文章编号:1000-0887(2019)01-0108-07

Hilbert 空间中求解分裂可行问题 CQ 算法的强收敛性*

赵世莲

(西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘要: 在 Hilbert 空间中,为了研究分裂可行问题迭代算法的强收敛性,提出了一种新的 CQ 算法.首先利用 CQ 算法构造了一个改进的 Halpern 迭代序列; 然后通过把分裂可行问题转化为算子不动点, 在较弱的条件下, 证明了该序列强收敛到分裂可行问题的一个解.推广了 Wang 和 Xu 的有关结果.

关 键 词: 分裂可行问题; 强收敛; CQ 算法; 改进的 Halpern 迭代

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A DOI: 10.21656/1000-0887.390012

引 言

最优化问题是应用数学的一个重要研究领域,它在金融决策、工程设计、经济管理、交通规划、国防科学等重要领域都有广泛的应用,人们对它的研究已经取得了许多重要的成果.其中分裂可行问题(SFP)是一类非常重要的最优化问题,它在医学、信号处理、图像重建都有着广泛的应用[1-4].1994 年,Censor 和 Elfving[5] 根据医学中有关强放射治疗的实践经验和理论最早提出了 SFP .它是这样一个问题:设 C,Q 分别是 Hilbert 空间 H_1,H_2 上的非空闭凸子集, $A:H_1\to H_2$ 是一个有界线性算子.SFP(见文献[5])就是要找一点 x ,满足

$$x \in C,\ Ax \in Q. \tag{1}$$

近年来,很多学者关注 SFP,并提出了许多算法(详见文献[6-9]).其中部分学者用多重投影的方法得到了求解该问题的迭代算法,但这些算法在迭代中需要计算矩阵的逆,而矩阵逆的计算需要花费大量的时间且不容易求解,从而影响算法的迭代效率.为了克服这一点,Byrne[10] 提出了解决分裂可行问题的 CQ 算法,其迭代公式为

$$x^{k+1} = P_C(I - \lambda A^*(I - P_Q)A)x^k, \qquad k \geq 0,$$

其中 $\lambda \in (0,2/\rho(A^*A))$,$\rho(A^*A)$ 是自伴算子 A^*A 的谱半径, P_C 表示到集合 C 的投影.

在 Hilbert 空间中,CQ 算法一般不具备强收敛性.2010 年,Xu[11] 利用 CQ 算法构造了平均算子的 Mann 迭代序列,但仅得到弱收敛性.此前,Xu[12] 应用 Halpern 迭代得到了强收敛性.之后,Wang 和 Xu[13] 利用一族压缩算子去逼近一个非扩张算子,构造了如下序列:

$$x^{k+1} = P_C[(1 - \alpha_k)P_C(I - \lambda A^*(I - P_Q)A)x^k],$$

* 收稿日期: 2018-01-08; 修订日期: 2018-03-26

基金项目: 国家自然科学基金(11371015)

作者简介: 赵世莲(1984—),女,讲师,硕士(E-mail: 14622959@qq.com).

且得到算法的强收敛.本文受文献[13]的启发,主要研究改进的 Halpern 迭代,提出了下列算法:对于任意的初始值 $u \in H_1$,定义迭代序列为

$$x^{k+1} = P_C[\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k P_C(I - \lambda A^*(I - P_Q)A)x^k],$$

其中系数 $\{\alpha_k\},\{\beta_k\},\{\gamma_k\} \subset (0,1)$,并证明了该算法的强收敛性,推广了 Wang 和 Xu 的结果.

1 预 备 知 识

本文中假设 SFP 是有解的,用 Γ 表示它的解集,即 $\Gamma = \{x \in C; Ax \in Q\} = C \cap A^{-1}(Q)$,设 H 是 Hilbert 空间,$\langle \cdot,\cdot \rangle$表示内积,$\|\cdot\|$表示对应的范数,$I$ 表示 Hilbert 空间上的单位算子,$\mathrm{Fix}(T) = \{x | x = T(x)\}$ 表示算子 T 的不动点集合.全文用“$\xrightarrow{w}$”表示弱收敛,“$\rightarrow$”表示强收敛.下面给出本文所用到的一些定义和引理.

