

倾斜层中的对流斑图及其临界条件*

宁利中¹, 吴昊¹, 宁碧波², 田伟利³, 宁景昊¹

- (1. 西安理工大学 水利水电学院, 西安 710048;
2. 嘉兴学院 建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001;
3. 上海大学 建筑系, 上海 200444)

摘要: 通过二维流体力学基本方程的数值模拟,探讨了 Prandtl(普朗特)数 $Pr = 6.99$ 时,倾斜矩形腔体中的对流斑图和斑图转换的临界条件.根据倾角 θ 和相对 Rayleigh(瑞利)数 Ra_r 的变化,倾斜矩形腔体中的对流斑图可以分为:单滚动圈对流斑图、充满腔体的多滚动圈对流斑图和过渡阶段的多滚动圈对流斑图.当 θ 一定时,随着 Ra_r 的减小,系统由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.这时,对流振幅 A 和 Nusselt(努塞尔)数 Nu 随着 Ra_r 的增加而增加.当 $Ra_r = 9$ 时,随着 θ 的增加,系统由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图,这时对流振幅 A 随着 θ 的增加而减小, Nusselt 数 Nu 随着 θ 的增加而增加.在 θ_c - Ra_r 平面上对多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的模拟结果表明,在 $Ra_r = 2$ 时,腔体中没有发现多滚动圈对流斑图.在 Ra_r 为 2.5 左右时,腔体中出现多滚动圈到单滚动圈对流斑图的过渡.当多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的临界倾角 $\theta_c < 10^\circ$ 时, θ_c 随着 Ra_r 的减小而增加.当 $\theta_c > 10^\circ$ 时, θ_c 随着 Ra_r 的增加而增加,在 $Ra_r \leq 5$ 时, θ_c 随着 Ra_r 的增加而迅速增加;当 $Ra_r > 5$ 时, θ_c 随着 Ra_r 的增加而缓慢增加. θ_c 与 $Ra_{r,\theta}$ 的关系与 Ra_r 类似.

关键词: 倾斜层; 对流斑图; Rayleigh 数; 临界倾角; 流线

中图分类号: O357

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390102

引 言

底部加热流体层的对流问题是广大科学研究者关注的课题之一.20 世纪初由 Bénard 首先进行有关实验并发现有规则的对流斑图, Rayleigh 首先进行了理论的研究.为了纪念他们的成就,底部加热水平流体层的对流问题以他们的名字命名,即 Rayleigh-Bénard 对流.从那以后,所谓 Rayleigh-Bénard 对流模型的研究,引发了大量的研究,取得了丰富的成果^[1-2].

随着计算机和计算技术的进步,计算流体力学有了很大的发展.关于 Rayleigh-Bénard 对流的数值模拟也获得很大进展.通过数值求解流体力学方程的数值模拟已经成为研究 Rayleigh-Bénard 对流的有力工具.数值计算可以分为基于流体力学振幅方程组的数值模拟^[3]、基于流体力学扰动方程组的数值模拟^[4-7]和基于流体力学基本方程组^[8-19]的数值模拟.基于流体力学振幅方程组的数值模拟计算速度快并能够解释部分实验现象.基于流体力学扰动方程组的数值模拟能够模拟对流发生点附近的特性和斑图形成.文献^[8-13]模拟了混合流体对流中的局部

* 收稿日期: 2018-04-02; 修订日期: 2018-09-18

基金项目: 国家自然科学基金(10872164)

作者简介: 宁利中(1961—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: ninglz@xaut.edu.cn).

行波和特性.文献[14-19]揭示了沿分叉曲线不同对流斑图的形成,斑图的动力学特性,斑图的分区及扰动的成长模式.文献[20]基于它们研发的高精度差分格式研究了具有弱 Soret 效应的腔体中的对流特性.文献[21]揭示了一种新型的对流斑图.文献[22]研究了扰动成长及对流的周期性问题.这些研究都是针对底部加热的水平流层在不同流体介质,不同加热条件及不同边界条件情况下获得.关于倾角对对流特性的影响及倾斜流体层对流问题的研究也有一些成果^[23-33],主要集中在稳定性方面.本文通过二维流体力学基本方程组的数值模拟,主要研究了 Prandtl 数 $Pr = 6.99$ 时的流体在倾斜矩形腔体中的对流特性,斑图形成及不同斑图转换的临界条件等.

