

插值型无单元 Galerkin 比例边界法 与有限元法的耦合在压电材料 断裂分析中的应用*

陈莘莘, 王 娟

(华东交通大学 土木建筑学院, 南昌 330013)

摘要: 插值型无单元 Galerkin 比例边界法是一种只需在边界上采用插值型无单元 Galerkin 法离散且无需基本解的半解析方法,能有效求解压电材料的断裂问题.为进一步提高这种方法的适用性,该文提出了一种用于压电材料断裂分析的插值型无单元 Galerkin 比例边界法耦合有限元法(finite element method, FEM)的分析方法.裂纹周边一定范围的计算域采用插值型无单元 Galerkin 比例边界法离散,其余区域采用 FEM 离散.插值型无单元 Galerkin 比例边界法方程和 FEM 方程的耦合可利用界面两侧广义位移的连续条件方便地实现.最后,给出了两个数值算例验证了该文所提方法的有效性.

关键词: 压电材料; 断裂力学; 插值型无单元 Galerkin 比例边界法; 强度因子

中图分类号: O39; TB12 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.390129

引 言

作为一种新型的智能材料,压电材料可以实现机械能与电能之间的相互转换.正是由于这种机电耦合特性,压电材料已被广泛应用于电子、机械等领域.但压电材料本身呈脆性,在制备和服役的过程中常常会导致内部裂纹的出现.众所周知,压电材料除施加荷载会导致裂纹扩展之外,还应考虑电场以及电、力场的耦合影响.因此,解析法显然已不再适用压电材料的断裂问题,开展相关的数值方法研究^[1-2]非常必要.

插值型无单元 Galerkin 比例边界法(interpolating element-free Galerkin scaled boundary method, IIEFG-SBM)^[3-5]是一种综合了无网格法^[6-8]与比例边界有限元法^[9-10]优点的新方法.该方法采用插值型无单元 Galerkin 法对计算域的边界进行离散,不仅降低了前处理工作量,而且无需基本解.改进的插值型移动最小二乘法(improved interpolating moving least squares, IIMLS)法^[11-12]构造的环向形函数满足 Kronecker delta 函数性质,从而可以直接准确地施加本质边界条件.此外, IIMLS 法不仅克服了插值型移动最小二乘法^[13]因权函数奇异导致的计算困难,而且计算形函数时待定系数比传统的移动最小二乘法少一个.

然而, IIEFG-SBM 要求所有边界均从相似中心可见,否则需将求解域划分成多个子域.为了

* 收稿日期: 2018-04-23; 修订日期: 2018-05-21

基金项目: 国家自然科学基金(11462006; 21466012)

作者简介: 陈莘莘(1975—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: chenshenshen@tsinghua.org.cn).

充分发挥 IIEFG-SBM 能有效处理压电材料断裂问题的优势,并提高其通用性和解决问题的广泛性,借鉴文献[14-15]的思路,提出了压电材料断裂问题的 IIEFG-SBM 与 FEM 的耦合方法.其思想是在含裂纹和不含裂纹的两个区域分别采用 IIEFG-SBM 与 FEM 建立离散方程,再通过界面两侧广义位移的连续条件将其耦合,这种思想类似于 FEM 中常用的子结构法^[16].最后,通过数值算例的计算和对比分析验证了本文所提的 IIEFG-SBM 和 FEM 耦合方法进行压电材料断裂分析的有效性与合理性.

1 压电材料断裂问题的控制方程

当 y 轴是极化方向时,横观各向同性压电材料的广义平面应变本构方程可以表示为^[2]

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (1)$$

式中, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ 为广义应力, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为广义应变, \mathbf{H} 为材料常数矩阵,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, D_x, D_y)^T, \quad (2)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, -E_x, -E_y)^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & c_{44} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} & -h_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & -h_{33} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 是应力分量; D_x, D_y 是电位移分量; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 和 γ_{xy} 是应变分量; E_x, E_y 是电场强度分量; c_{11}, c_{13}, c_{33} 和 c_{44} 是弹性常数; e_{31}, e_{33} 和 e_{15} 是压电常数; h_{11} 和 h_{33} 是介电常数.广义应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 与广义位移 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 之间的关系可表示为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{L}(u_x, u_y, \phi)^T, \quad (5)$$