定义 1 设 C 是 H 中的一个非空闭凸子集,令 $F: C \rightarrow H$ 为非线性算子,称

1) F 是非扩张算子,如果

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C; \tag{2}$$

2) F 是固定非扩张算子,如果

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leqslant \langle x - y, F(x) - F(y)\rangle, \quad \forall x, y \in C; \tag{3}$$

3) F 是 α- 平均算子,如果

$$F = (1 - \alpha)I + \alpha S, \tag{4}$$

其中 $\alpha \in (0,1)$,I 是单位算子,$S: H \rightarrow H$ 是非扩张算子.

定义 2 设 C 是 H 的非空闭凸子集,定义

$$P_C(x) = \arg\min_{y \in C} \|x - y\|$$

为 x 到 C 的正交投影.

关于正交投影,有如下性质.

引理 1 设 C 是 H 的一个非空闭凸子集,则对于任意的 $x, y \in H$,有

$$\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leqslant 0, \quad \forall z \in C; \tag{5}$$

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \langle x - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle; \tag{6}$$

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\|. \tag{7}$$

引理 2[14](demi-closed principle) 设 C 是 H 的一个非空闭凸子集,$T: C \rightarrow C$ 是一个非扩张映象,如果 $x_k \xrightarrow{w} x \in C$,并且 $x^k - Tx^k \rightarrow 0$,则 $x = T(x)$.

引理 3[15] 假设 $\{\alpha_k\}$ 是一个非负序列,满足

$$\alpha_{k+1} \leqslant (1 - \gamma_k)\alpha_k + \delta_k, \quad k \geqslant 0,$$

其中 $\{\gamma_k\} \subset (0,1)$,$\{\delta_k\}$ 满足下列条件:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$;

(ii) $\limsup_{k \rightarrow \infty}(\delta_k / \gamma_k) \leqslant 0$ 或者 $\sum_{k=0}^{\infty} |\delta_k| < \infty$,

则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$.

2 算法及收敛性

算法 1 设 C, Q 分别是 Hilbert 空间 H_1, H_2 上的非空闭凸子集,对任意选取的初始点 $x^0 \in$

H_1, 令 $x^0 = u$, 定义迭代序列 $\{x^k\}$ 为

$$x^{k+1} = P_C(\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k U x^k), \qquad k \geqslant 0, \tag{8}$$

其中 $U = I - \lambda A^*(I - P_Q)A$, 系数列 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\} \subset (0,1)$.

引理 4[9] 如果 $C \cap A^{-1}(Q) \neq \varnothing$,设 $T(x) = P_C U(x)$, 其中 $U = I - \lambda A^*(I - P_Q)A$, 那么

1) U 是平均算子,即 $U = (1-\beta)I + \beta V$, 其中 $\beta \in (0,1)$ 是一个常数, V 是非扩张映象.

2) $\mathrm{Fix}(U) = A^{-1}(Q)$,且 $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(P_C) \cap \mathrm{Fix}(U) = C \cap A^{-1}(Q)$.

引理 5 设 $U = I - \lambda A^*(I - P_Q)A$, 则 U 是非扩张映象.

证明 因为 U 平均算子,对于任意的 $x, y \in H_1$, 有

$$\begin{aligned}\|U(x) - U(y)\| &= \|(1-\beta)x + \beta V(x) - (1-\beta)y - \beta V(y)\| \leqslant \\ &(1-\beta)\|x - y\| + \beta\|V(x) - V(y)\| \leqslant \\ &(1-\beta)\|x - y\| + \beta\|x - y\| = \|x - y\|.\end{aligned}$$

所以 U 是非扩张映象.

定理 1 假设 SFP 的解集非空,非负序列 $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\} \subset (0,1)$ 且满足下列条件

(i) $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, \forall k \geqslant 0$;

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0,\ \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$;

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_{k+1} - \beta_k| < \infty$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\gamma_{k+1} - \gamma_k| < \infty$.

则由迭代序列(8)生成的序列 $\{x^k\}$ 强收敛到 $\tilde{x}$, 其中 $\tilde{x} = P_\Gamma(u)$.