1 数学物理模型

对于图 1 所示倾斜放置的矩形断面的二维腔体, xOy 坐标如图所示,矩形腔体倾角为 θ .上下表面温度差为 ΔT ,当上下面温度差超过临界值时,对流发生;当温度差足够小时,仅浮力项中考虑密度的变化,采用 Boussinesq 假设,描述倾斜层对流的流体力学基本方程组可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial y} = -\frac{\partial p_{\text{eff}}}{\rho_0 \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g\alpha(T - T_0) \sin \theta, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p_{\text{eff}}}{\rho_0 \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + g\alpha(T - T_0) \cos \theta, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(wT)}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \tag{4}$$

式中 $p_{\text{eff}} = p + \rho_0 g y \cos \theta + \rho_0 g x \sin \theta$, u 表示沿腔体长度方向的速度, w 表示沿腔体垂直方向的速度, T 表示温度场, ρ 是密度, g 是重力加速度, p 是压强, ν 是运动黏性系数, α 是热引起的体积膨胀系数, t 是时间, κ 为热扩散系数, $\kappa = \lambda / (\rho_0 c_p)$, λ 为热传导系数, c_p 为定压比热容,下标 0 表示传导状态下相应物理量沿空腔高度的平均值.

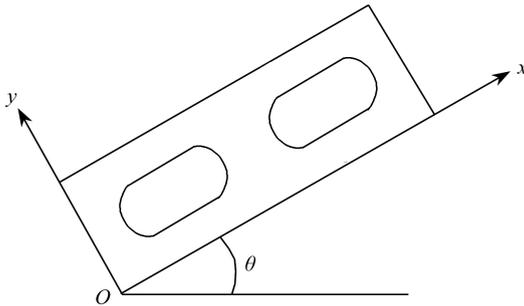


图 1 倾斜层对流模型图

Fig. 1 The model for the inclined layer convection

腔体中所有壁面都是固定的,在壁面上速度为 0,温度沿长度方向的上下面等温,沿垂直方向的左右面绝热.因此,计算中采用的速度和温度边界条件如下:

$$\text{当 } x = 0, L_x \text{ 时, } u = w = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } u = w = 0, T = T_0 + 0.5\Delta T;$$

当 $y = d$ 时, $u = w = 0, T = T_0 - 0.5\Delta T$,

式中, d 为计算区域高度; L_x 为计算腔体的长度。

流速的初始条件为 $u = w = 0$, 温度的初始条件为上下面的平均温度 T_0 。

在数值模拟中, 根据有限容积法对流体力学方程组进行了离散, SIMPLE 算法用于求解速度-压力耦合方程。对流与扩散项采用二阶精度的乘方差分格式。采用均匀交错网格系统。由于文献[18]采用 $d/20$ 与 $d/30$ 两种不同的网格进行计算, 发现计算结果基本相同。所以本文采用 $d/20$ 的网格进行计算, 时间步长 $\Delta t = 0.02$ s。

为了讨论的方便, 采用无因次参数描述对流系统。取腔体参数 $X = x/d, Y = y/d, \Gamma = L_x/d$ 。对流系统可以由 Rayleigh 数 $Ra = g\alpha\Delta Td^3/(\kappa\nu)$, 通常采用相对 Rayleigh 数 $Ra_r = Ra/Ra_c$, 其中, $Ra_c = 1708$; 反映流体物理性质对对流影响的 Prandtl 数 $Pr = \nu/\kappa$ 及反映腔体倾斜程度的倾角 θ 来控制。

计算中采用 20 °C 的水, 此时 $T_0 = 293.15$ K, $Pr = 6.99$ 。采用长高比 $\Gamma = 20$ 的腔体。

2 倾斜层中的对流斑图及其临界条件

2.1 不同的对流斑图

2.1.1 单滚动圈对流斑图

对于倾斜层中的对流, 倾角 θ 和相对 Rayleigh 数 Ra_r 是控制参数。根据数值模拟, 当 $Ra_r = 9, \theta = 23^\circ$ 时, 发现倾斜腔体中存在一个滚动圈, 称之为单滚动圈对流。它的对流结构如图 2 所示。图 2(a) 是对流结构的流线图, 可以看出倾斜腔体中是一个大的滚动圈; 图 2(b) 是对流结构的温度分布图, 温度除了在两端壁部有急剧变化外, 在腔体的中部温度的等值线是一些平行于腔体的直线; 图 2(c) 是对流结构在 $0 \leq X \leq 10$ 的范围内的速度矢量图, 由于速度矢量图是以中心反对称的, 所以给出了腔体中的一半。可以看出, 沿腔体上壁面附近流体向左运动, 沿腔体下壁面附近流体向右运动, 在左端壁附近流体由上向下运动, 从而在整个腔体内形成一个逆时针旋转的大滚动圈。

