文章编号:1000-0887(2018)11-1300-13

非局部时滞反应扩散方程波前解的指数稳定性*

李盼晓

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

摘要: 该文考虑了一类具有非局部时滞反应项的空间非局部扩散模型, 主要研究其波前解的渐近稳定性及收敛率.通过构造加权函数,建立了相关线性方程的比较原理,证明了当初始扰动在加权最大范数意义下一致有界,满足初值问题的解将依时间指数收敛到波前解,而且得到其指数收敛率.

关 键 词: 行波解; 非局部时滞; 稳定性

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A DOI:10.21656/1000-0887.380336

引 言

在自然界中,许多现象都可以通过相应的反应扩散模型进行描述.近些年来,空间非局部微分方程广泛应用于生物学和传染病学等多个领域,并引起了许多学者的极大关注.目前,对于此类方程的研究已经获得了一些成果[1-6].在种群生物学中,由于种群的随机移动使得个体能够从各个可能的位置来到当前所处的位置,考虑到这一因素,Britton[7-8]首先提出用带有非局部时滞反应项的模型来描述这种现象.后来,Wang 等[6]为了研究种群动力学,建立了如下非局部时滞反应扩散方程:

$$u_t(x,t) = d\Delta u(x,t) + f\left(u(x,t),\ \int_{\mathbf{R}} k(y)u(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y\right),\quad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{1}$$

其中 $u(x,t)$ 表示 x 位置、t 时刻的种群密度,$d > 0$ 是扩散项系数,时滞 $\tau > 0$,$k(\cdot)$ 是非负核函数.在单稳的假设下,Wang 等[6]得到了模型(1)波前解的存在性,唯一性及渐近稳定性.在生物学领域,Laplace 算子通常用于描述种群个体在栖息区域内的局部迁移和扩散.实际上,许多种群个体在空间区域上却是广泛迁移和大范围扩散的.为了准确描述这一非局部扩散现象,一些研究者引入了积分形式的扩散项[9-13].特别地,Yu 和 Yuan[14]将非局部时滞的反应项引进非局部扩散模型:

$$u_t(x,t) = d[J * u - u](x,t) + f\left(u(x,t),\int_{\mathbf{R}} k(y)u(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y\right),\quad x \in \mathbf{R},\ t > 0, \tag{2}$$

* **收稿日期:** 2017-12-28; **修订日期:** 2018-02-02
基金项目: 国家自然科学基金(11671315)
作者简介: 李盼晓(1990—),女,硕士(E-mail: L2236135404@163.com).

其中 $d>0,\tau>0$ 是常数，

$$(J*u)(x,t):=\int_{\mathbf{R}}J(x-y)u(y,t)\mathrm{d}y.$$

最近，Guo 和 Zimmer[15] 将以上各个因素考虑在内，建立了如下非局部时滞反应扩散模型，并得到其波前解的存在性、渐近行为、唯一性及单调性结果：

$$u_t(x,t)=pu_{xx}(x,t)+d(J*u-u)(x,t)+f(u(x,t),(h**u)(x,t)),\quad x\in\mathbf{R},\tag{3}$$

其中 $p\geqslant 0,d\geqslant 0$，且 $J(\cdot),h(\cdot)$ 为非负核函数，

$$(h**u)(x,t):=\int_{-\infty}^{0}\int_{\mathbf{R}}h(x-y,t-s)u(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

该模型既含有局部 Laplace 扩散项又含有非局部扩散项，主要描述种群的扩散不仅依赖于空间位置 x 处、t 时刻的种群密度 $u(x,t)$，而且还依赖于整个空间中其他位置上的 u 值。反应项 $f(u,h**u)$ 通常用于描述种群个体的出生率和死亡率对种群密度的影响，$h**u$ 表示种群密度在过去时间和空间上的加权平均。

当 $h(x,t)=h(x)\delta(t-\tau)$，其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac δ 函数，方程(3)变为以下非局部时滞反应扩散方程：