证明 令 $T(x) = P_C U(x)$, 其中 $U = I - \lambda A^*(I - P_Q)A$.接下来分 5 步完成证明.

第 1 步 证明序列 $\{x^k\}$ 和 $\{Ux^k\}$ 是有界的.

对于任意的 $x^* \in \mathrm{Fix}(T) = C \cap A^{-1}(Q)$, 有 $x^* \in C$ 且 $Ax^* \in Q$, 于是 $P_C(x^*) = x^*, Ux^* = x^*, Tx^* = x^*$.由引理 5 知 U 是非扩张映象,即

$$\|U(x^k) - x^*\| \leqslant \|x^k - x^*\|,$$

从而

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^*\| &= \|P_C(\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k) - x^*\| \leqslant \\ &\|\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k - x^*\| \leqslant \\ &\alpha_k\|u - x^*\| + \beta_k\|x^k - x^*\| + \gamma_k\|Ux^k - x^*\| \leqslant \\ &\alpha_k\|u - x^*\| + \beta_k\|x^k - x^*\| + \gamma_k\|x^k - x^*\| \leqslant \\ &\alpha_k\|u - x^*\| + (1-\alpha_k)\|x^k - x^*\| \leqslant \\ &\max\{\|u - x^*\|, \|x^k - x^*\|\}.\end{aligned}$$

所以序列 $\{x^k\}$ 和 $\{Ux^k\}$ 是有界的.

第 2 步 证明 $\lim_{k\to\infty}\|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

$$\begin{aligned}\|x^{k+1} - x^k\| &= \|P_C(\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k) - P_C(\alpha_{k-1}u + \beta_{k-1}x^{k-1} + \gamma_{k-1}Ux^{k-1})\| \leqslant \\ &\|(\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k) - (\alpha_{k-1}u + \beta_{k-1}x^{k-1} + \gamma_{k-1}Ux^{k-1})\| \leqslant \\ &\|(\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k) - (\alpha_k u + \beta_k x^{k-1} + \gamma_k Ux^{k-1})\| + \\ &\|(\alpha_k u + \beta_k x^{k-1} + \gamma_k Ux^{k-1}) - (\alpha_{k-1}u + \beta_{k-1}x^{k-1} + \gamma_{k-1}Ux^{k-1})\| \leqslant \\ &\|\beta_k(x^k - x^{k-1}) + \gamma_k(Ux^k - Ux^{k-1})\| + \\ &\|(\alpha_k - \alpha_{k-1})u + (\beta_k - \beta_{k-1})x^{k-1} + (\gamma_k - \gamma_{k-1})Ux^{k-1}\|.\end{aligned}$$

由于 U 是非扩张映象,于是

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1}-x^k\| \leqslant (1-\alpha_k)\|x^k-x^{k-1}\| + |\alpha_k-\alpha_{k-1}|\|u\| + \\ &\quad |\beta_k-\beta_{k-1}|\|x^{k-1}\| + |\gamma_k-\gamma_{k-1}|\|Ux^{k-1}\|.\end{aligned}$$

由于前面所证序列 $\{x^k\}$ 和 $\{Ux^k\}$ 有界,令 $M=\sup_{k\geqslant 0}\{\|u\|,\|x^k\|,\|Ux^k\|\}>0$,从而

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1}-x^k\| \leqslant (1-\alpha_k)\|x^k-x^{k-1}\| + \\ &\quad M(|\alpha_k-\alpha_{k-1}|+|\beta_k-\beta_{k-1}|+|\gamma_k-\gamma_{k-1}|).\end{aligned}$$

由定理 1 的条件(ii)、(iii)和引理 3 得到

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{k+1}-x^k\|=0. \tag{9}$$

第 3 步 令 $Tx^k=P_CUx^k$,证明 $\lim_{k\to\infty}\|x^k-Tx^k\|=0$.