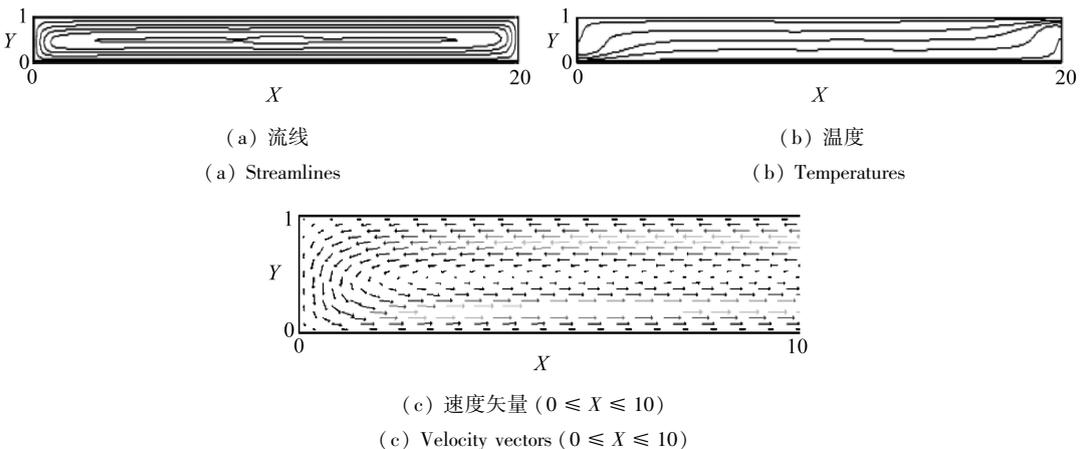


图 2 $Ra_r = 9, \theta = 23^\circ$ 时的对流斑图

Fig. 2 Convective patterns for $Ra_r = 9$ and $\theta = 23^\circ$

2.1.2 充满腔体的多滚动圈对流斑图

当 $Ra_r = 6, \theta = 4^\circ$ 时, 倾斜腔体中发生的是充满腔体的多滚动圈对流斑图, 如图 3 所示。在长高比 $\Gamma = 20$ 的腔体内发生了 25 个对流圈, 类似典型 Rayleigh-Bénard 对流的对流斑图, 但对

流波数较大.图 3(a)中大小不同的流线圈有规则的依次交替出现,说明在两个强对流圈之间是一个较弱的对流圈,这一点不同于典型 Rayleigh-Bénard 对流时的均匀大小的对流圈;图 3(b)中温度等值线的分布是一些曲线分布,以中心轴为对称的结构;图 3(c)给出了两个周期长度的对流速度矢量分布图,可以看出速度的大小和方向以及对流滚动的形式.在这里,由于对流滚动圈顺时针方向的转动和逆时针方向的转动间隔出现,因此,在两个对流圈之间的上升流和下降流有规则地交替出现.

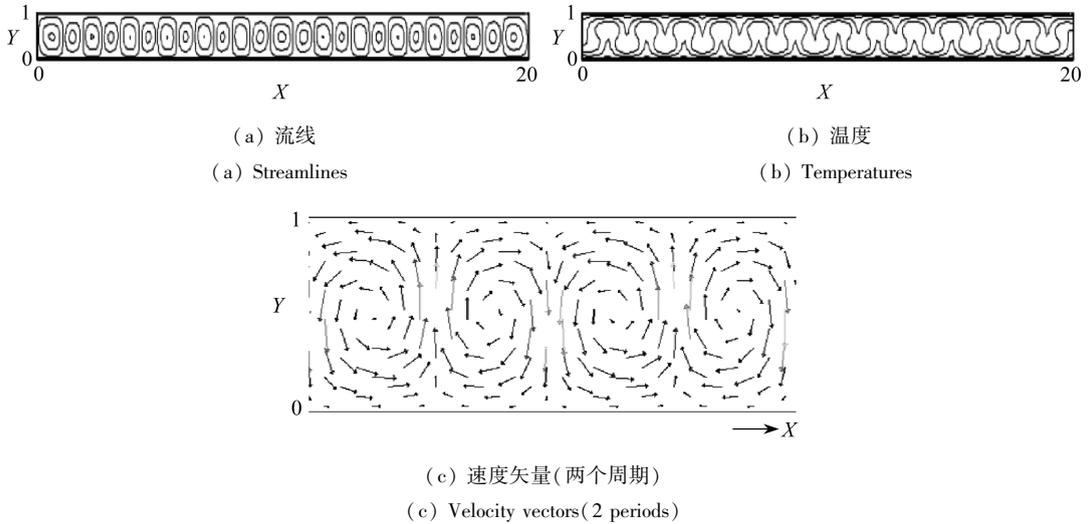


图 3 $Ra_r = 6, \theta = 4^\circ$ 时的对流斑图

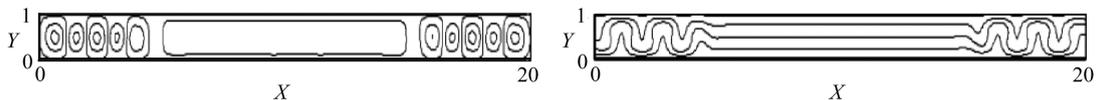
Fig. 3 Convective patterns for $Ra_r = 6$ and $\theta = 4^\circ$

