

# 初封载荷下封隔器胶筒表面 自由变形特性分析\*

张付英, 李天天, 张玉飞

(天津科技大学 机械工程学院;  
天津市轻工与食品工程机械装备集成设计与在线监控重点实验室, 天津 300222)

**摘要:** 研究了封隔器胶筒在自由变形阶段受初封载荷作用下内、外表面发生位移变形的特性.依据连续介质力学理论,建立自由变形阶段的有限变形数学模型,给出了胶筒在初封轴向载荷下内、外表面径向变形的过程,得到胶筒非线性变形解析解.通过数值计算,在求解出胶筒外表面自由变形解析式的基础上,进一步分析了容易被忽略的胶筒内表面非线性变形规律和相关参数变化对其密封性能的影响.该变形特性分析可适用于不同型号的封隔器胶筒,为胶筒的密封和可靠性设计提供重要理论依据.

**关键词:** 封隔器胶筒; 初封载荷; 自由变形阶段; 表面位移变形; 解析解

**中图分类号:** O33; TE931

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.390096

## 引 言

胶筒是封隔器在油气井下唯一起密封和承载作用的零部件<sup>[1-2]</sup>,通过径向膨胀在胶筒与套管壁间产生接触压力,从而达到密封油井内环空位置和隔离钻采产层的目的<sup>[3]</sup>.因此,当胶筒受初封载荷作用时,其有限变形的力学性能也决定着封隔器的密封能力,胶筒的密封性和可靠性对提高封隔的工作性能和保证分层开采工艺的有效实施具有重要作用.

胶筒一般由复合材料的橡胶材料制成,复合材料通常具有不均匀性、不连续性<sup>[4]</sup>、各向异性等特点.这些特点使其力学问题变得十分复杂.由于橡胶类复合材料的弹性模量较小,一般认为在小变形条件下(应变小于10%)可把橡胶材料视为均匀连续的各向同性材料<sup>[5-6]</sup>,并得到了氟胶、丁晴橡胶和氢化丁晴橡胶(HNBR)<sup>[7]</sup>等材料油侵前、后的耐温、耐压特性.同时,国内外诸多学者采用理论分析、数值模拟等方法对橡胶材料、结构设计以及压裂过程受力变形分析做了广泛和深入的研究<sup>[8-10]</sup>.Qamar等<sup>[11]</sup>对弹性体压缩膨胀行为进行试验数值研究,确定了弹性体不可压缩性的假设是合理的.张晓林等<sup>[12]</sup>利用有限元软件对胶筒与套管之间的接触压力分布进行了模拟分析.为了使研究结果更加准确,研究者研制了封隔器胶筒的试验装置,模拟了实验工况下胶筒受液压力作用下的密封性能<sup>[13-14]</sup>.高温高压复杂工况下,有限元模拟仿真的收敛性较差,推动了封隔器胶筒密封理论的进一步发展.理论研究时,按胶筒变形的先后顺

\* 收稿日期: 2018-03-29; 修订日期: 2018-09-20

基金项目: 天津市自然科学基金(17JCZDJC38800)

作者简介: 张付英(1965—),女,教授,博士(通讯作者. E-mail: zhufuying@tust.edu.cn);

李天天(1993—),女,硕士生(E-mail: litian1966@163.com).

序,一般将封隔器胶筒在坐封过程中的变形分为自由变形、约束变形和稳定变形三个阶段<sup>[15]</sup>,对胶筒进行变形力学分析,Stupkiewicz<sup>[16]</sup>利用 Reynolds(雷诺)方程对封闭的 O 形密封圈的变形进行边界限定,研究了弹性体往复密封的密封性和稳定性,姜向敏<sup>[17]</sup>在理论上给出了封隔器胶筒约束阶段和稳定阶段详细的推导过程,高爱玲等<sup>[18]</sup>研究了矩形橡胶受轴向载荷作用下外表面位移变形的解析过程,分析了参数变化对胶筒在约束变形阶段的密封影响,而李楠<sup>[19]</sup>和全少凯<sup>[20]</sup>建立了胶筒的有限元模型,重点研究了约束和稳定变形阶段不同载荷下胶筒与套管之间的接触应力大小和分布规律、胶筒压缩距的大小对胶筒密封性能的影响。

目前科研学者对影响封隔器胶筒密封性能不能忽视的自由变形阶段有限变形特性的研究还较少,对胶筒内表面受载荷作用下的变形特性更是不曾涉及,本文结合连续介质力学理论,引入物质空间、Euler(欧拉)空间以及对应的坐标系和物质点表示胶筒内、外表面变形前后的运动形式,结合微分平衡方程和超弹性 Mooney-Rivlin 材料本构模型,建立胶筒自由变形阶段的有限变形数学模型,简称为自由变形数学模型,在研究得出胶筒外表面受力变形特性的基础上进一步得出胶筒内表面受轴向载荷作用下的非线性变形解析解,讨论了胶筒内、外表面的受力变形规律和相关参数变化对其密封性能的影响。

## 1 胶筒工作原理

某型号的压裂用压缩式封隔器,如图 1 所示。

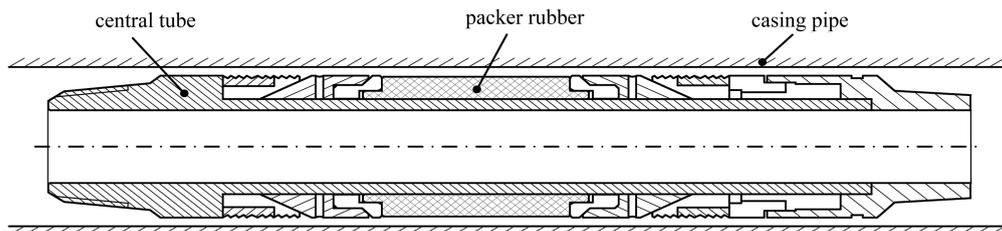


图 1 封隔器胶筒结构示意图

Fig.1 Schematic diagram of the packer rubber cylinder structure

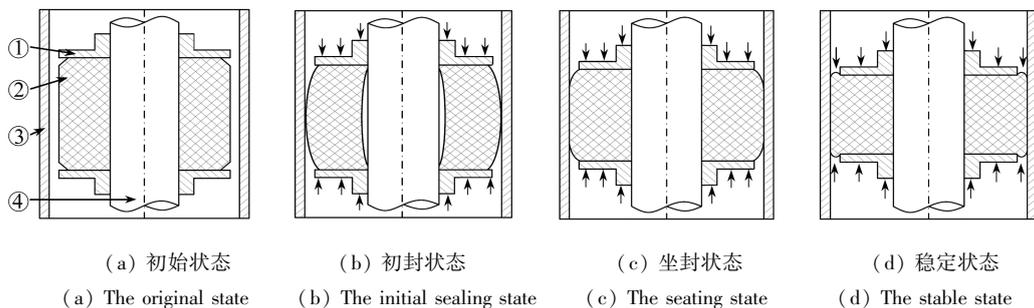


图 2 胶筒变形过程(密封原理)

Fig.2 The deformation process of the rubber cylinder(sealing principle)