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&pu_{xx}(x,t)+d(J*u-u)(x,t)+\\&f(u(x,t),(h*u)(x,t-\tau)),\qquad x\in\mathbf{R},\ d\geqslant 0,\ p\geqslant 0,\end{aligned}\tag{4}$$

其中

$$(h*u)(x,t):=\int_{\mathbf{R}}h(x-y)u(y,t)\mathrm{d}y.$$

模型(4)波前解的存在性、渐近行为和唯一性结果已经得到很好的研究[15]。然而在许多应用领域中，需要知道反应扩散方程的行波解在时间趋于无穷时的性态，即发展方程解的稳定性理论。因此，本文主要研究非局部时滞反应扩散方程(4)在单稳条件下，非临界波前解的指数稳定性。

首先假设非线性函数 $f(u,v)$ 和 $h(u)$ 满足以下条件：

(P1)　$f\in C([0,K]^2,\mathbf{R})$, $f(0,0)=f(K,K)=0$, $f(u,u)>0$, $\forall u\in(0,K)$，对任意的 $(u,v)\in[0,K]^2$，$\partial_2 f(u,v)\geqslant 0$，其中 K 是正常数。

(P2)　存在 $M>0$ 和 $\sigma\in(0,1]$，使得 $0\leqslant\partial_1 f(0,0)u+\partial_2 f(0,0)v-f(u,v)\leqslant M(u+v)^{1+\sigma}$, $\forall(u,v)\in[0,K]^2$，且 $\partial_1 f(K,K)+\partial_2(K,K)<0$。

(P3)　$J(\cdot),h(\cdot)$ 都是非负可积函数，且满足 $\int_{\mathbf{R}}J(x)\mathrm{d}x=1$, $\int_{\mathbf{R}}h(x)\mathrm{d}x=1$。

(P4)　存在某个 $\lambda_0>0$（可能等于无穷）使得对任意的 $\lambda\in[0,\lambda_0)$，有

$$\int_0^{\infty}J(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x<+\infty,\ \int_0^{\infty}h(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x<+\infty.$$

从条件(P1)可以看出，方程(4)有两个平衡点分别为 0 和 K。因此，结合条件(P1)和(P2)，可得

$$\partial_1 f(0,0)+\partial_2 f(0,0)\geqslant\frac{2}{K}f\left(\frac{K}{2},\frac{K}{2}\right)=\frac{2}{K}f\left(\frac{K}{2},h*\left(\frac{K}{2}\right)\right)>0.$$

于是 $u=0$ 是不稳定的，$u=K$ 是稳定的。本文不需要 $\partial_2 f(0,0)>0$。

反应扩散模型的稳定性理论在生物学[16-20]和传染病学[21-23]等多个领域都具有重要的作

用.到目前为止,反应扩散方程行波解的稳定性已经得到了广泛研究[6,16-20,23-26],但是对于非局部时滞反应扩散方程行波解稳定性的结果相对较少.Ma 和 Zhao[19]用挤压技术证明了单稳格微分方程行波解渐近稳定性,并且可以得到指数衰减率.Chen 和 Guo[24]通过对单稳拟线性方程建立挤压技术,得到波前解的渐近稳定性,但是却不能得到具体的收敛率.另外,Cheng 和 Yuan[16]通过构造合适的上下解结合比较原理和挤压技术,证明了具有非局部时滞反应扩散模型(2)的非临界波前解的渐近稳定性,然而该模型临界波前解的稳定性尚未得到.在生物学和传染病学中,临界行波解的稳定性对于研究生物入侵和疾病传播等问题非常重要.Guo 和 Zimmer[17]通过加权能量法和 Green 函数技巧,证明方程(1)相应空间离散模型波前解的全局指数稳定性,证明当波前解的初始扰动在负无穷远处衰减到零时,初值问题的解在 $c > c^*$ 条件下关于时间指数衰减收敛到波速为 c 的行波解,在 $c = c^*$ 条件下关于时间代数衰减收敛到波速为 c^* 的行波解.特别地,时滞对行波解的稳定性没有影响.此外, Mei 等[18]考虑具有年龄结构和空间扩散的单一物种的动力学行为, 研究了一类具有年龄结构的非局部时滞反应扩散模型行波解的稳定性, 主要通过加权能量法结合比较原理, 证明大初始扰动下行波解是全局渐近稳定性的.