$$\begin{aligned}&\|x^k-Tx^k\| = \|x^k-P_CUx^k\| = \\ &\quad \|x^k-x^{k+1}+x^{k+1}-P_CUx^k\| \leqslant \\ &\quad \|x^k-x^{k+1}\| + \|x^{k+1}-P_CUx^k\| \leqslant \\ &\quad \|x^k-x^{k+1}\| + \|P_C[\alpha_ku+\beta_kx^k+\gamma_kUx^k]-P_CUx^k\| \leqslant \\ &\quad \|x^k-x^{k+1}\| + \|\alpha_ku+\beta_kx^k+\gamma_kUx^k-Ux^k\| \leqslant \\ &\quad \|x^k-x^{k+1}\| + \|\alpha_ku+\beta_kx^k\| + \|\gamma_k-1\|\|Ux^k\|.\end{aligned}$$

由第 1 步所证序列 $\{x^k\}$,$\{Ux^k\}$ 的有界性及定理 1 的条件(i)得

$$\|x^k-T(x^k)\| \leqslant \|x^k-x^{k+1}\| + 2(\alpha_k+\beta_k)M.$$

进一步,由式(9)及定理 1 的条件(ii)得

$$\lim_{k\to\infty}\|x^k-Tx^k\|=0. \tag{10}$$

第 4 步 设 $\tilde{x}=P_\Gamma(u)$,证明

$$\limsup_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x},Ux^k-\tilde{x}\rangle \leqslant 0. \tag{11}$$

由于

$$\langle u-\tilde{x},Ux^k-\tilde{x}\rangle = \langle u-\tilde{x},x^k-\tilde{x}\rangle + \langle u-\tilde{x},Ux^k-x^k\rangle,$$

先证明 $\limsup_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x},x^k-\tilde{x}\rangle \leqslant 0$,取 $\{x^k\}$ 的子列 $\{x^{k_i}\}$ 使得

$$\limsup_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x},x^k-\tilde{x}\rangle = \limsup_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x},x^{k_i}-\tilde{x}\rangle. \tag{12}$$

由于 $\{x^k\}$ 有界,不失一般性,假定 $\{x^{k_i}\}\xrightarrow{w}\hat{x}$,则由式(12)和引理 1,可得

$$\limsup_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x},x^k-\tilde{x}\rangle = \langle u-\tilde{x},\hat{x}-\tilde{x}\rangle \leqslant 0. \tag{13}$$

下面证明

$$\lim_{k\to\infty}\|Ux^k-x^k\|=0. \tag{14}$$

由引理 4 知 U 是平均算子,所以可以表示为 $U=(1-\beta)I+\beta V$,其中 $\beta\in(0,1)$,V 是非扩张映象,任取 $z\in \mathrm{Fix}(T)=\mathrm{Fix}(P_CU)$,有

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1}-z\|^2 = \|P_C[\alpha_ku+\beta_kx^k+\gamma_kUx^k]-z\|^2 \leqslant \\ &\quad \|\alpha_ku+\beta_kx^k+\gamma_kUx^k-z\|^2 \leqslant \\ &\quad \alpha_k\|u-z\|^2+\beta_k\|x^k-z\|^2+\gamma_k\|Ux^k-z\|^2 \leqslant \\ &\quad \beta_k\|x^k-z\|^2+\alpha_k\|u-z\|^2+\gamma_k\|(1-\beta)x^k+\beta Vx^k-z\|^2 \leqslant \\ &\quad \beta_k\|x^k-z\|^2+\alpha_k\|u-z\|^2+\gamma_k\|(1-\beta)(x^k-z)+\beta(Vx^k-z)\|^2 =\end{aligned}$$

$$\beta_k \| x^k - z \|^2 + \alpha_k \| u - z \|^2 +$$
$$\gamma_k [(1 - \beta) \| x^k - z \|^2 +$$
$$\beta \| Vx^k - z \|^2 - \beta(1 - \beta) \| Vx^k - x^k \|^2] \leqslant$$
$$\beta_k \| x^k - z \|^2 + \alpha_k \| u - z \|^2 + \gamma_k [(1 - \beta) \| x^k - z \|^2 + \beta \| x^k - z \|^2] -$$
$$\gamma_k \beta(1 - \beta) \| Vx^k - x^k \|^2 \leqslant$$
$$(\beta_k + \gamma_k) \| x^k - z \|^2 + \alpha_k \| u - z \|^2 - \gamma_k \beta(1 - \beta) \| Vx^k - x^k \|^2 \leqslant$$
$$\| x^k - z \|^2 + \alpha_k \| u - z \|^2 - \gamma_k \beta(1 - \beta) \| Vx^k - x^k \|^2.$$