式中, u_x, u_y 是位移分量, ϕ 是电势,梯度算子 \mathbf{L} 可表示为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix}^T. \quad (6)$$

2 IIEFG-SBM

2.1 IIMLS 法

设在某一光滑边界段 S_i 上有 N 个节点 s_1, s_2, \dots, s_N , 这里 s 代表 S_i 上从起点开始的弧长.令 $p_1(s), p_2(s), \dots, p_m(s)$ 表示给定用来构造逼近函数的一组基函数,其中 $p_1(s) \equiv 1$.为了使权函数非奇异,并且逼近函数满足插值性质,对给定的基函数和函数 $u(s)$ 作相同的变换.令

$$\hat{p}_i(\bar{s})_s = p_i(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) p_i(s_l), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

$$\hat{u}(\bar{s})_s = u(\bar{s}) - \sum_{l=1}^n v(s, s_l) u(s_l), \quad (8)$$

式中, \bar{s} 表示点 s 局部影响域内的点, n 为点 s 局部影响域内的节点数, s_l 为边界上影响域覆盖 s 的节点,并且

$$v(s, s_I) = \prod_{J \neq I} \frac{s - s_J}{s_I - s_J}. \tag{9}$$

基于新的基函数,由移动最小二乘法可获得局部函数 $\hat{u}(\bar{s})_s$ 的逼近函数 $\hat{u}^h(\bar{s})_s$ 如下^[11-12]:

$$\hat{u}^h(\bar{s})_s = \hat{\mathbf{p}}^T(s)_s \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{H}(s) \mathbf{u}, \tag{10}$$

式中

$$\hat{\mathbf{p}}^T(\bar{s})_s = (\hat{p}_2(\bar{s})_s, \hat{p}_3(\bar{s})_s, \dots, \hat{p}_m(\bar{s})_s), \tag{11}$$

$$\mathbf{u} = (u(s_1), u(s_2), \dots, u(s_n))^T, \tag{12}$$

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{I=1}^n w_I(s) \hat{\mathbf{p}}(s_I)_s \hat{\mathbf{p}}^T(s_I)_s, \tag{13}$$

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{I=1}^n w_I(s) \hat{\mathbf{p}}(s_I)_s (\mathbf{e}_I - \mathbf{v}(s)), \tag{14}$$

其中, \mathbf{e}_I 为 n 维单位行向量,其第 I 列元素为 1, $w_I(s)$ 是节点 s_I 对应的权函数,且

$$\hat{\mathbf{p}}^T(s_I)_s = (\hat{p}_2(s_I)_s, \hat{p}_3(s_I)_s, \dots, \hat{p}_m(s_I)_s), \tag{15}$$

$$\mathbf{v}(s) = (v(s, s_1), v(s, s_2), \dots, v(s, s_n)). \tag{16}$$

本文采用四次样条权函数,即

$$w_I(\bar{r}) = 1 - 6\bar{r}^2 + 8\bar{r}^3 - 3\bar{r}^4, \quad \bar{r} \leq 1, \tag{17}$$

式中, $\bar{r} = |s - s_I|/r_I$, r_I 为权函数支撑域半径.各节点的支撑域半径取为 $r_I = \alpha \cdot \Delta s$, 其中 Δs 为相邻节点之间的距离,系数 α 取为 2.5.根据式(8)和(10),可将函数 $u(s)$ 的逼近函数写为

$$u^h(s) = \Phi(s) \mathbf{u} = \sum_{I=1}^n \phi_I(s) u(s_I), \tag{18}$$

其中,形函数矩阵为

$$\Phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s)) = \mathbf{v}(s) + \mathbf{g}^T(s) \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{H}(s), \tag{19}$$

$$\mathbf{g}^T(s) = (g_2(s), g_3(s), \dots, g_m(s)), \tag{20}$$

$$g_i(s) = p_i(s) - \sum_{I=1}^n v(s, s_I) p_i(s_I). \tag{21}$$

2.2 控制方程的导出与求解

引入包含径向坐标 ξ 和环向坐标 s 的比例边界坐标系,如图 1 所示.选取一点 $O(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ 作为相似中心,并要求所有边界均从相似中心可见.径向坐标 ξ 从相似中心指向外边界,在相似中心取值为 0 而在边界上取值为 1,环向坐标 s 沿着外边界逆时针方向.域内任意点的直角坐标 (\hat{x}, \hat{y}) 与比例边界坐标 (ξ, s) 的关系为

$$\hat{x} = \hat{x}_0 + \xi x(s), \quad \hat{y} = \hat{y}_0 + \xi y(s). \tag{22}$$