2.1.3 过渡阶段的多滚动圈对流斑图

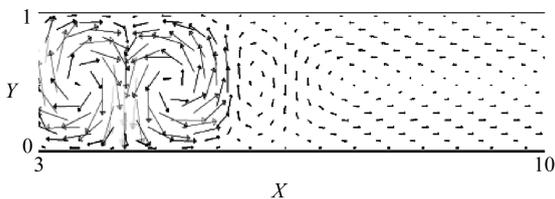
当 $Ra_r = 3, \theta = 4^\circ$ 时,倾斜腔体中出现的是过渡阶段的多滚动圈对流斑图,如图 4 所示.图 4(a)中的流线在腔体两端部出现的是类似 Rayleigh-Bénard 对流具有大波数的小对流斑圈,在腔体的中部出现一个波数较小流动速度较小的大对流圈,流线图以 Y 坐标轴中心对称.这是倾斜腔体中的流动由充满腔体的多滚动圈对流斑图向单滚动圈对流斑图过渡时出现的一种斑图.如果以对流速度最大值的 $1/2$ 作为对流存在的标准,腔体中部的较小流动速度的大对流圈可以忽略.这样腔体中形成的就是局部对流.图 4(b)是温度等值线分布,在腔体两端部附近,温度等值线分布类似于充满腔体的多滚动圈对流斑图的情况.在腔体中部附近,温度等值线分布是一些平行的直线.由图 4(c)的 $3 \leq X \leq 10$ 范围的速度矢量图可以看出,在左端部附近滚动圈的速度较大,在腔体中部附近,流动速度很小.

2.2 对流斑图对相对 Rayleigh 数 Ra_r 和倾角 θ 的依赖性

图 5 是 $\theta = 10^\circ$ 时不同相对 Rayleigh 数 Ra_r 下的流线图.可以看出,在较大的 Ra_r 下, $Ra_r \geq 6$ 时,系统是充满腔体的多滚动圈对流斑图.当 $Ra_r = 3$ 时,系统过渡到过渡阶段的多滚动圈对流斑图.随着 Ra_r 的减小,当 $Ra_r = 2$ 时,系统出现的是单滚动圈对流斑图.也就是说,当 θ 一定时,随着 Ra_r 的减小,系统由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.对于不同 Ra_r 情况下的垂直最大流速 w_{max} 用 κ/d 无因次化,可以得到对流振幅 A ,即 $A = w_{max}/(\kappa/d)$.图 6 给出了对流振幅 A 随着 Ra_r 的变化.可以看出, A 随着 Ra_r 的增加而增加,其变化类似于 Rayleigh-Bénard 对流的结果.Nusselt 数 Nu 随着 Ra_r 的变化如图 7 所示.可以看出, Nu 随着 Ra_r 的增加而增加.



(a) 流线 (a) Streamlines
(b) 温度 (b) Temperatures



(c) 速度矢量 (3 ≤ X ≤ 10)
(c) Velocity vectors (3 ≤ X ≤ 10)