图 2 给出了胶筒变形过程,图中①表示防突结构,②表示胶筒,③表示套管,④表示中心管。它的密封元件胶筒与中心管无间隙相连,与套管之间存在环空间隙,如图 2(a)所示,此时胶筒处于无压缩状态;初封时,胶筒承受由液压力产生的轴向载荷  $F_0$ 。发生径向位移,随着液压力的增大,胶筒内、外表面同时发生不同程度的位移变形,假设胶筒材料的 Poisson(泊松)比无限接近 0.5,即压力作用下胶筒的体积不变,这样胶筒就会因轴向力作用产生径向膨胀,膨胀后

其外表面刚好与套管的内壁接触且认为它们之间无压力,胶筒内表面和外表面同时发生不同程度的位移变形,这个过程即为自由变形过程,如图 2(b)所示;在坐封力  $F_n$  ( $F_n > F_0$ ) 作用下,胶筒轴向进一步受到压缩,胶筒的内径与中心管接触,外径完全和套管壁接触,径向变形受到约束,胶筒与套管之间的密封面上的接触应力大于压力差,实现坐封,如图 2(c)所示;在工作压差作用下,胶筒的径向变形约束进一步加大了胶筒与套管间的接触应力,轴向压缩量达到最大值,达到完全密封状态,也就是稳定变形阶段,如图 2(d)所示.本文主要研究胶筒从初始安装到初封状态的自由变形过程(图 2(a)~(b)的变形过程).

## 2 自由变形数学模型

### 2.1 胶筒结构及其坐标系建立

本文以 HNBR 组成的胶筒为研究对象,采用 Mooney-Rivlin 本构模型来描述胶筒材料的应力-应变关系,并建立胶筒的结构参数及基本柱坐标系(如图 3 所示),用来刻画受初封载荷作用的自由变形阶段胶筒的有限变形情况.已知胶筒的内半径和中心管半径相同,记为  $R_0$ ,胶筒的外半径为  $R_1$ ,筒高  $H = 2h$ ,套管的内径为  $R_{0\sigma}$ ,初封载荷为  $F_0$ ,胶筒中心轴线同  $Z$  轴重合,原点在胶筒筒高的中点.

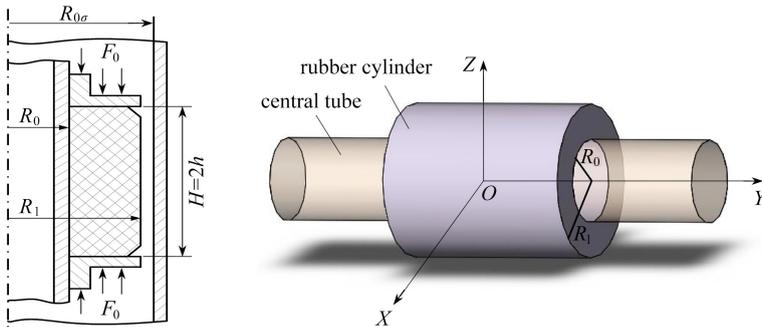


图 3 胶筒的结构参数及坐标模型

Fig. 3 Structure parameters and the coordinate model of the packer rubber

### 2.2 数学模型

由加载方式和结构的对称性可知,胶筒的变形关于中心管对称,胶筒在轴向载荷作用下,连续改变其位形,利用非线性连续介质力学理论推导了胶筒有限变形问题的 Euler 控制方程组和边界条件,从而建立了胶筒在自由变形阶段下有限变形的数学模型.表 1 给出了 Euler 空间下建立胶筒数学模型的相关参数,胶筒自由变形特性数学模型求解过程如图 4 所示.

表 1 Euler 空间下胶筒自由变形参数

Table 1 Parameters of the packer rubber in the Euler space

description	undeformed	after free deformation
displacement point vector	$P(R, \Theta, Z)$	$Q(r, \theta, z)$
matter point coordinates	Lagrangian coordinates	Eulerian coordinates
configuration	reference configuration $D_0$	deformed configuration $D$
configuration range	$D_0 = \{ (R, \Theta, Z), R_0 < R \leq R_{0\sigma}, 0 < \Theta \leq \pi, -h < Z \leq h \}$	$D = \{ (r, \theta, z), r = r(R, Z), \theta = \Theta, z = z(R, Z) \}$
standard orthonormal basis	$E_R, E_\Theta, E_Z$	$e_r, e_\theta, e_z$
packer rubber radius	$R_0, R_1$	$r_0, r_1$

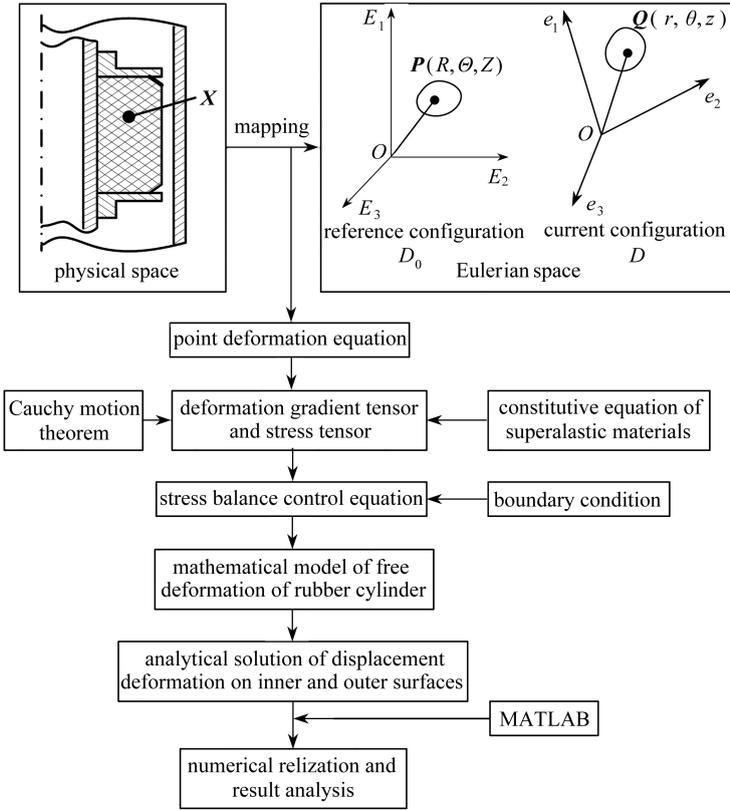


图4 数学模型求解流程图

Fig. 4 The flow chart of solution with the mathematical model

轴对称有限变形下,胶筒结构的变形模式为

$$r = r(R, Z), \theta = \Theta, z = z(R, Z), \quad (1)$$

其中  $r(R, Z)$  表示变形后胶筒的半径,  $z$  是待求的变形函数.由文献[21]及弹性力学的非线性理论<sup>[22]</sup>和方程(1)可得

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}_i \otimes \mathbf{P}^i = r_R \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R + r_Z \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_Z + \frac{r}{R} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\theta + z_R \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_R + z_Z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z, \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = (r_R^2 + r_Z^2) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + (r_R z_R + r_Z z_Z) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + (z_R^2 + z_Z^2) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

式中  $\mathbf{F}$  为封隔器胶筒发生有限变形时的变形梯度张量,  $\mathbf{B}$  为左 Cauchy-Green 变形张量,  $r, \theta, z$  的下标表示对其求偏导,如  $r_R = \partial r / \partial R$ .