基于式(18),广义位移 $\bar{\mathbf{u}}(\xi, s)$ 可近似地表示为

$$\bar{\mathbf{u}}(\xi, s) = \Phi(s) \bar{\mathbf{u}}(\xi) = \sum_{I=1}^n \phi_I(s) \bar{\mathbf{u}}_I(\xi), \tag{23}$$

式中, $\bar{\mathbf{u}}_I(\xi)$ 为节点 I 的径向广义位移向量.若不考虑体力和体电荷作用,将式(23)代入虚功原理,可推导出压电材料断裂分析的 IIEFG-SBM 控制方程为^[5]

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \bar{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \bar{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \bar{\mathbf{u}}(\xi) = 0, \tag{24}$$

$$\mathbf{P}_m = (\mathbf{E}_0 \bar{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \bar{\mathbf{u}}(\xi)) |_{\xi=1}, \tag{25}$$

式中, \mathbf{P}_m 为等效广义节点力向量,系数矩阵 $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$ 和 \mathbf{E}_2 的具体形式为

$$\mathbf{E}_0 = \int_s \mathbf{B}_1(s)^T \mathbf{H} \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds, \tag{26}$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{H} \mathbf{B}_1(s) |\mathbf{J}| ds, \tag{27}$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_S \mathbf{B}_2(s)^T \mathbf{H} \mathbf{B}_2(s) |\mathbf{J}| ds, \tag{28}$$

其中

$$|\mathbf{J}| = x(s)y(s)_{,s} - y(s)x(s)_{,s}, \tag{29}$$

$$\mathbf{B}_1(s) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} y(s)_{,s} & 0 & 0 \\ 0 & -x(s)_{,s} & 0 \\ -x(s)_{,s} & y(s)_{,s} & 0 \\ 0 & 0 & y(s)_{,s} \\ 0 & 0 & -x(s)_{,s} \end{pmatrix} \Phi(s), \tag{30}$$

$$\mathbf{B}_2(s) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} -y(s) & 0 & 0 \\ 0 & x(s) & 0 \\ x(s) & -y(s) & 0 \\ 0 & 0 & -y(s) \\ 0 & 0 & x(s) \end{pmatrix} \Phi(s)_{,s}. \tag{31}$$

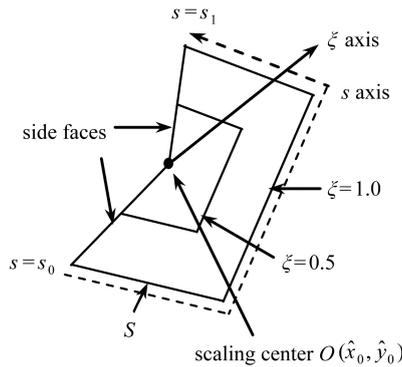


图 1 比例边界坐标系

Fig. 1 Scaled boundary coordinates

引入 $\bar{\mathbf{u}}(\xi)$ 的对偶变量 $\bar{\mathbf{q}}(\xi)$, 将式(24)转化为一阶常微分方程, 即

$$\bar{\mathbf{q}}(\xi) = \mathbf{E}_0 \xi \bar{\mathbf{u}}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \bar{\mathbf{u}}(\xi), \tag{32}$$

$$\xi \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(\xi) \\ \bar{\mathbf{q}}(\xi) \end{pmatrix}_{,\xi} = -\mathbf{Z} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(\xi) \\ \bar{\mathbf{q}}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

式中

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & -\mathbf{E}_0^{-1} \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 & -\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

对矩阵 \mathbf{Z} 进行分块对角 Schur 分解^[9], 可得

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{S} \boldsymbol{\psi}^{-1}, \tag{35}$$