图 4 $Ra_r = 3, \theta = 4^\circ$ 时的对流斑图

Fig. 4 Convective patterns for $Ra_r = 3$ and $\theta = 4^\circ$

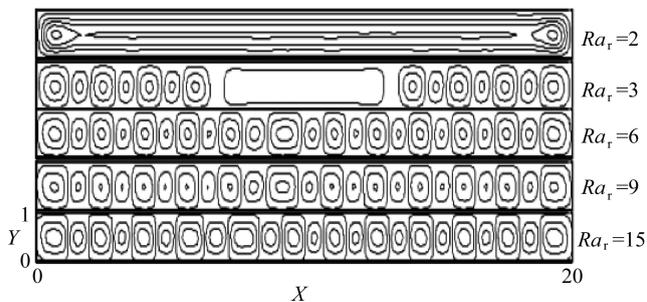


图 5 $\theta = 10^\circ$ 时不同 Ra_r 下的流线图

Fig. 5 The streamlines at different Ra_r values for $\theta = 10^\circ$

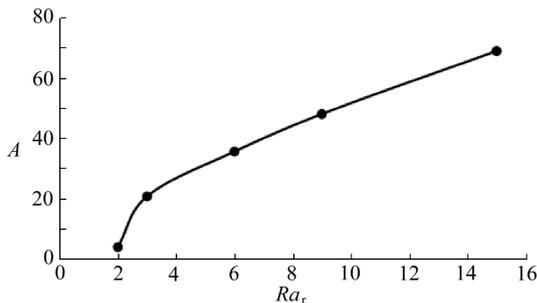


图 6 $\theta = 10^\circ$ 时对流振幅 A 随 Ra_r 的变化

Fig. 6 Variation of convection amplitude A with Ra_r for $\theta = 10^\circ$

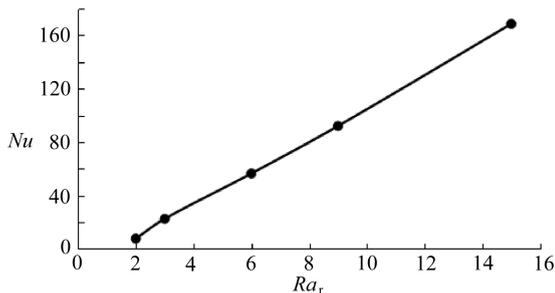


图 7 $\theta = 10^\circ$ 时 Nu 随 Ra_r 的变化

Fig. 7 Variation of Nu with Ra_r for $\theta = 10^\circ$

图 8 是相对 Rayleigh 数 $Ra_r = 9$ 时不同倾角 θ 情况下对流斑图的流线图。可以看出, θ 较小时, 系统出现的是充满腔体的多滚动圈对流斑图。在腔体内滚动圈的大小基本相同, 滚动圈的波数基本一致。当 $\theta = 20^\circ, 22^\circ$ 时, 系统进入过渡状态, 腔体中部分对流圈的波长伸长, 波数变小。但大的对流圈的最大流速与小的对流圈的最大流速接近。对流圈在腔体中的分布大小不一致, 不均匀。随着 θ 的进一步增加, 当 $\theta = 23^\circ$ 时, 腔体中出现的是单滚动圈对流斑图。总之, 当

Ra_r 一定时,随着 θ 的增加,腔体中由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.图 9 是 $Ra_r = 9$ 时对流振幅 A 随着 θ 的变化.可以看出,在 θ 较小的充满腔体的多滚动圈对流斑图阶段, A 较大.随着 θ 的增加,进入过渡阶段, A 迅速减小.然后,随着 θ 的增加,进入单滚动圈对流斑图阶段后, A 基本不变.图 10 是 $Ra_r = 9$ 时 Nu 随着倾角 θ 的变化.可以看出, Nu 随着 θ 的增加而增加.

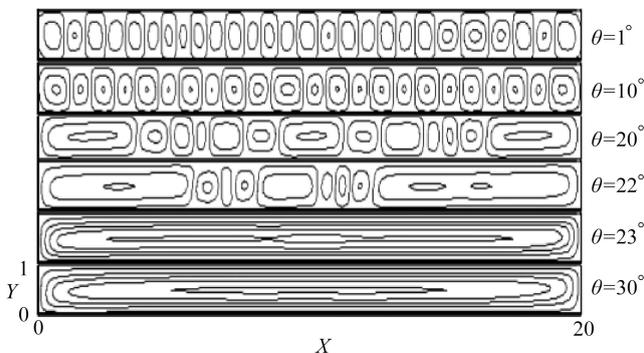


图 8 $Ra_r = 9$ 时不同 θ 的流线图

Fig. 8 The streamlines at different θ values for $Ra_r = 9$

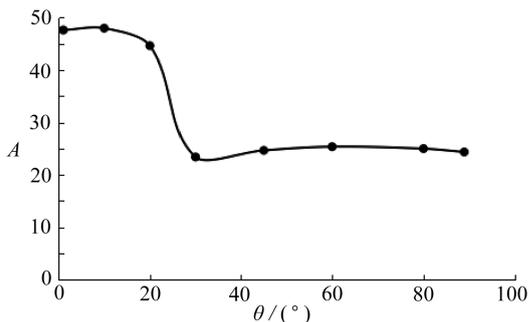


图 9 $Ra_r = 9$ 时对流振幅 A 随倾角 θ 的变化

Fig. 9 Variation of convection amplitude A with inclination angle θ for $Ra_r = 9$

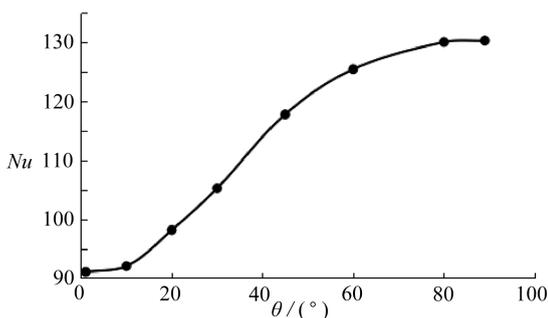


图 10 $Ra_r = 9$ 时 Nu 随倾角 θ 的变化

Fig. 10 Variation of Nu with inclination angle θ for $Ra_r = 9$

2.3 多滚动圈过渡到单滚动圈对流斑图的临界条件

由上一小节的讨论发现,当倾角 θ 一定时,随着相对 Rayleigh 数 Ra_r 的减小,系统由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.当 Ra_r 一定时,随着 θ 的增加,腔体中由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.这一发现,激励着我们进一步系统地研究腔体中由充满腔体的多滚动圈对流斑图到单滚动圈对流斑图的过渡.首先,将充满腔体的多滚动圈对流斑图和过渡阶段的多滚动圈对流斑图统一归结为多滚动圈对流斑图,然后研究多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的临界条件.图 11 是 $\theta_c - Ra_r$ 平面上对多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的模拟结果.可以看出,在 $Ra_r = 2$ 时,腔体中没有发现多滚动圈对流斑图.在 Ra_r 为 2.5 左右时,腔体中出现多滚动圈到单滚动圈对流斑图的过渡.当临界倾角 $\theta_c < 10^\circ$ 时,多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的临界倾角 θ_c 随着 Ra_r 的减小而增加.当 $\theta_c > 10^\circ$ 时,多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的 θ_c 随着 Ra_r 的增加而增加,在 $Ra_r \leq 5$ 时增加迅速,当 $Ra_r > 5$ 时, θ_c 随着 Ra_r 的增加而缓慢增加.