值得说明的是,加权能量法结合比较原理可以证明大波速和小波速行波解的渐近稳定性结果,而且能得到具体的收敛速度,但是需要先对解进行加权 L^1,L^2 及 L^∞ 能量估计,这使得计算过程变的复杂.为了进一步将稳定性的结果精确化,Ouyang 等[20]和 Wang 等[25]利用权函数结合比较原理,分别证明了空间周期非局部时滞单种群模型和周期部分退化反应扩散系统行波解的指数渐近稳定性.随后,Wu 和 Chen[23]也用这种方法证明了非局部扩散传染病模型行波解的指数渐近稳定性.由此可知,权函数结合比较原理方法是证明行波解全局指数渐近稳定性的一个有效途径,相对于加权能量法和挤压技术,它在很大程度上简化了计算过程且能得到初值问题的解与行波解之间精确的衰减估计.那么此方法能否应用于模型(4)? 本文将对此问题给出一个肯定的答案.具体地说,本文通过特征值分析法,建立方程(4)相关线性系统的比较原理(后文中引理3),得到当初始函数 u^0 在加权范数的意义下趋于某一行波解 ϕ 时,满足此初值的解将指数收敛到它的行波解.

文章主体结构大体分为 5 个部分: 首先,给出一些基本知识和主要结论; 其次,通过主特征值分析的方法得出方程(4)线性初值问题的比较原理; 然后,通过权函数结合比较原理的方法证明方程(4)非临界波前解的指数渐近稳定性,并且得到指数收敛率; 第 4 节主要给出具体实例去验证所得的稳定性结果; 最后对全文工作进行总结.

1 主要结论

本文中将 $C > 0$ 记为一般常数,$C_i(i = 1,2,\cdots)$ 为特殊常数,令 I 是一个区间,特别地,取 $I = \mathbf{R}$.设 $T > 0$ 是一个实数且 B 为 Banach 空间.记 $C([0,T],B)$ 为$[0,T]$上的连续函数空间,$L^2([0,T],B)$ 表示$[0,T]$上的 L^2 函数空间.那么$[0,+\infty)$上相应的函数空间可以用类似的方法定义.

假设 $u(x,t) = \phi(x + ct)$ 为方程(4) 连接平衡点 0 和 K 的波前解, 其中 c 为波速, ϕ 为波廓.将 $u = \phi(\xi)$,$\xi = x + ct$ 代入方程(4)得到行波方程:

$$\begin{cases} -c\phi'(\xi) + p\phi''(\xi) + d(J * \phi - \phi)(\xi) + \\ \qquad f(\phi(\xi),(h * \phi)(\xi - c\tau)) = 0, & \xi \in \mathbf{R}, \\ \lim\limits_{\xi \to -\infty} \phi(\xi) = 0,\ \lim\limits_{\xi \to +\infty} \phi(\xi) = K, & 0 \leqslant \phi(\xi) \leqslant K, \forall \xi \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $(J*\phi)(\xi)=\int_{\mathbf{R}}J(y)\phi(\xi-y)\mathrm{d}y,\ (h*\phi)(\xi)=\int_{\mathbf{R}}h(y)\phi(\xi-y)\mathrm{d}y.$

定义

$$G_j(\xi)=\partial_j f\left(\phi(\xi),\int_{\mathbf{R}}h(y)\phi(\xi-y-c\tau)\mathrm{d}y\right),\qquad j=1,2,$$

$$B(\xi)=\int_{\mathbf{R}}h(y)G_2(\xi+y+c\tau)\mathrm{d}y,$$

显然, $B(\xi)$ 和 $G_j(\xi)$, $j=1,2$ 是非增的且满足

$$G_1(+\infty)=\partial_1 f(K,K),\ B(+\infty)=G_2(+\infty)=\partial_2 f(K,K).$$

对于 $\lambda\in\mathbf{C}$ 且 $\operatorname{Re}\lambda<\lambda_0$, 定义函数

$$H(\lambda)=\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y,\ G(\lambda)=\int_{\mathbf{R}}h(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y.$$