由于封隔器密封胶筒材料为超弹性不可压缩 Mooney-Rivlin 材料,从连续介质力学的唯象理论观点出发,考虑其有限变形问题,其应变密度函数为

$$W = \frac{\mu_1}{2}(I_1 - 3) + \frac{\mu_2}{2}(I_2 - 3), \quad (4)$$

式中  $\mu_1, \mu_2$  表示材料常数,  $I_1, I_2$  为左 Cauchy-Green 变形张量  $\mathbf{B}$  的第一和第二主不变量.

不可压缩 Mooney-Rivlin 材料的 Cauchy 应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  和 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\mathbf{S}$  分别为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{B} + \beta_{-1}\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{S} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad (5)$$

式中  $p = p(R, Z)$  为静压力,  $\mathbf{I}$  为单位张量,  $J = 1, \beta_j = \beta_j(I_1, I_2, I_3), j = 0, 1, -1$ .

由于胶筒在变形过程中始终轴对称, 忽略体积力的作用时, 密封胶筒自由变形阶段静力学平衡微分方程可化简为

$$\frac{\partial S_{rR}}{\partial R} + \frac{\partial S_{rZ}}{\partial Z} + \frac{\partial S_{rR} - \partial S_{\theta\theta}}{R} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_{zR}}{\partial R} + \frac{\partial S_{zZ}}{\partial Z} + \frac{\partial S_{zR}}{R} = 0, \quad (7)$$

式中  $S_{rR}, S_{rZ}$  等为 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\mathbf{S}$  的分量.

### 2.3 边界条件

1) 变形前封隔器密封胶筒的内、外表面无约束, 即

$$S_{rR}(R_0) = 0, S_{rR}(R_{0\sigma}) = 0, S_{zR}(R_0) = 0, S_{zR}(R_{0\sigma}) = 0. \quad (8)$$

2) 变形过程中胶筒端部不发生侧向位移, 即

$$r(R, -h) = r(R, h) = R. \quad (9)$$

3) 初封载荷  $F_0$  作用在胶筒的两端, 因此端部满足应力边界条件:

$$\int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{R_1} [\sigma_{ZZ}]_{Z=\pm h} R dR d\Theta = F_0 \pi (R_1^2 - R_0^2). \quad (10)$$

综上所述, 以上方程及边界条件构成了自由变形阶段胶筒受轴向载荷作用下表面发生位移变形的数学模型.

## 3 胶筒表面位移方程的求解

假定胶筒两端与支撑环固定, 在均匀轴向压缩载荷作用下发生有限变形, 且变形过程中胶筒每个横截面始终是平面且垂直于  $Z$  轴<sup>[21]</sup>, 即

$$z(R, Z) = \tilde{z}(Z). \quad (11)$$

分析胶筒轴向压缩自由变形问题时, 结合封隔器胶筒端部受力不发生侧向位移的边界条件, 胶筒的自由变形阶段有限变形过程可分为两步: 第一步, 胶筒内半径大小保持不变, 胶筒外表面膨胀; 第二步, 胶筒外径刚好与套管接触, 外径不变, 而内表面发生位移变化<sup>[23]</sup>.

### 3.1 胶筒外表面位移变形解析式

当内半径保持不变时, 则有

$$r(R_0, Z) = R_0, \quad -h \leq Z \leq h. \quad (12)$$

由各向同性不可压缩超弹性材料条件  $I_3 = 1$ , 得

$$r(R, Z) = \lambda^{-1/2} (R^2 + C)^{1/2}, \quad (13)$$

其中  $\lambda = z_z(Z), C = (\lambda - 1)R_0^2$ , 这里的下标  $Z$  表示求导, 以下同理.

结合 Cauchy 应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  并将 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\mathbf{S}$  各个分量代入式(6), 然后关于  $R$  积分, 结合边界条件(10) 可得  $p = p(R, Z)$  的具体表达式.

将式(7)两端乘  $R$ , 然后关于  $R$  从  $R_0$  到  $R_1$  求定积分, 利用边界条件(8)求得

$$\left( \int_{R_0}^{R_1} S_{zZ} R dR \right)_Z = 0. \quad (14)$$

为研究方便引入无量纲记号:

$$\alpha = \frac{R_0}{h}, \delta = \frac{R_1}{R_0}, G = \frac{Z}{kh}, g = \frac{z}{kh}, \mu^* = \frac{\mu_2}{\mu_1}, Q = \frac{F_0(\delta^2 - 1)}{2\mu_1}, A_2^* = \frac{A_2}{\mu_1 R_0^2}, \quad (15)$$

其中  $\alpha$  为胶筒内半径与轴向高度之比,  $\delta$  为胶筒外半径与内半径之比,  $G$  为无量纲变形前的点,  $g$  为无量纲后的待求变形函数,  $Q$  为无量纲载荷,  $\mu^*$  为 Mooney-Rivlin 材料常数之比,  $A_2^*$  为无量纲积分常数, 此时轴向压缩率  $\lambda = dg/dG$ .

对式(14)关于  $Z$  积分, 并利用边界条件(8) 可得一表达式, 然后左右同乘  $\lambda_z$ , 关于  $Z$  积分后引入无量纲表达式(15)化简可得

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2(\delta^2 - 1)}{4} - \frac{\alpha^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)^2}{32 \lambda^3 k^2} + \frac{1}{4 \lambda} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda \delta^2} - \\ & \frac{\alpha^2 \lambda_c^2}{16 \lambda k^2} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + \frac{\alpha^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)}{16 \lambda^2 k^2} + \frac{\delta^2 - 1}{2 \lambda} - \frac{1}{4} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + \\ & \mu^* \left[ -\frac{\lambda}{2} \ln \delta + \frac{\lambda^2}{2} \ln \delta^2 - \frac{\alpha^2 \lambda_c^2}{8 \lambda^4 k^2} \ln \delta - \frac{\lambda(\delta^2 - 1)}{2} + \frac{\alpha^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)}{16 \lambda^4 k^2} - \right. \\ & \left. \frac{\alpha^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)^2}{32 k^2} + \frac{\delta^2 - 1}{4 \lambda^2} - \frac{\lambda^2}{4} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} \right] = \\ & Q \lambda + A_2^*. \end{aligned} \quad (16)$$

