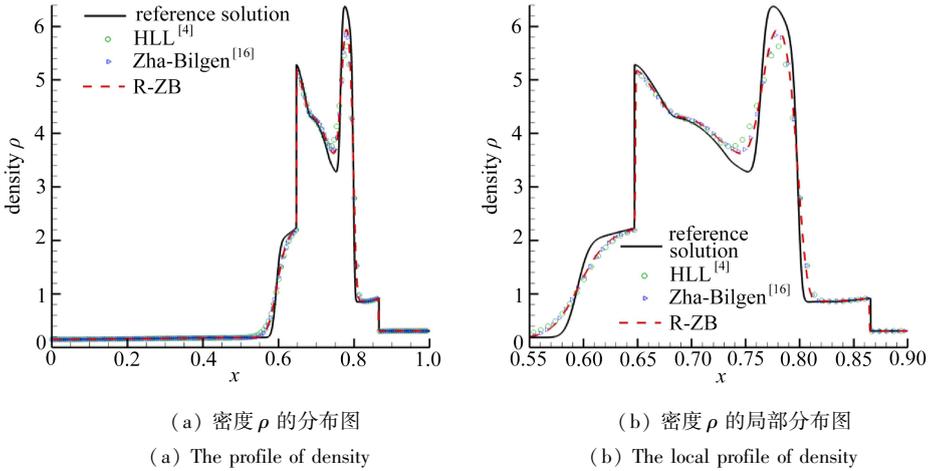


图 3 一维爆轰波问题的计算结果

Fig. 3 The solutions of 1D blast wave problems

4.4 随机扰动问题

对于 Mach 数为 10 的平面激波从左向右移动,在初始物理量上增加 10^{-10} 倍随机扰动:

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 0, 0, 1) + 10^{-10}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad (50)$$

其中 $\alpha_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 是 $(0, 1)$ 之间的随机数.计算区域为 $[0, 35] \times [0, 1]$, 计算中使用的网格数为 700×20 , 计算时间 $T = 3$.从图 4 可以看出,Zha-Bilgen 格式的计算结果不仅在激波后出现了明显的不稳定现象,且激波的位置也不正确.当将随机扰动的量减小到 10^{-16} 倍时,Zha-Bilgen 格式的不稳定现象依然会出现.R-ZB 格式的计算结果不仅得到了正确的激波位置,而且不会出现不稳定现象,甚至当把激波 Mach 数增加到 30 时,R-ZB 格式也不会出现不稳定现象.

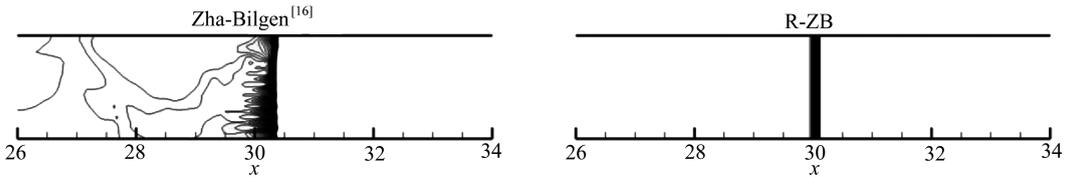


图 4 随机扰动问题的计算结果

Fig. 4 The solutions to random perturbation problems

4.5 前台阶问题

计算区域为 $[0, 3] \times [0, 1]$, 计算中使用的网格数为 240×80 , 在 $x = 0.6$ 处有一个高为 0.2 的台阶,其角点坐标为 $(x, y) = (0.6, 0.2)$.初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 3.0, 0.0, 1.0), \quad (51)$$

边界采用反射边界条件,计算时间 $T = 4$.从图 5 可以看出,Zha-Bilgen 格式的计算结果在上壁面的 Mach 杆后面会出现激波不稳定现象,而 R-ZB 格式则消除了激波不稳定现象.

4.6 超声速绕柱流问题

Mach 数为 20 的流体流经一根圆柱体,初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = (1.4, 20.0, 0.0, 1.0), \quad (52)$$

左边界采用入口边界条件,右边界采用滑移边界条件,上下边界采用出口边界条件,具体的边界条件的设定可以参考文献[33].计算中使用的网格数为 20×160 ,计算时间 $T = 4$.从图 6 可以看出,Zha-Bilgen 格式在区域的中间部位出现了轻微的不稳定现象,而 R-ZB 格式不仅消除了不稳定现象,而且对于激波的分辨率更高.