由于 $\{x^k\}$ 有界,取正数 N 使得 $\| x^k - z \| < N$, 于是

$$\gamma_k \beta(1 - \beta) \| Vx^k - x^k \|^2 \leqslant \| x^k - z \|^2 - \| x^{k+1} - z \|^2 + \alpha_k \| u - z \|^2 =$$
$$(\| x^k - z \| - \| x^{k+1} - z \|)(\| x^k - z \| + \| x^{k+1} - z \|) + \alpha_k \| u - z \|^2 \leqslant$$
$$2N \| x^k - x^{k+1} \| + \alpha_k \| u - z \|^2.$$

结合定理 1 的条件(ii)和式(9)得

$$\beta(1 - \beta) \| Vx^k - x^k \|^2 \leqslant \frac{2N \| x^k - x^{k+1} \|}{\gamma_k} + \frac{\alpha_k \| u - z \|^2}{\gamma_k} \to 0. \tag{15}$$

又因为 $U = (1 - \beta) I + \beta V$, 所以上式说明式(14)成立 ,故式(11)成立.

第 5 步 证明 $\lim_{k\to\infty} \| x^{k+1} - \tilde{x} \| = 0$.

$$\| x^{k+1} - \tilde{x} \|^2 = \| P_C [\alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k] - \tilde{x} \|^2 \leqslant$$
$$\| \alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k Ux^k - \tilde{x} \|^2 \leqslant$$
$$\alpha_k \| u - \tilde{x} \|^2 + \beta_k \| x^k - \tilde{x} \|^2 + \gamma_k \| Ux^k - \tilde{x} \|^2 \leqslant$$
$$\beta_k \| x^k - \tilde{x} \|^2 + \| \alpha_k (u - \tilde{x}) + \gamma_k (Ux^k - \tilde{x}) \|^2 \leqslant$$
$$\beta_k \| x^k - \tilde{x} \|^2 + \alpha_k^2 \| u - \tilde{x} \|^2 +$$
$$\gamma_k^2 \| Ux^k - \tilde{x} \|^2 + 2\alpha_k \gamma_k \langle u - \tilde{x}, Ux^k - \tilde{x} \rangle \leqslant$$
$$\beta_k \| x^k - \tilde{x} \|^2 + \gamma_k \| Ux^k - \tilde{x} \|^2 +$$
$$\alpha_k [\alpha_k \| u - \tilde{x} \|^2 + 2\gamma_k \langle u - \tilde{x}, Ux^k - \tilde{x} \rangle] \leqslant$$
$$(1 - \alpha_k) \| x^k - \tilde{x} \|^2 + \alpha_k [\alpha_k \| u - \tilde{x} \|^2 + 2\gamma_k \langle u - \tilde{x}, Ux^k - \tilde{x} \rangle]. \tag{16}$$

式(16)即是

$$\| x^{k+1} - \tilde{x} \|^2 \leqslant (1 - \alpha_k) \| x^k - \tilde{x} \|^2 + \alpha_k \delta_k, \tag{17}$$

其中 $\delta_k = \alpha_k \| u - \tilde{x} \|^2 + 2\gamma_k \langle u - \tilde{x}, Ux^k - \tilde{x} \rangle$, 结合定理 1 的条件(ii)和式(11),得到 $\limsup_{k\to\infty} \delta_k \leqslant 0$.由引理 3 可得 $\lim_{k\to\infty} \| x^{k+1} - \tilde{x} \| = 0$, 故 $\{x^k\}$ 强收敛到 $\tilde{x}$.

定理 1 中取 $\beta_k = 0$ 和 $\alpha_k, \beta_k = 0$ 将得到如下两个推论.

推论 1 假设 SFP 的解集非空 ,对任意选取的初始点 $x^0 \in H_1$, 令 $x^0 = u$, 序列定义为

$$x^{k+1} = P_C [\alpha_k u + (1 - \alpha_k) U(x^k)], \tag{18}$$

其中 $\{\alpha_k\} \subset (0,1)$ 且满足下列条件:

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$;

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} | \alpha_{k+1} - \alpha_k | < \infty$.