对于具有倾角的倾斜腔体的对流问题,垂直底部壁面的 Rayleigh 数可以表示为^[30] $Ra_\theta = g \cos \theta \cdot \alpha \Delta T d^3 / (\kappa \nu)$ 。因此,

$$Ra_{r\theta} = \frac{Ra_\theta}{Ra_c} = \frac{Ra \cos \theta}{Ra_c} = Ra_r \cos \theta.$$

将 θ_c 代入 $Ra_{r\theta}$ 的定义式,就可以得到 $Ra_{r\theta}$, 这时多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的 θ_c 与 $Ra_{r\theta}$ 的关系如图 12 所示,类似于图 11 的变化。

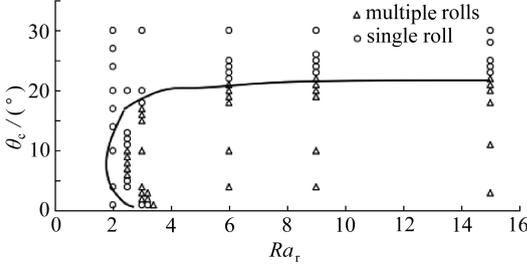


图 11 多滚动圈向单滚动圈对流过渡的临界倾角 θ_c 与 Ra_r 的关系

Fig. 11 Relation between critical inclination angle θ_c and Ra_r in transition from multiple rolls to single roll convection

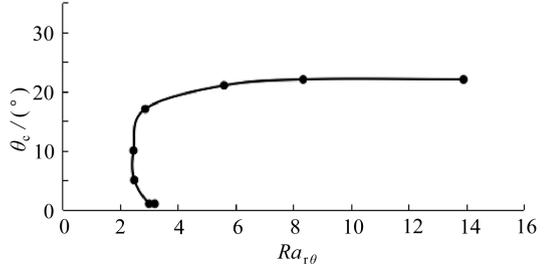


图 12 多滚动圈向单滚动圈对流过渡的临界倾角 θ_c 与 $Ra_{r\theta}$ 的关系

Fig. 12 Relation between critical inclination angle θ_c and $Ra_{r\theta}$ in transition from multiple rolls to single roll convection

3 结 论

本文通过二维流体力学基本方程的数值模拟,探讨了 Prandtl 数 $Pr = 6.99$ 时倾斜矩形腔体中的对流斑图和斑图转换的临界条件.根据分析可以得到以下结论。

1) 根据倾角 θ 和相对 Rayleigh 数 Ra_r 的变化,倾斜矩形腔体中的对流斑图可以分为 3 种斑图.即,单滚动圈对流斑图、充满腔体的多滚动圈对流斑图和过渡阶段的多滚动圈对流斑图.我们称后两种斑图为多滚动圈对流斑图。

2) 当倾角 θ 一定时,随着相对 Rayleigh 数 Ra_r 的减小,系统由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.对流振幅 A 随着 Ra_r 的增加而增加.Nusselt 数 Nu 也随着 Ra_r 的增加而增加。

3) 相对 Rayleigh 数 $Ra_r = 9$ 时,随着倾角 θ 的增加,腔体中由充满腔体的多滚动圈对流斑图过渡到单滚动圈对流斑图.在 θ 较小的充满腔体的多滚动圈对流斑图阶段,对流振幅 A 较大.随着 θ 的增加,进入过渡阶段, A 迅速减小.然后,随着 θ 的增加,进入单滚动圈对流斑图阶段后, A 基本不变.Nusselt 数 Nu 随着 θ 的增加而增加。

4) 在 $\theta_c - Ra_r$ 平面上对多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的模拟结果表明,在 $Ra_r = 2$ 时,腔体中没有发现多滚动圈对流斑图.在 Ra_r 为 2.5 左右时,腔体中出现多滚动圈到单滚动圈对流斑图的过渡.当临界倾角 $\theta_c < 10^\circ$ 时,多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的 θ_c 随着 Ra_r 的减小而增加.当 $\theta_c > 10^\circ$ 时,多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的 θ_c 随着 Ra_r 的增加而增加.在 $Ra_r \leq 5$ 时增加迅速,当 $Ra_r > 5$ 时, θ_c 随着 Ra_r 的增加而缓慢增加.多滚动圈到单滚动圈对流斑图过渡的 θ_c 与 $Ra_{r\theta}$ 的关系与 Ra_r 类似。