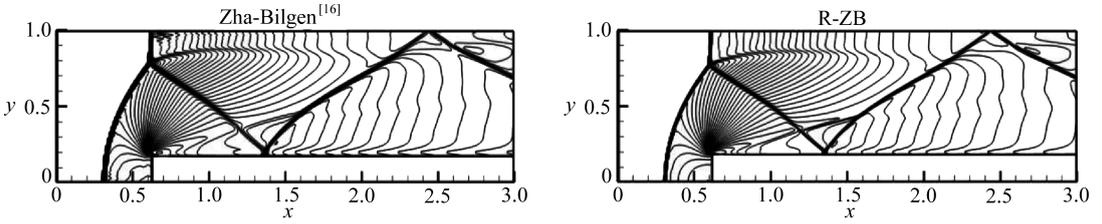


图 5 前台阶问题的计算结果

Fig. 5 The solutions of forward facing step problem

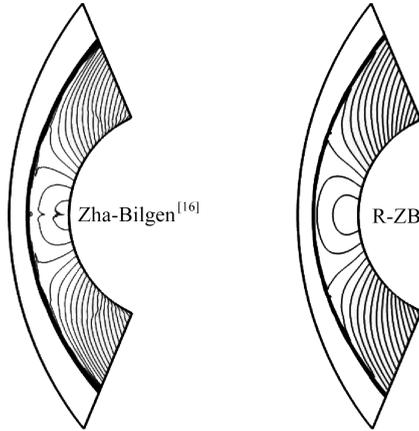


图 6 超声速绕柱流问题的计算结果

Fig. 6 The solutions of hypersonic flow over a cylinder

4.7 二维 Riemann 问题

计算二维 Riemann 问题^[34]来比较不同格式在二维算例中对于接触间断的捕捉能力以及不同格式的精度和效率.计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$,计算中使用的网格数为 400×400 ,使用网格数为 800×800 的 HLLC 格式的计算结果作为参考解.初始条件为

$$\begin{cases} (\rho, u, v, p) = (0.5313, 0, 0, 0.4), & x > 0.5, y > 0.5, \\ (\rho, u, v, p) = (1, 0.7276, 0, 1), & x \leq 0.5, y > 0.5, \\ (\rho, u, v, p) = (0.8, 0, 0, 1), & x \leq 0.5, y \leq 0.5, \\ (\rho, u, v, p) = (1, 0, 0.7276, 1), & x > 0.5, y \leq 0.5. \end{cases} \quad (53)$$

计算 CFL 数为 0.8,计算时间 $T = 0.25$.从图 7 可以看出,3 种数值格式(HLL、Zha-Bilgen 和 R-ZB)对于激波有相似的分辨率.但是 HLL 格式在接触间断位置有很大的耗散,Zha-Bilgen 格式和 R-ZB 格式可以精确地分辨接触间断.表 3 展示了不同格式的计算结果与参考解之间的误差以及计算时间.从表 3 可以看出,R-ZB 格式的误差仅仅为 HLL 格式误差的 11.13%,并且比 Zha-Bilgen 格式的误差少了 7.9%.从计算时间上来看,R-ZB 格式相比于 HLL 格式和 Zha-Bilgen 格式分别多了 1.23%和 2.17%.因此,R-ZB 格式以非常小的时间代价来获得更好的精度和健壮性.