进而整理可得

$$\pm \alpha \lambda_c \left( \frac{N_0(\lambda(G), \delta, \mu^*, Q)}{M_0(\lambda(G), \delta, \mu^*, Q)} \right)^{1/2} = 1, \quad (17)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} & N_0 = \lambda(\delta^2 - 1)^2 - 2\lambda^2(\delta^2 - 1) + 2\lambda^3 \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + \\ & \quad \mu^* [4 \ln \delta + (\delta^2 - 1)^2 - 2(\delta^2 - 1)], \\ & M_0 = k^2 \left[ 8\lambda^3 \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda \delta^2} - 8\lambda^4 \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + \right. \\ & \quad \left. (8\lambda^6 + 16\lambda^3)(\delta^2 - 1) - 32Q\lambda^5 - 32A_2^* \lambda^4 \right] + \\ & \quad \mu^* \left[ 16\lambda^6 \ln \delta - 16\lambda^5 \ln \delta + 16\lambda^5(\delta^2 - 1) - 8\lambda^6 \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + \right. \\ & \quad \left. 8\lambda^5 \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda}{\lambda} + 8\lambda^2(\delta^2 - 1) \right]. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

本小节中考虑胶筒的变形问题不仅关于  $Z$  轴对称, 而且始终关于胶筒中截面  $Z = 0$  对称. 因此, 变形函数  $Z_z(Z)$  关于横截面  $Z = 0(G = 0)$  对称,  $\lambda(G)$  也关于  $Z = 0(G = 0)$  对称, 则  $\lambda(G)$  在  $G = 0$  取得极值, 那么  $\lambda$  对  $G$  求偏导, 满足  $\lambda_c = 0(G = 0)$ , 因此求得式(16)中的积分常数:

$$\begin{aligned} A_2^* &= \frac{\lambda(0)^2(\delta^2 - 1)}{4} + \frac{1}{4\lambda(0)} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda(0)}{\lambda(0)\delta^2} + \frac{\delta^2 - 1}{2\lambda(0)} - \frac{1}{4} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda(0)}{\lambda(0)} + \\ & \mu^* \left[ -\frac{\lambda(0)}{2} \ln \delta + \frac{\lambda(0)^2}{2} \ln \delta - \frac{\lambda(0)}{2}(\delta^2 - 1) + \frac{\delta^2 - 1}{4\lambda(0)^2} - \right. \\ & \left. \frac{\lambda(0)^2}{4} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda(0)}{\lambda(0)} + \frac{\lambda(0)}{4} \ln \frac{\delta^2 - 1 + \lambda(0)}{\lambda(0)} \right] - Q\lambda(0). \end{aligned} \quad (19)$$

进而求得各向同性不可压缩 Mooney-Rivlin 材料模型下胶筒变形的隐式解析解为

$$\alpha \int_{\lambda(G)}^1 (N_0/M_0)^{1/2} d\lambda(w) = 1 - G, \quad 0 \leq G \leq 1, \quad (20)$$

$$-\alpha \int_{\lambda(G)}^1 (N_0/M_0)^{1/2} d\lambda(w) = -1 - G, \quad -1 \leq G \leq 0, \quad (21)$$

其中  $N_0, M_0$  都是关于  $\lambda(G), \delta, \mu^*, Q$  的函数.

### 3.2 胶筒内表面位移变形解析式

当胶筒外半径保持不变时,则有

$$r(R_1, Z) = R_1, \quad -h \leq Z \leq h. \quad (22)$$

结合式(9)、(13)得出

$$C = (\lambda - 1)R_1^2, \quad (23)$$

$$C_z = \lambda_z R_1^2, \quad C_{zz} = \lambda_{zz} R_1^2. \quad (24)$$

结合式(15),引入无量纲记号

$$\beta = R_1/h, \quad (25)$$

其中  $\beta$  为胶筒外半径与轴向高度之比.

计算过程同胶筒外表面位移变形解析式的求解过程,引入无量纲量  $\beta$  化简后可得

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2(\delta^2 - 1)}{4} - \frac{\beta^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)^2}{32\lambda^3 k^2 \delta^2} + \frac{\beta^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)}{8\lambda^2 k^2} + \\ & \frac{\beta^2 \lambda_c^2 (\lambda \delta^2 - \delta^2 - 1)}{16\lambda^2 k^2} \ln \frac{\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda \delta^2} - \frac{1}{2\lambda} \ln \delta - \frac{1}{4\lambda} \ln \frac{\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda \delta^2} + \\ & \frac{\delta^2 - 1}{4\lambda} + \frac{\delta^2 - 1}{8\lambda^2} + \mu^* \left[ \frac{\lambda}{2} \ln \delta + \frac{(\lambda_2 - 2\lambda)}{2} \ln \delta - \right. \\ & \left. \frac{\beta^2 \lambda_c^2}{8\lambda^4 k^2} \ln \delta + \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda \delta^2} - \frac{\beta^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)^2}{32\lambda^4 k^2 \delta^2} + \frac{(\delta^2 - 1)}{4\lambda^2} + \right. \\ & \left. \frac{\lambda(\delta^2 - 1)}{4} + \frac{\delta^2 - 1}{4} \ln \lambda + \frac{\beta^2 \lambda_c^2 (\delta^2 - 1)}{16\lambda^4 k^2} \right] = Q\lambda + A_3^*. \quad (26) \end{aligned}$$

进而整理可得

$$\pm \beta \lambda_c \left( \frac{N_1(\lambda(G), \delta, \mu^*, Q)}{M_1(\lambda(G), \delta, \mu^*, Q)} \right)^{1/2} = 1, \quad (27)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} & N_1 = \lambda(\delta^2 - 1)^2 + 2\lambda^2(\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1) \ln \frac{\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda \delta^2} - \\ & \quad 4\lambda^2(\delta^2 - 1) + \mu^* [4\delta^2 \ln \delta - (\delta^4 - 1)], \\ & M_1 = \left[ 8\lambda^6 \delta^2 (\delta^2 - 1) + 8\lambda^3 \delta^2 (\delta^2 - 1) - 16\lambda^3 \delta^2 \ln \delta^2 - \right. \\ & \quad \left. 8\lambda^3 \delta^2 \ln \frac{\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda \delta^2} + 4\lambda^2 \delta^2 (\delta^2 - 1) - 32k^2 \lambda^5 \delta^2 Q - 32\lambda^4 \delta^2 A_3^* \right] k^2 + \\ & \quad \mu^* k^2 \left[ 16\lambda^5 \delta^2 \ln \delta + 16\lambda^5 \ln \delta + 8\lambda^5 \delta^2 (\delta^2 - 1) + 8\lambda^2 \delta^2 (\delta^2 - 1) + \right. \\ & \quad \left. 16(\lambda^6 - 2\lambda^5) \delta^4 \ln \delta + 8\lambda^2 \delta^2 (\delta^2 - 1) + 8\lambda^4 \delta^2 (\delta^2 - 1) + \right. \\ & \quad \left. 8\lambda^5 \delta^2 \ln \frac{\lambda \delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda \delta^2} \right], \quad (28) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
A_3^* &= \frac{\lambda(0)^2(\delta^2 - 1)}{4} - \frac{1}{2\lambda(0)} \ln \delta + \frac{\delta^2 - 1}{4\lambda(0)} + \frac{\delta^2 - 1}{8\lambda(0)^2} - \\
&\quad \frac{1}{4\lambda(0)} \ln \frac{\lambda(0)\delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda(0)\delta^2} + \\
\mu^* &\left[ \frac{\lambda(0)}{2} \ln \delta + \frac{\delta^2 - 1}{4\lambda(0)} + \frac{\lambda(0)}{4} \ln \frac{\lambda(0)\delta^2 - \delta^2 + 1}{\lambda(0)\delta^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda(0)^2 - 2\lambda(0)}{2} \delta^2 \ln \delta + \frac{\lambda(0)}{4} (\delta^2 - 1) + \frac{\delta^2 - 1}{4} \ln \lambda(0) \right] - Q\lambda(0). \quad (29)
\end{aligned}$$