显然, $G(\lambda)$ 关于 $\lambda\in[0,\lambda_0)$ 是二阶可微的.因此

$$G(0)=\int_{\mathbf{R}}h(y)\mathrm{d}y=1,$$

$$G'(\lambda)=\int_0^{+\infty}yh(y)(\mathrm{e}^{\lambda y}-\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}y>0,\ G''(\lambda)=\int_0^{+\infty}y^2h(y)(\mathrm{e}^{\lambda y}+\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}y>0.$$

设

$$\Delta(c,\lambda)=c\lambda-p\lambda^2-d[H(\lambda)-1]-\partial_1 f(0,0)-\partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}G(\lambda),\tag{6}$$

$$\tilde{\Delta}(c,\lambda)=c\lambda+p\lambda^2+d[H(-\lambda)-1]+\partial_1 f(K,K)+\partial_2 f(K,K)\mathrm{e}^{\lambda c\tau}G(-\lambda),\tag{7}$$

对于 $c\in\mathbf{R}$, $\lambda\in\mathbf{C}$, 有 $c\geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda<\lambda^+$, 若 $\partial_2 f(0,0)>0$, 则 $\lambda^+=\lambda$; 若 $\partial_2 f(0,0)=0$, 则 $\lambda^+=+\infty$.

为了方便,记 $\lim_{\xi\to-\infty}\phi(\xi)=\phi(-\infty)$, $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi)=\phi(+\infty)$.根据文献[15]中有关行波解存在性的结果,可以得出以下结论.

定理1 假设条件(P1)、(P2)、(P3)和(P4)成立.存在最小波速 $c^*>0$,使得对任意 $c\geqslant c^*$,方程(4)有满足行波方程(5)的波前解 $\phi(x+ct)$.当 $c\in(0,c^*)$ 时,方程(4)不存在满足方程(5)的波前解.因此

1) 方程(5)的解 ϕ 关于变换是唯一的.

2) 方程(5)的每个解 ϕ 是严格单调的,即 $\phi'(\xi)>0$, $\xi\in\mathbf{R}$.

3) 方程(5)的每个解 ϕ 满足 $0<\phi(\xi)<K$, $\forall\xi\in\mathbf{R}$.

4) 方程(5)的任何解满足 $\lim_{\xi\to-\infty}(\phi'(\xi)/\phi(\xi))=\lambda$,其中 λ 是方程(8)的最小正根,

$$c\lambda-p\lambda^2-d[H(\lambda)-1]-\partial_1 f(0,0)-\partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}G(\lambda)=0,\tag{8}$$

其中 $\lambda\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda<\lambda_0$.

5) 方程(5)的任何解满足 $\lim_{\xi\to+\infty}(\phi'(\xi)/(K-\phi(\xi)))=\gamma$,其中 γ 是方程(9)的唯一根,

$$c\gamma+p\gamma^2+d[H(-\gamma)-1]+\partial_1 f(K,K)+\partial_2 f(K,K)\mathrm{e}^{\gamma c\tau}G(-\gamma)=0,$$
$$\gamma\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re}\gamma<\lambda_0.\tag{9}$$

注意到当 $c>c^*$ 时,特征方程(8)恰有两个正实根.下面给出两个引理.

引理1 存在 $c^*>0$ 和 $\lambda^*\in(0,\lambda^+)$,使得 $\Delta(c^*,\lambda^*)=0$ 且 $\Delta_\lambda(c^*,\lambda^*)=0$.因此,

1) 如果 $0<c<c^*$,则 $\Delta(c,\lambda)<0$, $\forall\lambda\geqslant 0$.

2) 如果 $c>c^*$,则 $\Delta(c,\cdot)=0$ 有两个正实根分别为 $\lambda_1(c)$, $\lambda_2(c)$,且满足 $0<\lambda_1(c)<\lambda^*<\lambda_2(c)<\lambda^+$,使得 $\lambda_1'(c)<0$, $\lambda_2'(c)>0$.当 $\lambda\in(\lambda_1(c),\lambda_2(c))$ 时, $\Delta(c,\lambda)>0$;当 λ

$\in (-\infty, \lambda_1(c)) \cup (\lambda_2(c), \lambda^+)$ 时, $\Delta(c, \lambda) > 0$.