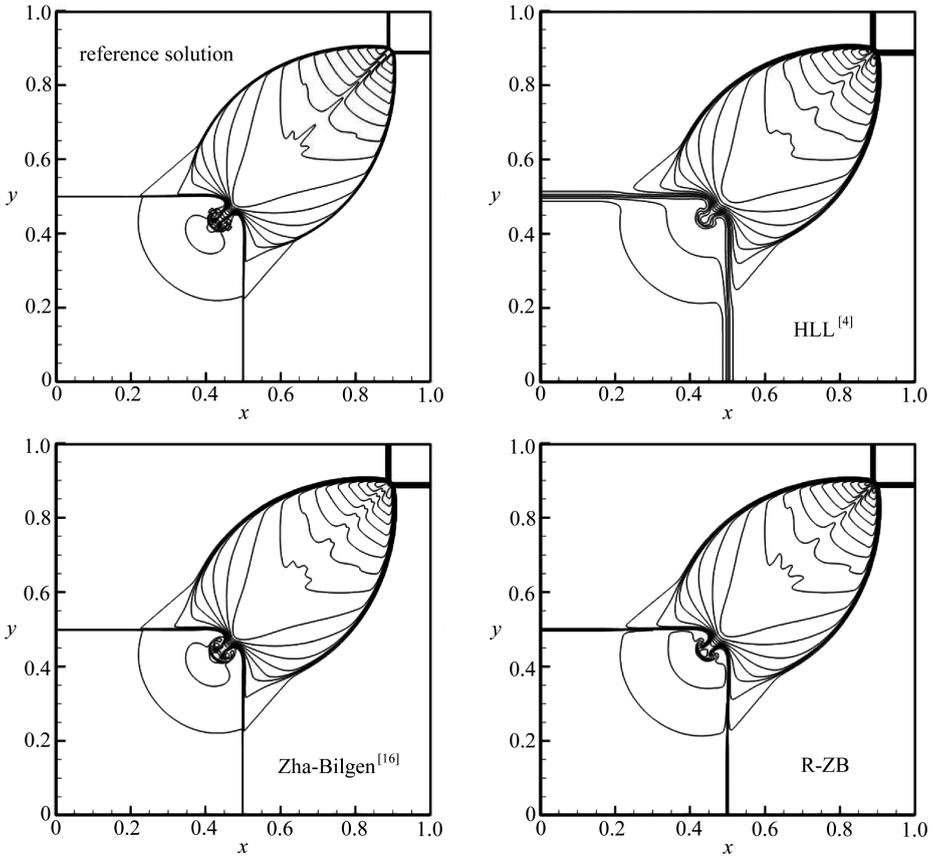


图7 二维 Riemann 问题的计算结果

Fig. 7 The solutions to 2D Riemann problems

表3 不同数值格式的误差和 CPU 计算时间的比较

Table 3 Comparison of errors and CPU times between different schemes

scheme	L^2 error	CPU time T/s
HLL ^[4]	4.583 7E-4	325
Zha-Bilgen ^[16]	5.541 2E-5	322
R-ZB	5.103 3E-5	329

5 结 论

本文对3种流行的通量分裂方法(AUSM、Zha-Bilgen和Toro-Vázquez)的对流通量和压力通量进行特征分析,进而构造一种简单、精确并且健壮的通量分裂格式(R-ZB格式)。其基本思路是:用Zha-Bilgen分裂方法将通量分裂成为对流部分和压力部分,其中对流通量的计算采用简单的迎风方法,压力通量采用低耗散的HLL格式来计算,即将传统的HLL格式的耗散项中的密度差用压力差来代替。数值实验表明:相比于原始的Zha-Bilgen格式,本文构造的R-ZB格式不仅保留了原始格式简单高效、能够精确分辨接触间断等优点,而且具有更好精度和健壮性,在计算二维问题时不会出现数值激波不稳定现象。从计算时间来看R-ZB格式与HLL格式和原始的TV格式相差不会超过2.2%。因此,综合来看,R-ZB格式是一种高效、精确且健壮的数值格式。

参考文献(References):

- [1] LIOU M S. Open issues in numerical fluxes: proposed resolutions[C]//*20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Fluid Dynamics and Co-located Conferences*, 2011. DOI: 10.2514/6.2011-3055.
- [2] QU F, YAN C, YU J, et al. A new flux splitting scheme for the Euler equations[J]. *Computers & Fluids*, 2014, **102**: 203-214.
- [3] ROE P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**(2): 357-372.
- [4] HARTEN A, LAX P D, VAN LEER B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Review*, 1983, **25**(1): 35-61.
- [5] TORO E F, SPRUCE M, SPEARES W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. *Shock Waves*, 1994, **4**(1): 25-34.
- [6] TORO E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 1999.
- [7] KIM S D, LEE B J, LEE H J, et al. Robust HLLC Riemann solver with weighted average flux scheme for strong shock[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(20): 7634-7642.
- [8] STEGER J L, WARMING R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **40**(2): 263-293.
- [9] VAN LEER B. Flux vector splitting for the Euler equations[C]//*8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1982: 507-512.
- [10] ANDERSON W K, THOMAS J L, VAN LEER B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations[J]. *AIAA Journal*, 1986, **24**(9): 1453-1460.
- [11] TORO E F, VÁZQUEZ-CENDÓN M E. Flux splitting schemes for the Euler equations[J]. *Computers & Fluids*, 2012, **70**: 1-12.
- [12] LIOU M S, STEFFEN JR C J. A new flux splitting scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **107**(1): 23-39.
- [13] LIOU M S. A sequel to AUSM; AUSM⁺[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **129**(2): 364-382.
- [14] LIOU M S. Recent progress and applications of AUSM⁺[C]//*16th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Berlin, Germany, 1998.
- [15] LIOU M S. A sequel to AUSM, part II: AUSM⁺-up for all speeds[J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, **214**(1): 137-170.
- [16] ZHA G C, BILGEN E. Numerical solution of Euler equations by using a new flux vector splitting scheme[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1993, **17**(2): 115-144.
- [17] ZHA G C, SHEN Y, WANG B. An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme[J]. *Computers & Fluids*, 2011, **48**(1): 214-220.
- [18] KAPEN P T, TCHUEN G. An extension of the TV-HLL scheme for multi-dimensional compressible flows[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2015, **29**(3/5): 303-312.
- [19] TORO E F, CASTRO C E, LEE B J. A novel numerical flux for the 3D Euler equations with