进而求得各向同性不可压缩 Mooney-Rivlin 材料模型下胶筒变形的隐式解析解为

$$\beta \int_{\lambda(G)}^1 (N_1/M_1)^{1/2} d\lambda(w) = 1 - G, \quad 0 \leq G \leq 1, \quad (30)$$

$$-\beta \int_{\lambda(G)}^1 (N_1/M_1)^{1/2} d\lambda(w) = -1 - G, \quad -1 \leq G \leq 0, \quad (31)$$

其中  $N_1, M_1$  都是关于  $\lambda(G), \delta, \mu^*, Q$  的函数.

### 3.3 某型号胶筒算例

研究封隔器胶筒自由变形阶段位移变形的过程中,主要在于位移变形公式的推导以及影响胶筒参数的选取.本文采用的某压裂用封隔器胶筒材料是 HNBR,结合其具体参数(如表 2 所示),对自由变形阶段封隔器胶筒的内、外表面有限变形进行数值求解.

表 2 封隔器胶筒的相关参数

Table 2 Related parameters of the packer rubber

parameter	description	numerical value
$R_0$ /mm	inner diameter of the rubber cartridge	42
$R_1$ /mm	outer diameter of the rubber cartridge	55.5
$T$ /mm	thickness of the rubber cartridge	13.5
$R_{0\sigma}$ /mm	radius of the casing tube	118.6
$H$ /mm	height of the rubber cartridge	100
$\mu_1$	shear modulus of HNBR under different hardnesses	0.769 14~2.418 9
$\mu_2$	shear modulus of HNBR under different hardnesses	0.019 9~1.209 4
$F_0$ /MPa	initial axial load	0.3~8

#### 3.3.1 胶筒外表面变形求解及讨论分析

结合胶筒在变形中的连续性以及式(17),通过 MATLAB 编程可求出  $A_2^*$  的值,然后绘制出胶筒的轴向压缩率和胶筒外表面轴向位移变化曲线.图 5~8 分别给出了内径与轴向高度比  $\alpha$ 、胶筒的径向厚度  $\delta$ 、材料剪切模量比  $\mu^*$  和无量纲载荷  $Q$  分别取不同值时对胶筒外表面位移变形的影响曲线图.图中虚线表示变形前胶筒的某一竖截面,  $g_1$  表示外表面变形函数,  $r(R_1)/R_1$  为胶筒径向无量纲长度.

由图 5 可知,当  $\delta, \mu^*, Q$  不变时,  $\alpha$  越小,胶筒两端沿轴向收缩越大,其外表面径向膨胀变形也越大.由无量纲化可知  $\alpha = R_0/h$ ,内半径  $R_0$  不变时,  $\alpha$  可用来刻画胶筒的高度.因此,胶筒轴向高度越高,其外表面位移变形越大.由图 6 可知,当  $\alpha, Q, \mu^*$  一定时,  $\delta$  的值越小,胶筒两端沿轴向收缩越大,其外表面沿径向膨胀变形越大.由于  $\delta = R_1/R_0$ ,内半径  $R_0$  不变,故胶筒的径向厚度相对越小,其变形就越大.图 7 为 HNBR 不同硬度下的剪切模量比  $\mu^*$  对胶筒外表面变形的影响情况.  $\mu^*$  的值越小,表明胶筒 HNBR 材料的硬度越小,胶筒的外表面沿径向膨胀变形越

大.由图 8 可知,给定  $\alpha, \delta, \mu^*$ , 随着  $Q$  值的不断增大,即随着初封载荷  $F_0$  不断增大,胶筒两端沿轴向压缩越来越大,其外表面沿径向膨胀变形也越大.油气井复杂工况下,胶筒的材料特性及结构与其他橡胶零件存在较大差异,致使胶筒内径与轴向高度比  $\alpha$ 、胶筒径向厚度  $\delta$ 、材料剪切模量比  $\mu^*$  以及无量纲载荷  $Q$  等参数的数值分析结果无法与现有变形理论或试验结果进行定量比较.因此,数值分析结果的有效性有待后续封隔器胶筒试验进行进一步验证.

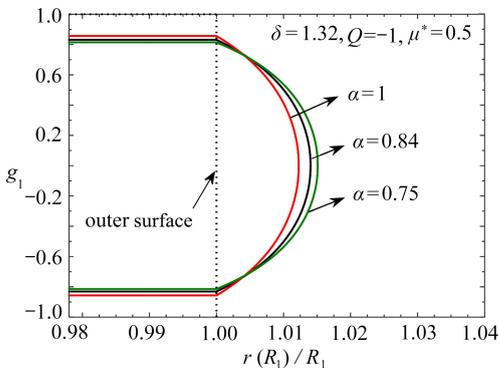


图 5  $\alpha$  取不同值时,胶筒外表面变形曲线

Fig. 5 Deformation curves of the outer surface of the packer rubber for different values of  $\alpha$

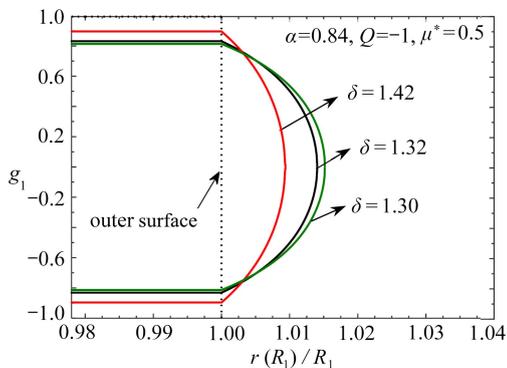


图 6  $\delta$  取不同值时,胶筒外表面变形曲线

Fig. 6 Deformation curves of the outer surface of the packer rubber for different values of  $\delta$

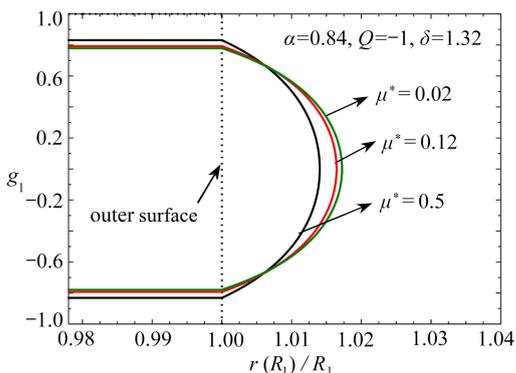


图 7  $\mu^*$  取不同值时,胶筒外表面变形曲线

Fig. 7 Deformation curves of the outer surface of the packer rubber for different values of  $\mu^*$