式中

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left(S_1 \quad \cdots \quad S_{N-1} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad S_{N+2} \quad \cdots \quad S_{2N} \right), \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1^u & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{N-1}^u & \boldsymbol{\psi}_N^u & \boldsymbol{\psi}_{N+1}^u & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2N}^u \\ \boldsymbol{\psi}_1^q & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{N-1}^q & \boldsymbol{\psi}_N^q & \boldsymbol{\psi}_{N+1}^q & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2N}^q \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\lambda(\mathbf{S}_1) \leq \lambda(\mathbf{S}_2) \leq \cdots \leq \lambda(\mathbf{S}_{2N}), \quad (38)$$

式中, \mathbf{I} 为 3×3 的单位矩阵, $\lambda(\mathbf{S}_i)$ 为分块矩阵 \mathbf{S}_i 的特征值实部. 对于有限域问题 ($0 \leq \xi \leq 1$), IIEFG-SBM 计算域的刚度矩阵 \mathbf{K}_m 可写为

$$\mathbf{K}_m = (\boldsymbol{\psi}_1^q \cdots \boldsymbol{\psi}_{N-1}^q \boldsymbol{\psi}_N^q) (\boldsymbol{\psi}_1^u \cdots \boldsymbol{\psi}_{N-1}^u \boldsymbol{\psi}_N^u)^{-1}. \quad (39)$$

边界广义节点位移 $\bar{\mathbf{u}}_m(\xi = 1)$ 可通过如下的平衡方程式进行求解:

$$\mathbf{K}_m \bar{\mathbf{u}}_m(\xi = 1) = \mathbf{P}_m. \quad (40)$$

域内任一点的广义应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\xi, s)$ 可由下式计算得到

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\xi, s) = \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{\psi}_{\sigma_i}(s) \xi^{-S_i - \mathbf{I}} \mathbf{c}_i, \quad (41)$$

式中

$$\mathbf{c} = (\boldsymbol{\psi}_1^u \cdots \boldsymbol{\psi}_{N-1}^u \boldsymbol{\psi}_N^u)^{-1} \bar{\mathbf{u}}_m(\xi = 1), \quad (42)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\sigma_i}(s) = \mathbf{H}(-\mathbf{B}_1(s) \boldsymbol{\psi}_i^u \mathbf{S}_i + \mathbf{B}_2(s) \boldsymbol{\psi}_i^u). \quad (43)$$

3 IIEFG-SBM 与 FEM 的耦合

如图 2 所示, 计算域 Ω 内含一条裂纹, 任取裂纹周边一定范围 ($ABCD$ 与外边界围成的计算域) 并定义为 Ω_2 , 其余区域则定义为 Ω_1 . 将 Ω_1 和 Ω_2 分别采用 FEM 和 IIEFG-SBM 离散, 并且两者相互独立. 在计算域 Ω_1 中, FEM 广义节点位移 $\bar{\mathbf{u}}_f$ 的求解方程为

$$\mathbf{K}_f \bar{\mathbf{u}}_f = \mathbf{P}_f, \quad (44)$$

式中, \mathbf{K}_f 和 \mathbf{P}_f 分别为 FEM 的刚度矩阵和等效广义节点力向量.

FEM 计算域 Ω_1 与 IIEFG-SBM 计算域 Ω_2 的界面 S' 上必须满足广义位移连续条件, 即

$$\bar{\mathbf{u}}_{S'}^1(s) = \bar{\mathbf{u}}_{S'}^2(s), \quad (45)$$

式中, $\bar{\mathbf{u}}_{S'}^1(s)$ 和 $\bar{\mathbf{u}}_{S'}^2(s)$ 分别为计算域 Ω_1 和计算域 Ω_2 在界面 S' 上的广义位移向量.