致谢 本文作者衷心感谢西北旱区生态水利国家重点实验室基金(2017ZZKT-2)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] CROSS M C, HOHENBERG P C. Pattern formation outside of equilibrium[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1993, **65**(3): 951-1112.
- [2] BODENSCHATZ E, PESCH W, AHLERS G. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection[J]. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 2000, **32**: 709-778.
- [3] WATANABE T, IIMA M, NISHIURA Y. Spontaneous formation of travelling localized structures and their asymptotic behaviour in binary fluid convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, **712**: 219-243.
- [4] YAHATA H. Travelling convection rolls in a binary fluid mixture[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1991, **85**(5): 933-937.
- [5] NING L Z, HARADA Y, YAHATA H. Modulated traveling waves in binary fluid convection in an intermediate-aspect-ratio rectangular cell[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1997, **97**(6): 831-848.
- [6] NING L Z, HARADA Y, YAHATA H. Localized traveling waves in binary fluid convection[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1996, **96**(4): 669-682.
- [7] NING L Z, HARADA Y, YAHATA H. Formation process of the traveling-wave state with a defect in binary fluid convection[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 1997, **98**(3): 551-566.
- [8] KNOBLOCH E, MERCADER I, BATISTE O, et al. Convectons in periodic and bounded domains[J]. *Fluid Dynamics Research*, 2010, **42**: 025505. DOI: 10.1088/0169-5983/42/2/025505.
- [9] TARAUT A V, SMORODIN B L, LÜCKE M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures[J]. *New Journal of Physics*, 2012, **14**(9): 093055. DOI: 10.1088/1367-2630/14/9/093055.
- [10] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Travelling convectons in binary fluid convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, **722**: 240-265.
- [11] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convectons, anticonvectons and multiconvectons in binary fluid convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, **667**: 586-606.
- [12] BARTEN W, LÜCKE M, KAMPS M, et al. Convection in binary fluid mixture II: localized traveling waves[J]. *Physical Review E*, 1995, **51**: 5662-5680.
- [13] JUNG D, LÜCKE M. Localized waves without the existence of extended waves: oscillatory convection of binary mixtures with strong Soret effect[J]. *Physical Review Letters*, 2002, **89**(5): 054502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.054502.
- [14] 宁利中, 王永起, 袁喆, 等. 两种不同结构的混合流体局部行波对流斑图[J]. 科学通报, 2016, **61**(8): 872-880. (NING Lizhong, WANG Yongqi, YUAN Zhe, et al. Two types of patterns of localized traveling wave convection in binary fluid mixtures with different structures[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2016, **61**(8): 872-880. (in Chinese))
- [15] 宁利中, 王娜, 袁喆, 等. 分离比对混合流体 Rayleigh-Bénard 对流解的影响[J]. 物理学报, 2014, **63**(10): 104401. DOI: 10.7498/aps.63.104401. (NING Lizhong, WANG Na, YUAN Zhe, et al. Influence of separation ratio on Rayleigh-Bénard convection solutions in a binary fluid mixture[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(10): 104401. DOI: 10.7498/aps.63.104401. (in Chinese))
- [16] 宁利中, 余荔, 袁喆, 等. 沿混合流体对流分叉曲线上部分支行波斑图的演化[J]. 中国科学(G辑): 物理学 天文学, 2009, **39**(5): 746-751. (NING Lizhong, YU Li, YUAN Zhe, et al. Evolution of traveling wave patterns along upper branch of bifurcation diagram in binary fluid