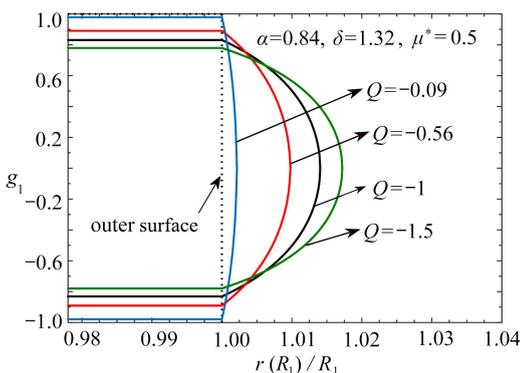


图 8  $Q$  取不同值时,胶筒外表面变形曲线

Fig. 8 Deformation curves of the outer surface of the packer rubber for different values of  $Q$

由图 9 可知,胶筒外表面在自由变形阶段受初封载荷作用时,不同参数下胶筒的轴向压缩率在中截面处最小( $\lambda$  的范围为 0.792 4~0.895 9),而在端面最大(载荷力直接接触端面致使  $\lambda$  接近 1),因此轴向压缩率受参数  $\alpha, \delta, \mu^*$  和  $Q$  的影响.

### 3.3.2 胶筒内表面变形求解及讨论分析

结合胶筒表面变形连续性以及式(27),借助 MATLAB 编程可求出  $A_3^*$  的值,结合表 2 给出的相关参数,可以作出胶筒内表面轴向压缩率和轴向位移变化曲线.图 10~13 分别给出了外径与轴向高度比  $\beta$ 、胶筒径向厚度  $\delta$ 、材料剪切模量比  $\mu^*$  和无量纲载荷  $Q$  分别取不同值时对胶筒内表面位移变形的影响曲线图.图中虚线表示变形前胶筒某一竖截面,  $g_2$  为内表面变形函数,  $r(R_1)/R_1$  为胶筒径向无量纲长度.

由图 10 可知,给定  $\delta, \mu^*$  和  $Q$  时,  $\beta$  越小,胶筒两端沿轴向收缩越大,自由变形阶段其内表面径向膨胀变形也越大.因  $\beta = R_1/h$ , 外半径  $R_1$  不变时,  $\beta$  可用来刻画胶筒的高度.因此,胶筒轴

向高度越高,其内表面位移变形相对越大.图 11 中,给定 $\beta, Q, \mu^*$  时, $\delta$  值越小,胶筒两端沿轴向收缩越大,其内表面沿径向膨胀变形越大.因  $\delta = R_1/R_0$ , 内半径  $R_0$  不变,则可得出胶筒径向厚度相对越小,其内径变形越大的结论.

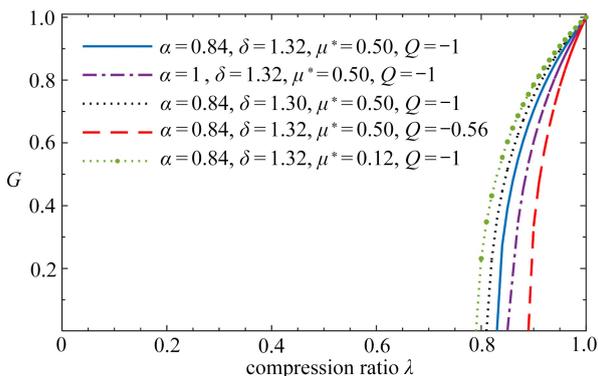


图 9 胶筒外表面轴向压缩率变化图

Fig. 9 The axial compression ratios on the outer surface of the packer rubber

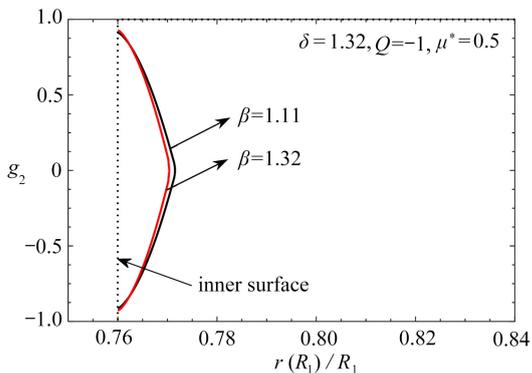


图 10  $\beta$  取不同值时,胶筒内表面位移变形曲线

Fig. 10 Deformation curves of the inner surface of the packer rubber for different values of  $\beta$

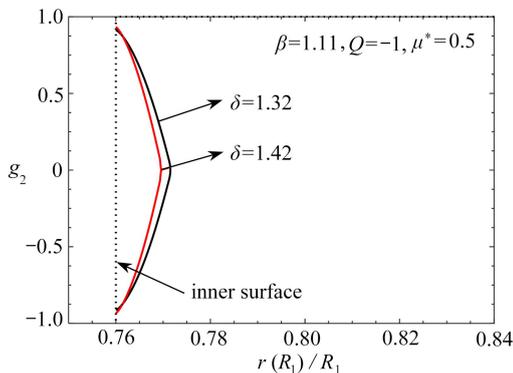


图 11  $\delta$  取不同值时,胶筒内表面位移变形曲线

Fig. 11 Deformation curves of the inner surface of the packer rubber for different values of  $\delta$

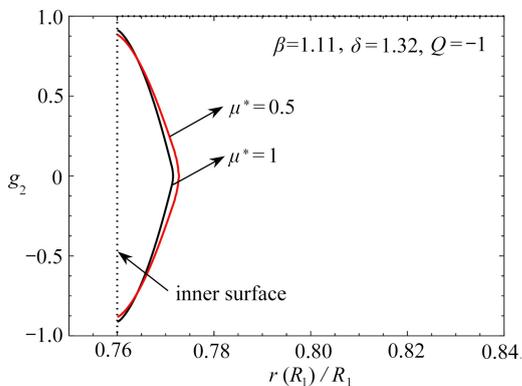


图 12  $\mu^*$  取不同值时,胶筒内表面位移变形曲线

Fig. 12 Deformation curves of the inner surface of the packer rubber for different values of  $\mu^*$

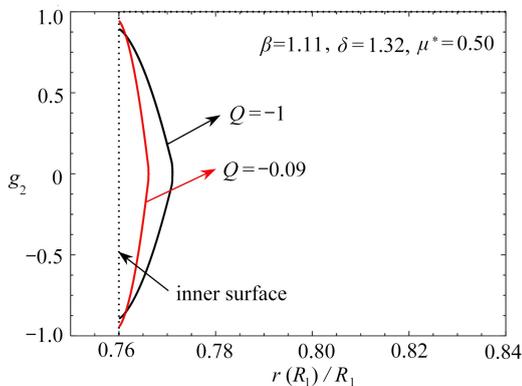


图 13  $Q$  取不同值时,胶筒内表面位移变形曲线

Fig. 13 Deformation curves of the inner surface of the packer rubber for different values of  $Q$

同理,由图 12 可知,胶筒采用的 HNBR 材料的硬度越小,  $\mu^*$  的值越小,相应地,其内表面沿径向膨胀变形越大.当  $Q$  取不同值时,由图 13 可知,当  $\beta, \delta, \mu^*$  一定时,随着  $Q$  值的不断增大,轴向载荷  $F_0$  在一定范围内也不断增大,胶筒两端沿轴向压缩越来越大,其内表面沿径向膨胀变形也随之增大.