为便于施加条件(45), 引入界面 S' 上的势能泛函 Π :

$$\Pi = \frac{\alpha}{2} \int_{S'} (\bar{\mathbf{u}}_{S'}^1(s) - \bar{\mathbf{u}}_{S'}^2(s))^T (\bar{\mathbf{u}}_{S'}^1(s) - \bar{\mathbf{u}}_{S'}^2(s)) ds, \quad (46)$$

式中, α 为罚因子, 一般取弹性常数 c_{11} 的 $10^2 \sim 10^4$ 倍可获得理想的结果, 且

$$\bar{\mathbf{u}}_{S'}^1(s) = \sum_{l=1}^{n_e} N_l(s) \bar{\mathbf{u}}_{ll}, \quad (47)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{S'}^2(s) = \sum_{l=1}^n \phi_l(s) \bar{\mathbf{u}}_{ml}, \quad (48)$$

式中, $\bar{\mathbf{u}}_{ll}$ 和 $\bar{\mathbf{u}}_{ml}$ 分别为 FEM 和 IIEFG-SBM 的广义位移, $N_l(s)$ 和 $\phi_l(s)$ 分别为 FEM 和 IIEFG-SBM 的形函数, n_e 为 FEM 单元节点个数.

将式(47)和(48)代入式(46), 由泛函的变分为零可以得到

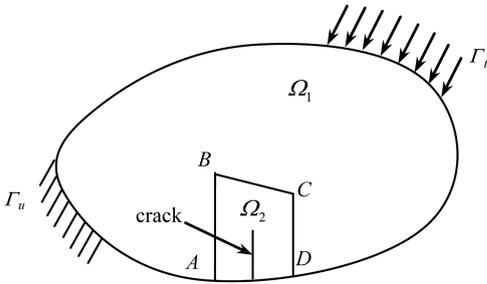


图 2 结构示意图

Fig. 2 Schematic of the model

$$\mathbf{K}_c \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (49)$$

式中, $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}_f^T, \bar{\mathbf{u}}_m^T)^T$ 为整体节点(包含 FEM 节点和 IIEFG-SBM 节点)的广义位移列向量,且

$$(\mathbf{K}_c)_{IJ} = \int_{S'} (N_I - \phi_I) \mathbf{D}_c (N_J - \phi_J) ds, \quad (50)$$

式中

$$\mathbf{D}_c = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (51)$$

最终 IIEFG-SBM 和 FEM 耦合后的离散求解方程可写为

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P}, \quad (52)$$

式中

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_m \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_f^T, \mathbf{P}_m^T)^T. \quad (54)$$

4 数值算例

为了验证所提方法的有效性,对两个典型算例进行了计算,并与已有的数值解进行了比较.计算中,选用了二次基函数和 8 节点四边形等参单元,且材料参数均取为

$$c_{11} = 126 \text{ GPa}, c_{13} = 84.1 \text{ GPa}, c_{33} = 117 \text{ GPa}, c_{44} = 23 \text{ GPa},$$

$$e_{31} = -6.5 \text{ C/m}^2, e_{33} = 23.3 \text{ C/m}^2, e_{15} = 17.44 \text{ C/m}^2,$$

$$h_{11} = 1.503 \times 10^{-8} \text{ C}/(\text{V} \cdot \text{m}), h_{33} = 1.30 \times 10^{-8} \text{ C}/(\text{V} \cdot \text{m}).$$

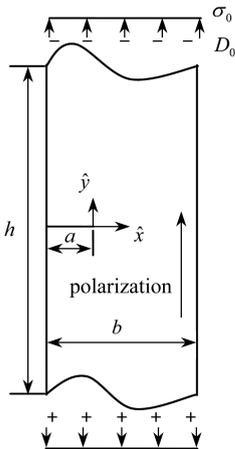


图 3 含边界裂纹压电板

Fig. 3 A piezoelectric strip with an edge crack

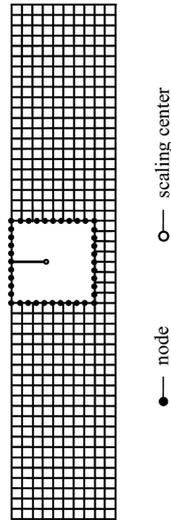


图 4 含边界裂纹压电板的离散模型

Fig. 4 The discretization model for the piezoelectric strip with an edge crack

4.1 边界水平裂纹

图 3 为一宽为 b , 高为 h 的压电板,内含一长为 a 的边界水平裂纹.极化方向为 y 轴,受到

远端拉伸载荷 σ_0 与电位移载荷 D_0 作用,并令加载参数 $R = D_0 c_{33} / (e_{33} \sigma_0)$. 计算中,取 $h = 5.0$ m, $b = 1.0$ m, 并且 IIEFG-SBM 计算域的大小为 $0.8 \text{ m} \times 0.8 \text{ m}$. 图 4 给出了 FEM 单元尺度为 0.1 m, IIEFG-SBM 计算域边界节点总数为 41 的离散模型. 图 5 和图 6 分别给出了 $R = 0, 1, 2, 3$ 时裂尖的正则化应力强度因子 K_I 与电位移强度因子 K_D . 显然, 本文耦合方法与文献 [17] 的计算结果几乎一致, 从而可知本文方法具有较高的计算精度.