则由迭代序列(18)生成的序列 $\{x^k\}$ 强收敛到 SFP 的解集.

推论 2　假设 SFP 的解集非空，对任意选取的初始点 $x^0 \in H_1$，序列定义为

$$x^{k+1} = P_C[(1-\alpha_k)U(x^k)], \tag{19}$$

其中 $\{\alpha_k\} \subset (0,1)$ 且满足下列条件：

(i) $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$；

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$；

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty$.

则由迭代序列(19)生成的序列 $\{x^k\}$ 强收敛到 SFP 的解集.

3　结　　论

在 Hilbert 空间中，求解分裂可行问题的 CQ 算法一般不具备强收敛性.为了得到其强收敛性，本文引入 3 个参数，利用改进的 Halpern 迭代，构造了求解分裂可行问题的新算法，并证明了在较弱的条件下该算法强收敛到分裂可行问题的一个解，推广了相关结果.

参考文献(References)：

[1] BYRNE C. A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction[J]. *Inverse Problems*, 2004, **20**(1): 103-120.

[2] CENSOR Y, ELFVING T, KOPF N, et al. The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems[J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**(6): 2017-2084.

[3] CENSOR Y, BORTFELD T, MARTIN B, et al. A unified approach for inversion problems intensity-modulated radiation therapy[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2006, **51**(10): 2353-2365.

[4] CENSOR Y, MOTOVA A, SEGAL A. Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **327**(2): 1244-1256.

[5] CENSOR Y, ELFVING T. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space[J]. *Numerical Algorithms*, 1994, **8**(2): 221-239.

[6] YANG Q Z. The relaxed CQ algorithm solving the split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2004, **20**(4): 1261-1266.

[7] QU B, XIU N H. A note on the CQ algorithm for the split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**(5): 1655-1665.

[8] DANG Y Z, GAO Y. The strong convergence of a KM-CQ-like algorithm for split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2011, **27**(1): 1-9.

[9] 杨丽, 李军. Hilbert 空间中分裂可行性问题的改进 Halpern 迭代和黏性逼近算法[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 1072-1080.(YANG Li, LI Jun. Modified Halpern iteration and viscosity approximation methods for split feasibility problems in Hilbert spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1072-1080.(in Chinese))

[10] BYRNE C. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2002, **18**(2): 441-453.

[11] XU H K. Iterative methods for the split feasibility problem in infinite-dimensional Hilbert spaces[J]. *Inverse Problems*, 2010, **26**(10): 1-17.

[12] XU H K. A variable Krasnosel'skii-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2006, **22**(6): 2021-2034.

[13] WANG F H, XU H K. Approximating curve and strong convergence of the CQ algorithm for the split feasibility problem[J]. *Journal of Inequalities and Application*, 2010, **2010**(1): 1-13.

[14] GOEBEL K, KIRK W A. *Topics in Metric Fixed Point Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[15] XU H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, **298**(1): 279-291.

Strong Convergence of CQ Algorithms for Split Feasibility Problems in the Hilbert Spaces

ZHAO Shilian

(*School of Mathematics and Information*, *China West Normal University*, *Nanchong*, *Sichuan* 637002, *P.R.China*)

Abstract: To study the strong convergence of split feasibility problems, a new CQ algorithm was proposed in the Hilbert spaces. Firstly, the modified Halpern iterative sequence was obtained with the CQ method. Furthermore, the split feasibility problem was transformed into the fixed point for operators, and it was proved that the sequence converges strongly to a solution of the split feasibility problem under some weak conditions. The findings generalize the corresponding results of Wang and Xu.

Key words: split feasibility problem; strong convergence; CQ method; modified Halpern iteration

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11371015)

引用本文/Cite this paper:

赵世莲. Hilbert 空间中求解分裂可行问题 CQ 算法的强收敛性[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(1): 108-114.

ZHAO Shilian. Strong convergence of CQ algorithms for split feasibility problems in the Hilbert spaces [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 108-114.