由图 14 可知,不同参数模型胶筒轴向压缩率在中截面最小 ( $\lambda$  在 0.122 5~0.244 3 之间),而在两端面最大,轴向压缩率同样受  $\beta, \delta, \mu^*$  和  $Q$  影响.

### 3.3.3 胶筒的内、外表面综合数值分析

一般密封胶筒有限变形研究中只涉及胶筒外表面变形的数值求解,而忽略了在初始坐封时胶筒内表面也会受轴向载荷作用发生位移变形.而本文研究的自由变形阶段胶筒外表面受初封载荷作用发生变形的趋势与以往密封胶筒数值分析结果一致<sup>[24]</sup>.与此同时,还考虑了胶筒受力变形过程中因变形量较小容易被忽略的内表面的位移变形情况.

封隔器胶筒在自由变形阶段受轴向初封载荷作用,内、外表面同时发生位移变形,由内、外表面的位移变形解析式可以确定影响无量纲参数  $\alpha(\beta), \delta, \mu^*$  和  $Q$  的影响因素,同时计算可得相关参数变化时胶筒的位移变形量  $f$  和压缩率  $\lambda$  情况分别如表 3 和表 4 所示.

表 3 封隔器胶筒位移变形数值情况

Table 3 Numerical values of displacement and deformation of the packer rubber

parameter	influence factor	inner surface		outer surface	
		$f_{\min}$	$f_{\max}$	$f_{\min}$	$f_{\max}$
$\alpha$	axial height	-	-	0.012 3	0.015 1
$\beta$	axial height	0.010 4	0.011 5	-	-
$\delta$	radial thickness	0.009 6	0.011 5	0.009 4	0.015 2
$\mu^*$	hardness of HNBR	0.011 1	0.012 8	0.017 2	0.018 9
$Q$	axial load	0.006 1	0.011 8	0.009 8	0.022 2

表 4 封隔器胶筒中截面轴向压缩率数值情况

Table 4 Numerical values of axial compressibility of the middle section in the packer rubber

parameter	influence factor	axial compression ratio $\lambda$ of the middle section	
		inner surface	outer surface
$\alpha$	axial height	-	0.853 1
$\beta$	axial height	0.198 0	-
$\delta$	radial thickness	0.244 8	0.819 3
$\mu^*$	hardness of HNBR	0.122 5	0.792 4
$Q$	axial load	0.163 2	0.890 7

结合上小节求出的外表面和内表面的位移变形算例可知,胶筒的内、外表面受相同因素影响:胶筒轴向高度越高、径向厚度越小、轴向载荷越大、HNBR 材料硬度越小,胶筒位移变形越大.胶筒内表面位移与外表面位移变形趋势相似,但从表 3 的数据可以看出,内表面的最小和

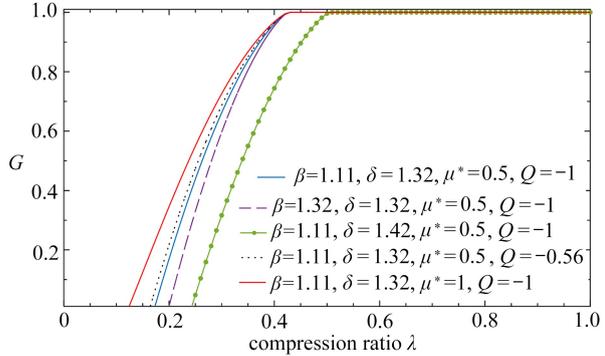


图 14 胶筒内表面轴向压缩率变化图

Fig. 14 The axial compression ratios of the inner surface of packer rubber

最大变形量均小于外表面,结合图 9~图 14 与表 4 数据可以明显看出,胶筒内表面轴向压缩率明显小于外表面,同时也证明了胶筒内表面位移变形相对较小,但是不容忽略。

## 4 结 论

本文研究了具有各向同性不可压缩 Mooney-Rivlin 材料组成的胶筒受轴向初封载荷作用下自由变形阶段的力学变形特性,采用参数化建模的思想,根据实际工况下胶筒轴向高度、径向厚度、轴向载荷、剪切模量对胶筒变形的影响,讨论了不同参数变化对胶筒变形以及轴向压缩率的影响规律,得出如下结论:

1) 在胶筒的自由变形阶段,分析了轴向高度、径向厚度、轴向载荷、剪切模量 4 个参数对轴向压缩率的影响,内、外表面轴向压缩率在胶筒的中截面处最小而在两端最大。

2) 胶筒轴向高度越高、径向厚度越小、轴向载荷越大、HNBR 材料硬度越小,胶筒位移变形越大。与胶筒的外表面变形相比,二者位移变形受影响的参数相同,变形趋势相似,但内表面受 4 个参数的影响相对较小。

3) 结合结论 1) 和 2) 可知,封隔器胶筒内、外表面自由特性中,内表面变形特性虽不如外表面变形特性明显,但也不容忽略。

4) 建立的封隔器胶筒变形数学模型及自由变形阶段受初封载荷作用下胶筒内、外表面力学特性不仅能够求解封隔器胶筒有限变形问题,还能够分析影响胶筒密封作用的各个参数的选取设计情况,该变形特性可为胶筒的优化设计提供有效的理论依据。

## 参考文献(References):

- [1] 张立新,沈泽俊,李益良,等.我国封隔器技术的发展与应用[J].石油机械,2007,35(8):58-60.(ZHANG Lixin, SHEN Zejun, LI Yiliang, et al. Development and application of homemade packers[J]. *China Petroleum Machinery*, 2007, 35(8): 58-60. (in Chinese))
- [2] 陈宁. Y241-114 封隔器研究与应用[J]. 钻采工艺,2003,26(1):50-51.(CHEN Ning. Research and application of Y241-114 packer[J]. *Drilling & Production Technology*, 2003, 26(1): 50-51. (in Chinese))
- [3] 张付英,姜向敏,孙宇佳,等.悬挂式封隔器密封胶筒的密封性能研究[J]. 润滑与密封,2016,41(12):62-67.(ZHANG Fuying, JIANG Xiangmin, SUN Yujia, et al. Research on sealing performances of suspension packer rubber tube[J]. *Lubrication Engineering*, 2016, 41(12): 62-67. (in Chinese))
- [4] MCLEAN D, READ B E. Storage and loss moduli in discontinuous composites[J]. *Journal of Materials Science*, 1975, 10(3): 481-492.
- [5] 徐慧,张彩莹,罗延生,等.海上漂浮输油软管拉伸与弯曲力学特性[J]. 油气储运,2012,31(4):279-282.(XU Hui, ZHANG Caiying, LUO Yansheng, et al. Analysis of tensile and bending mechanical properties of offshore floating oil hose[J]. *Oil & Gas Storage and Transportation*, 2012, 31(4): 279-282. (in Chinese))
- [6] QIU G Y, PENCE T J. Remarks on the behavior of simple directionally reinforced incompressible nonlinearly elastic solids[J]. *Journal of Elasticity*, 1997, 49(1): 1-30.
- [7] HU G, ZHANG P, WANG G, et al. The influence of rubber material on sealing performance of packing element in compression packer[J]. *Journal of Natural Gas Science & Engineering*, 2017, 38: 120-138.
- [8] MARZOCCA A J. Finite element analysis of cure in a rubber cylinder[J]. *Polymer*, 1991, 32