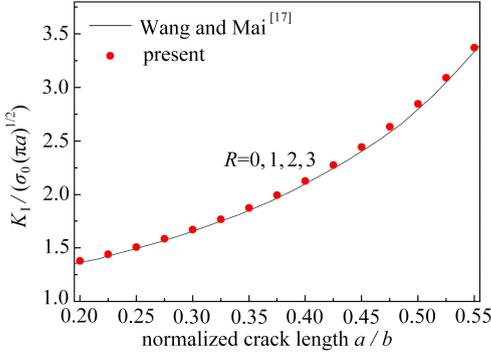


图 5 正则化应力强度因子 K_I 与裂纹长度的关系
Fig. 5 Normalized stress intensity factor K_I vs. the normalized crack length

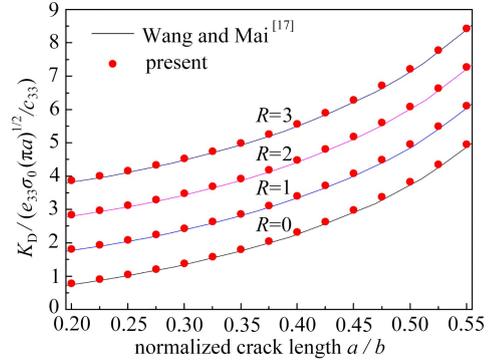


图 6 正则化电位移强度因子 K_D 与裂纹长度的关系
Fig. 6 Normalized electric displacement intensity factor K_D vs. the normalized crack length

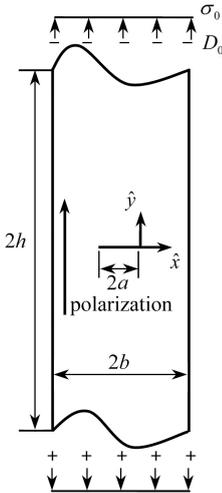


图 7 含中心水平裂纹压电板
Fig. 7 A piezoelectric strip with a horizontal central crack

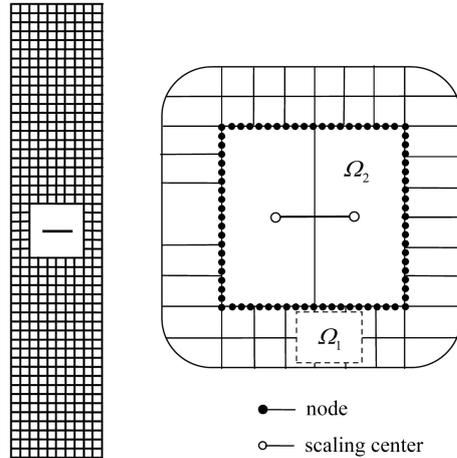


图 8 含中心水平裂纹压电板的离散模型
Fig. 8 The discretization model for the piezoelectric strip with a horizontal central crack

4.2 中心水平裂纹

图 7 为一尺寸为 $2b \times 2h$ 的压电板, 内含一长度为 $2a$ 的中心水平裂纹. 极化方向为 y 轴, 受到拉伸载荷 σ_0 和电位移荷载 D_0 作用, 并令加载参数 $R = D_0 c_{33} / (e_{33} \sigma_0)$. 计算中, 取 $b = 1$ m, $h = 5$ m. 图 8 给出了 FEM 单元尺度为 0.2 m, IIEFG-SBM 计算域边界节点总数为 100 的离散模型. 图 9 和图 10 分别给出了 $R = 0, 1, 2, 3$ 时的正则化应力强度因子 K_I 和电位移强度因子 K_D 与裂纹长度的关系, 并与文献 [17] 的计算结果进行了比较. 显然, 本文计算结果仍具有较高的计算精度, 这进一步证明了本文所提方法的有效性.