证明 对任意的 $\lambda \in (0, \lambda^+)$, 有

$$\Delta_\lambda(c,\lambda) = c - 2p\lambda - dH'(\lambda) - \partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}[G'(\lambda) - c\tau G(\lambda)],$$

$$\Delta_{\lambda\lambda}(c,\lambda) = -2p - dH''(\lambda) - \partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}[G''(\lambda) - 2c\tau G'(\lambda) + c^2\tau^2 G(\lambda)] < 0,$$

$$\Delta_c(c,\lambda) = \lambda + c\tau\partial_2 f(0,0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}G(\lambda) > 0,$$

$$\Delta(c,0) = -\partial_1 f(0,0) - \partial_2 f(0,0) < 0,$$

$$\Delta(0,\lambda) = -p\lambda^2 - d[H(\lambda) - 1] - \partial_1 f(0,0) - \partial_2 f(0,0)G(\lambda) < 0,$$

并且

$$\lim_{\lambda \to \lambda^+ - 0} \Delta(c,\lambda) = -\infty.$$

得证.

引理 2 假设条件(P1)和(P2)成立. 对每个 $c \geqslant 0$, 方程 $\tilde{\Delta}(c, \cdot) = 0$ 恰有一个正实根 $\tilde{\lambda} > 0$.

证明 由条件(P1)、(P2)得

$$\tilde{\Delta}(c,0) = \partial_1 f(K,K) + \partial_2 f(K,K) < 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda^+ - 0} \tilde{\Delta}(c,\lambda) = +\infty.$$

因此, $\tilde{\Delta}(c, \cdot)$ 至少有一个正的零点.由于

$$\tilde{\Delta}_\lambda(c,\lambda) = c + 2p\lambda - dH'(-\lambda) + \partial_2 f(K,K)\mathrm{e}^{\lambda c\tau}[c\tau G(-\lambda) - G'(-\lambda)],$$

其中

$$H'(-\lambda) = \int_0^{+\infty} yJ(y)(\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{\lambda y})\mathrm{d}y < 0, \qquad \forall \lambda > 0,$$

$$G'(-\lambda) = \int_0^{+\infty} yh(y)(\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{\lambda y})\mathrm{d}y < 0, \qquad \forall \lambda > 0.$$

所以,对任意的 $\lambda \in (0, \lambda^+)$, $\tilde{\Delta}_\lambda(c,\lambda) > 0$, 即 $\tilde{\Delta}(c,\lambda)$ 关于 λ 是单增的.因此 $\tilde{\Delta}(c, \cdot) = 0$ 恰有一个正实根.

2 比 较 原 理

方程(4)相关线性初值问题的比较原理是证明其波前解稳定性的关键[20,23,25],下面首先证明比较原理成立.记

$$\Omega_{L_0}^1 = \{(x,t) \in R^2 : x + ct > L_0, t > 0\},$$

$$\Omega_{L_0}^2 = \{(x,t) \in R^2 : x + ct > L_0, t \in [-\tau, 0]\},$$

$$\Omega_{L_0}^3 = \{(x,t) \in R^2 : x + ct \leqslant L_0, t \geqslant -\tau\}.$$

引理 3 假设 $p_0, q_0 > 0$ 是任意常数,令 $w^\pm(x,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ 是两个连续函数且满足

1) $w^+(x,t) \geqslant 0$ 且 $w^-(x,t) \leqslant K$,其中 $x \in \mathbf{R}, t \geqslant -\tau$;

2) $w^+(x,t) \geqslant w^-(x,t)$,其中 $(x,t) \in \Omega_{L_0}^2 \cup \Omega_{L_0}^3$;

3) 对于 $(x,t) \in \Omega_{L_0}^1$,

$$w_t^+ \geqslant pw_{xx}^+ + d(J * w^+ - w^+) + p_0 w^+ + q_0(h * w^+),$$

$$w_t^- \leqslant pw_{xx}^- + d(J * w^- - w^-) + p_0 w^- + q_0(h * w^-).$$

则有 $w^+(x,t) \geqslant w^-(x,t)$, $\forall x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0$.