- (8): 1456-1460.
- [9] 雷震宇, 刘明. 具有随机参数的盾构管片弹性密封垫防水性能优化分析[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(8): 899-910.(LEI Zhenyu, LIU Ming. Waterproofness optimization for elastic rubber gaskets in shield tunnels with random parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 899-910.(in Chinese))
- [10] REESE S, WRIGGERS P. A material model for rubber-like polymers exhibiting plastic deformation; computational aspects and a comparison with experimental results [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1997, **148**(3/4): 279-298.
- [11] QAMAR S Z, AKHTAR M, PERVEZ T, et al. Mechanical and structural behavior of a swelling elastomer under compressive loading[J]. *Materials & Design*, 2013, **45**: 487-496.
- [12] 张晓林, 张棣, 武玉贵, 等. 封隔器胶筒结构优化及优化方法比较[J]. 石油机械, 2013, **41**(6): 101-105.(ZHANG Xiaolin, ZHANG Di, WU Yugui, et al. Structural optimization of packer rubber and optimization method comparison [J]. *China Petroleum Machinery*, 2013, **41**(6): 101-105.(in Chinese))
- [13] 岳澄, 王燕群. 高温封隔器胶筒与套管接触压力的实验研究[J]. 实验力学, 1999, **14**(3): 390-394.(YUE Cheng, WANG Yanqun. Experimental study on contact pressure between the sealing rubber of high temperature packer and casing pipe[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 1999, **14**(3): 390-394.(in Chinese))
- [14] 王凤清, 刘雯云, 马文衡, 等. 高温高压胶筒实验装置研究与应用[J]. 石油钻采工艺, 2011, **33**(5): 117-120.(WANG Fengqing, LIU Wenyun, MA Wenheng, et al. Research and application of high temperature and high pressure rubber tube experimental device [J]. *Oil Drilling & Production Technology*, 2011, **33**(5): 117-120.(in Chinese))
- [15] 王兴. 高温高压完井封隔器力学性能分析[D]. 硕士学位论文. 西安: 西安石油大学, 2013.(WANG Xing. Mechanical performance analysis of high temperature and high pressure completion packer[D]. Master Thesis. Xi'an: Xi'an Petroleum University, 2013.(in Chinese))
- [16] STUPKIEWICZ S. Finite element treatment of soft elastohydrodynamic lubrication problems in the finite deformation regime[J]. *Computational Mechanics*, 2009, **44**(5): 605-619.
- [17] 姜向敏. 压缩式密封胶筒密封性能及可靠性设计研究[D]. 硕士学位论文. 天津: 天津科技大学, 2017: 28-38.(JIANG Xiangmin. Research on sealing performance and reliability analysis for compression packer rubber tube [D]. Master Thesis. Tianjin: Tianjin University of Science and Technology, 2017: 28-38.(in Chinese))
- [18] 高爱玲, 张文正, 袁学刚. 轴向载荷作用下双矩形橡胶圈结构的有限变形分析[J]. 大连民族学院学报, 2013, **15**(3): 280-283.(GAO Ailing, ZHANG Wenzheng, YUAN Xuegang. Finite deformation analysis of double rectangular rubber ring under axial loads[J]. *Journal of Dalian Nationalities University*, 2013, **15**(3): 280-283.(in Chinese))
- [19] 李楠. 压缩式封隔器胶筒的密封性能研究[D]. 硕士学位论文. 大庆: 东北石油大学, 2012.(LI Nan. Seal performance research of the compressed sealing rubber of the packer [D]. Master Thesis. Daqing: Northeastern Petroleum University, 2012.(in Chinese))
- [20] 仝少凯. 压缩式封隔器胶筒力学性能分析[J]. 石油矿场机械, 2012, **41**(12): 1-7.(TONG Shaokai. With the analysis of the compression packer rubber mechanical properties[J]. *Oil Field Machinery*, 2012, **41**(12): 1-7.(in Chinese))
- [21] RIVLIN R S, SAUNDERS D W. Large elastic deformations of isotropic materials, VII: experiments on the deformation of rubber[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1995, **243**: 251-258.

- [22] 宋彦琦, 郝亮钧, 李向上. 基于 S-R 和分解定理的几何非线性问题的数值计算分析[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 1029-1040. (SONG Yanqi, HAO Liangjun, LI Xiangshang. Numerical analysis of geometrically nonlinear problems based on the S-R decomposition theorem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1029-1040. (in Chinese))
- [23] 宋晨颺, 王晓, 刘洋. 边界受限下的轴向压缩超弹性圆管的失稳分析[J]. 固体力学学报, 2018, **39**(2): 203-212. (SONG Chenyang, WANG Xiao, LIU Yang. Stability analysis of an axially compressed hyper-elastic tube with confined boundary[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2018, **39**(2): 203-212. (in Chinese))
- [24] 伍开松, 徐大萍, 严永发, 等. 橡胶大变形不可压缩方法试验数据处理[J]. 橡胶工业, 2013, **60**(7): 400-403. (WU Kaisong, XU Daping, YAN Yongfa, et al. Data processing method of rubber testing based on incompressible large deformation analysis[J]. *China Rubber Industry*, 2013, **60**(7): 400-403. (in Chinese))

## Analysis on Free Deformation Characteristics of Packer Rubber Surface Under the Initial Sealing Load

ZHANG Fuying, LI Tiantian, ZHANG Yufei

(College of Mechanical Engineering; Key Laboratory of Integrated Design and On-Line Monitoring for Light Industry and Food Machinery and Equipment in Tianjin, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, P.R.China)

**Abstract:** The displacement and deformation characteristics of the inner and outer surfaces of the packer rubber under the initial load in the free deformation stage were investigated. Based on the continuum mechanics, a finite-deformation mathematical model was established in the free deformation stage. The process of radial deformation of the inner and outer surfaces of the packer rubber under the initial axial load was given, and the analytical solution of the nonlinear deformation of the packer rubber was obtained. Through numerical calculation, based on the solution of analytical formulae for free deformation of the outer surface, the influences of the nonlinear deformation law and the relevant parameters on the sealing performance of the inner surface were further analyzed. The results of deformation characteristics can be applied to different types of packer rubbers, and provide an important theoretical basis for the sealing and reliability design of packer rubbers.

**Key words:** packer rubber; initial load; free deformation stage; surface displacement and deformation; analytical solution

引用本文/Cite this paper:

张付英, 李天天, 张玉飞. 初封载荷下封隔器胶筒表面自由变形特性分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(4): 419-432.

ZHANG Fuying, LI Tiantian, ZHANG Yufei. Analysis on free deformation characteristics of packer rubber surface under the initial sealing load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(4): 419-432.