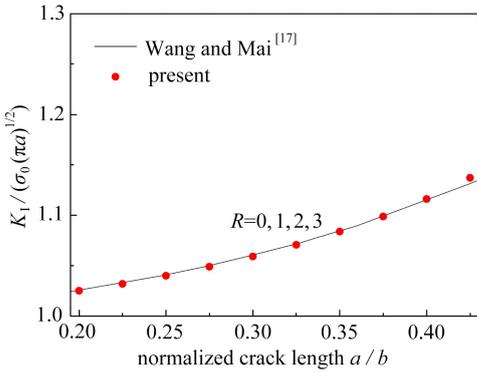


图 9 正则化应力强度因子 K_I 与裂纹长度的关系

Fig. 9 Normalized stress intensity factor K_I vs. the normalized crack length

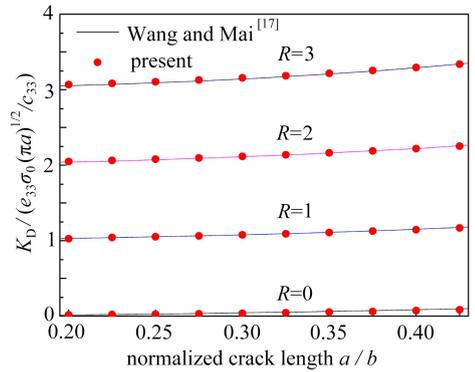


图 10 正则化电位移强度因子 K_D 与裂纹长度的关系

Fig. 10 Normalized electric displacement intensity factor K_D vs. the normalized crack length

5 结 论

为了充分发挥 IIEFG-SBM 处理压电材料断裂问题十分有效的独特优势,并提高算法的通用性和解决问题的广泛性,本文提出了压电材料断裂分析的 IIEFG-SBM 与 FEM 耦合方法.该耦合方法将计算域划分为含裂纹和不含裂纹的两个区域,并分别独立地采用 IIEFG-SBM 与 FEM 模拟.IIEFG-SBM 计算域仅需对其边界布置一系列的离散节点,前处理简单,并且可以充分利用其半解析特性,从而可直接根据定义得到较高精度的应力强度因子和电位移强度因子.此外,FEM 网格可以不必考虑裂纹,因此其划分过程几乎没有难度,从而大幅度降低了前处理的难度.数值算例表明,本文所提方法能有效用于压电材料断裂问题的求解.

参考文献 (References):

- [1] 平学成, 陈梦成, 谢基龙, 等. 基于新型裂尖杂交元的压电材料断裂力学研究[J]. 力学学报, 2006, **38**(3): 407-412. (PING Xuecheng, CHEN Mengcheng, XIE Jilong, et al. Fracture mechanics researches on piezoelectric materials based on a novel crack-tip hybrid finite element method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, **38**(3): 407-412. (in Chinese))
- [2] LI C, MAN H, SONG C M, et al. Fracture analysis of piezoelectric materials using the scaled boundary finite element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, **97**(1): 52-71.
- [3] LI Q H, CHEN S S, LUO X M. Steady heat conduction analyses using an interpolating element-free Galerkin scaled boundary method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **300**: 103-115.
- [4] 陈莘莘, 童谷生, 万云. 弹性力学问题的插值型无单元伽辽金比例边界法[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, **47**(3): 034601. (CHEN Shenshen, TONG Gusheng, WAN Yun. An interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for the elasticity problem[J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2017, **47**(3): 034601. (in Chinese))
- [5] 陈莘莘, 王娟. 压电裂纹的插值型无单元伽辽金比例边界法分析[J]. 机械工程学报, 2017, **53**(6): 53-59. (CHEN Shenshen, WANG Juan. Analysis of interpolating element-free Galerkin scaled boundary method for piezoelectric cracks[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, **53**(6): 53-59. (in Chinese))