- general equation of state[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, **303**: 80-94.
- [20] XIE W, LI H, TIAN Z, et al. A low diffusion flux splitting method for inviscid compressible flows[J]. *Computers & Fluids*, 2015, **112**: 83-93.
- [21] SHIMA E, KITAMURA K. Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds[J]. *AIAA Journal*, 2011, **49**(8): 1693-1709.
- [22] MANDAL J C, PANWAR V. Robust HLL-type Riemann solver capable of resolving contact discontinuity[J]. *Computers & Fluids*, 2012, **63**: 148-164.
- [23] QUIRK J J. A contribution to the great Riemann solver debate[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1994, **18**(6): 555-574.
- [24] HU L J, YUAN L. A robust hybrid HLLC-FORCE scheme for curing numerical shock instability [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, **577**: 749-753.
- [25] WU H, SHEN L J, SHEN Z J. A hybrid numerical method to cure numerical shock instability [J]. *Communications in Computational Physics*, 2010, **8**: 1264-1271.
- [26] REN Y X. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers[J]. *Computers & Fluids*, 2003, **32**(10): 1379-1403.
- [27] 胡立军, 袁礼. 一种治愈强激波数值不稳定性的混合方法[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(5): 482-493.(HU Lijun, YUAN Li. Analysis of numerical shock instability and a hybrid curing method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 482-493.(in Chinese))
- [28] SUN M, TAKAYAMA K. An artificially upstream flux vector splitting scheme for the Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **189**(1): 305-329.
- [29] GOTTLIEB S. On high order strong stability preserving Runge-Kutta and multi step time discretizations[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2005, **25**(1/2): 105-128.
- [30] LI B, YUAN L. Convergence issues in using high-resolution schemes and lower-upper symmetric Gauss-Seidel method for steady shock-induced combustion problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, 2013, **71**(11): 1422-1437.
- [31] JIANG G S, SHU W C. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **126**(1): 202-228.
- [32] WOODWARD P, COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, **54**(1): 115-173.
- [33] KITAMURA K, ROE P L, ISMAIL F. Evaluation of Euler fluxes for hypersonic flow computations[J]. *AIAA Journal*, 2009, **47**(1): 44-53.
- [34] LAX P D, LIU X D. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, **19**(2): 319-340.

A Robust and Low-Dissipation Flux Splitting Scheme

HU Lijun¹, YUAN Li², ZHAI Jian³

(1. *College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang, Hunan 421002, P.R.China;*

2. *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, P.R.China;*

3. *Dawning Information Industry Co., Ltd., Beijing 100193, P.R.China)*

Abstract: With the rapid development of computational fluid dynamics, it is particularly important to design accurate, efficient and robust numerical schemes. Through the characteristics analyses of 3 popular flux splitting methods (AUSM, Zha-Bilgen and Toro-Vázquez), a simple, low-dissipation and robust flux splitting scheme (named as R-ZB) was constructed. The flux of Euler equations was split into a convection flux and a pressure flux with the Zha-Bilgen splitting procedure. The convection flux was computed with a simple upwinding scheme, and the pressure flux was evaluated with a low-dissipation HLL scheme to overcome the flaw of failing to capture contact discontinuities. Numerical experiments show that, the proposed R-ZB scheme not only retains the merits of the original Zha-Bilgen scheme, such as simpleness, efficiency and capturing contact discontinuities accurately, etc., but also has better robustness, which eliminates the numerical shock instabilities in the calculation of 2D problems.

Key words: Euler equations; Zha-Bilgen splitting; HLL; R-ZB; low dissipation; numerical shock instability

引用本文/Cite this paper:

胡立军, 袁礼, 翟健. 一种健壮的低耗散通量分裂格式[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(2): 150-166.

HU Lijun, YUAN Li, ZHAI Jian. A robust and low-dissipation flux splitting scheme[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 150-166.