- convection[J]. *Scientia Sinica (Series G): Physica, Mechanica & Astronomica*, 2009, **39**(5): 746-751.(in Chinese))
- [17] 宁利中, 胡彪, 宁碧波, 等. Poiseuille-Rayleigh-Bénard 流动中对流斑图的分区和成长[J]. 物理学报, 2016, **65**(21): 214401. DOI: 10.7498/aps.65.214401.(NING Lizhong, HU Biao, NING Bibo, et al. Partition and growth of convection patterns in Poiseuille-Rayleigh-Bénard flow [J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, **65**(21): 214401. DOI: 10.7498/aps.65.214401.(in Chinese))
- [18] 宁利中, 齐昕, 周洋, 等. 混合流体 Rayleigh-Bénard 行波对流中的缺陷结构[J]. 物理学报, 2009, **58**(4): 2528-2534.(NING Lizhong, QI Xin, ZHOU Yang, et al. Defect structures of Rayleigh-Bénard travelling wave convection in binary fluid mixtures [J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(4): 2528-2534.(in Chinese))
- [19] NING L Z, QI X, YUAN Z, et al. A counter propagating wave state with a periodically horizontal motion of defects[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2008, **20**(5): 567-573.
- [20] ZHAO B X, TIAN Z F. Numerical investigation of binary fluid convection with a weak negative separation ratio in finite containers[J]. *Physics of Fluids*, 2015, **27**: 074102. DOI: 10.1063/1.4923235.
- [21] 宁利中, 渠亚伟, 宁碧波, 等. 一种新的混合流体对流竖向镜面对称对传波斑图[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(11): 1230-1239.(NING Lizhong, QU Yawei, NING Bibo, et al. A new type of counterpropagating wave pattern of vertical mirror symmetry in binary fluid convection[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1230-1239.(in Chinese))
- [22] 胡彪, 宁利中, 宁碧波, 等. 水平来流对扰动成长和对流周期性的影响[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(10): 1103-1111.(HU Biao, NING Lizhong, NING Bibo, et al. Effects of horizontal flow on perturbation growth and the convection periodicity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(10): 1103-1111.(in Chinese))
- [23] CLEVER R M. Finite amplitude longitudinal convection rolls in an inclined layer[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1973, **95**: 407-408.
- [24] CLEVER R M, BUSSE F H. Instabilities of longitudinal convection rolls in an inclined layer [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1977, **81**: 107-125.
- [25] DANIELS K E, BODENSCHATZ E. Defect turbulence in inclined layer convection[J]. *Physical Review Letters*, 2002, **88**: 034501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.034501.
- [26] DANIELS K E, PLAPP B B, BODENSCHATZ E. Pattern formation in inclined layer convection [J]. *Physical Review Letters*, 2000, **84**: 5320-5323.
- [27] HART J E. Stability of the flow in a differentially heated inclined box[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, **47**(3): 547-576.
- [28] HART J E. Transition to a wavy vortex regime in convective flow between inclined plates[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, **48**: 265-271.
- [29] RUTH D W. On the transition to transverse rolls in inclined infinite fluid layers-steady solutions[J]. *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 1980, **23**: 733-737.
- [30] RUTH D W, RAITHYBY G D, HOLLANDS K D T. On the secondary instability in inclined air layers[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, **96**: 481-492.
- [31] RUTH D W, RAITHYBY G D, HOLLANDS K D T. On free convection experiments in inclined air layers heated from below[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, **96**: 461-469.
- [32] DANIELS K E, BRAUSCH O, PESCH W, et al. Competition and bistability of ordered undulations and undulation chaos in inclined layer convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, **597**: 261-282.
- [33] BUSSE F H, CLEVER R M. Three-dimensional convection in an inclined layer heated from be-

low[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1992, **26**: 1-19.

Convection Patterns and Corresponding Critical Conditions in an Inclined Layer

NING Lizhong¹, WU Hao¹, NING Bibo²,
TIAN Weili³, NING Jinghao¹

(1. *Institute of Water Resources and Hydro-Electric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P.R.China;*

2. *College of Civil Engineering and Architecture, Jiaying University, Jiaying, Zhejiang 314001, P.R.China;*

3. *Department of Architecture, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China)*

Abstract: Through numerical simulation of the basic equations for 2D fluid mechanics, the convection patterns and the critical conditions for pattern transition in an inclined rectangular cavity with Prandtl number $Pr = 6.99$ were studied. According to the variations of inclination angle θ and relative Rayleigh number Ra_r , the convection patterns in the inclined layer can be divided into the convection single-roll pattern, the multi-roll pattern filling the cavity and the multi-roll pattern in the transitional stage. With constant inclination angle θ , the system transforms from the multi-roll pattern filling the cavity to the single-roll pattern with the decrease of relative Rayleigh number Ra_c , where the convection amplitude and Nusselt number Nu increase with Ra_c . For $Ra_r = 9$, the system transforms from the multi-roll pattern filling the cavity to the single-roll pattern with the increase of inclination angle θ , where the convection amplitude decreases with θ , and the Nusselt number increases with θ . The simulation results of the transition from multi-roll to single-roll patterns in plane $\theta_c - Ra_r$ show that, for $Ra_r = 2$, the multi-roll pattern is not found in the cavity. For $Ra_r = 2.5$ or so, the transition from the multi-roll pattern to the single-roll pattern appears in the cavity. The critical θ_c value for the transition from the multi-roll to the single-roll patterns increases with the decrease of Ra_r for $\theta_c < 10$. The θ_c value increases with Ra_r for $\theta_c > 10$, where θ_c increases rapidly with Ra_r for $Ra_r \leq 5$, and increases slowly with Ra_r for $Ra_r > 5$. The relation between θ_c and $Ra_{r,\theta}$ is similar to Ra_r .

Key words: inclined layer; convection pattern; Rayleigh number; critical inclination angle; streamline

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10872164)

引用本文/Cite this paper:

宁利中, 吴昊, 宁碧波, 田伟利, 宁景昊. 倾斜层中的对流斑图及其临界条件[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(4): 398-407.

NING Lizhong, WU Hao, NING Bibo, TIAN Weili, NING Jinghao. Convection patterns and corresponding critical conditions in an inclined layer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(4): 398-407.