- [6] 王伟, 伊士超, 姚林泉. 分析复合材料层合板弯曲和振动的一种有效无网格方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(12): 1274-1284.(WANG Wei, YI Shichao, YAO Linquan. An effective mesh-free method for bending and vibration analyses of laminated composite plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(12): 1274-1284.(in Chinese))
- [7] 王峰, 周宜红, 郑保敬, 等. 基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法求解结构非耦合热应力问题[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1217-1227.(WANG Feng, ZHOU Yihong, ZHENG Baojing, et al. A meshless local Petrov-Galerkin method based on the moving Kriging interpolation for structural uncoupled thermal stress analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(11): 1217-1227.(in Chinese))
- [8] 肖毅华, 张浩锋, 平学成. 无网格对称粒子法中两类热边界条件的处理[J]. 华东交通大学学报, 2014, **31**(4): 65-70.(XIAO Yihua, ZHANG Haofeng, PING Xuecheng. Treatments of two kinds of thermal boundary conditions in meshless symmetric particle method[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2014, **31**(4): 65-70.(in Chinese))
- [9] SONG C M. A matrix function solution for the scaled boundary finite element equation in statics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**: 2325-2356.
- [10] DEEKS A J, WOLF J P. A virtual work derivation of the scaled boundary finite element method for elastostatics[J]. *Computational Mechanics*, 2002, **28**(6): 489-504.
- [11] WANG J F, SUN F X, CHENG Y M. An improved interpolating element-free Galerkin method with a nonsingular weight function for two-dimensional potential problems[J]. *Chinese Physics B*, 2012, **21**(9): 090204.
- [12] WANG J F, WANG J F, SUN F X, et al. An interpolating boundary element-free method with nonsingular weight function for two-dimensional potential problems[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2013, **10**(6): 1350043.
- [13] LANCASTER P, SALKAUSKAS K. Surface generated by moving least squares methods[J]. *Mathematics of Computation*, 1981, **37**(155): 141-158.
- [14] 殷德胜, 尹栓, 周宜红. 裂缝分析的比例边界有限元与有限元耦合的虚拟结构面模型[J]. 计算力学学报, 2014, **31**(6): 735-741.(YIN Desheng, YIN Shuan, ZHOU Yihong. Coupled SBFEM and FEM for crack analysis based on virtual discontinuous surface method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2014, **31**(6): 735-741.(in Chinese))
- [15] YANG Z J, WANG X F, YIN D S, et al. A non-matching finite element-scaled boundary finite element coupled method for linear elastic crack propagation modelling[J]. *Computers & Structures*, 2015, **153**(C): 126-136.
- [16] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.(ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Methods*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.(in Chinese))
- [17] WANG B L, MAI Y W. A piezoelectric material strip with a crack perpendicular to its boundary surfaces[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(17): 4501-4524.

Application of a Coupled Interpolating Element-Free Galerkin Scaled Boundary Method and Finite Element Method in Fracture Analysis of Piezoelectric Materials

CHEN Shenshen, WANG Juan

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University,
Nanchang 330013, P.R.China)

Abstract: The interpolating element-free Galerkin scaled boundary method (IEFG-SBM) is a semi-analytical method which only requires discretizing the boundary with the interpolating element-free Galerkin (EFG) method without fundamental solution. This method is very powerful to deal with fracture problems of piezoelectric materials. In order to further improve the applicability of the IEFG-SBM, a coupled IEFG-SBM and finite element method (FEM) for fracture analysis of piezoelectric materials was developed. The IEFG-SBM was utilized to model the domain close to the crack tip and the FEM was employed in the remaining domain. Based on continuity conditions at the interface between the IEFG-SBM sub-domain and the FEM sub-domain, the coupled formula of the proposed method can be conveniently derived. Finally, 2 numerical examples were presented to demonstrate the validity of the proposed method.

Key words: piezoelectric material; fracture mechanics; interpolating element-free Galerkin scaled boundary method; intensity factor

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11462006; 21466012)

引用本文/Cite this paper:

陈莘莘, 王娟. 插值型无单元 Galerkin 比例边界法与有限元法的耦合在压电材料断裂分析中的应用 [J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(11): 1258-1267.

CHEN Shenshen, WANG Juan. Application of a coupled interpolating element-free Galerkin scaled boundary method and finite element method in fracture analysis of piezoelectric materials [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(11): 1258-1267.