证明　令 $W(x,t)=w^{+}(x,t)-w^{-}(x,t)$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $t\geqslant -\tau$.那么 $W(x,t)$ 有下界 $-K$,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $s\in[-\tau,0]$, $W(x,s)\geqslant 0$; 对任意的 $(x,t)\in\mathbf{R}\times[-\tau,+\infty)$ 且 $x+ct\leqslant L_0$,有 $W(x,t)\geqslant 0$,而且对任意的 $(x,t)\in\Omega_{L_0}^{1}$,有

$$W_t(x,t)\geqslant pW_{xx}(x,t)+d(J*W-W)(x,t)+p_0W(x,t)+q_0(h*W)(x,t).\quad(10)$$

取

$$K>\frac{1}{4}p+\frac{5}{8}d+\frac{3}{2}p_0+\frac{3}{2}q_0.$$

若假设不成立,则存在 $\varepsilon>0$, $t_0>0$ 使得

$$W(x,t)>-\varepsilon e^{2Kt},\qquad x\in\mathbf{R},\ t\in[-\tau,t_0),$$
$$\inf_{x\in\mathbf{R}}W(x,t_0)=-\varepsilon e^{2Kt_0}.$$

故存在一个正 Lebesgue 测度的有界集 $E\subset\mathbf{R}$,使得 $W(x,t_0)\leqslant-(15/16)\varepsilon e^{2Kt_0}$, $x\in E$.取有限区间 $[-a,a]$,使得 $E\subseteq[-a,a]$.令 $\eta(x)$ 是一个光滑函数且满足

$$\eta(z)=1,\qquad \forall z\in[-a,a],$$
$$\min_{x\in\mathbf{R}}\eta(x)=1,\ \sup_{x\in\mathbf{R}}\eta(x)=\eta(\pm\infty)=3,\ |\eta'(\cdot)|\leqslant 1,\ |\eta''(\cdot)|\leqslant 1.$$

对任意 $\alpha\in[0,1]$,定义函数

$$z(x,t;\alpha):=-\varepsilon\left(\frac{3}{4}+\alpha\eta(x)\right)e^{2Kt},\qquad x\in\mathbf{R},\ t\in[-\tau,t_0],$$

显然

$$\frac{\partial z(x,t,\alpha)}{\partial\alpha}=-\varepsilon\eta(x)e^{2Kt}<0,\qquad \forall x\in\mathbf{R},\ t\in[-\tau,t_0],$$
$$z\left(x,t;\frac{1}{4}\right)=-\varepsilon\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\eta(x)\right)e^{2Kt}\leqslant-\varepsilon e^{2Kt}\leqslant W(x,t),$$
$$\forall x\in\mathbf{R},\ t\in[-\tau,t_0],$$
$$z\left(x,t_0;\frac{1}{8}\right)=-\varepsilon\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\eta(x)\right)e^{2Kt_0}=-\frac{7}{8}\varepsilon e^{2Kt_0}>W(x,t_0),$$
$$\forall x\in[-a,a].$$

因此,令

$$\alpha_*:=\inf\left\{\alpha\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]\,\middle|\,W(x,t)\geqslant z(x,t;\alpha),\qquad\forall t\in[-\tau,t_0],\ x\in\mathbf{R}\right\}.$$

显然

$$W(x,t)\geqslant z(x,t;\alpha_*),\qquad \forall x\in\mathbf{R},\ t\in[-\tau,t_0].$$

由于

$$W(x,s)\geqslant 0>z(x,s;\alpha_*),\qquad \forall x\in\mathbf{R},\ s\in[-\tau,0],$$

则

$$\lim_{x\to\pm\infty}z(x,t;\alpha_*)\leqslant-\frac{9}{8}\varepsilon e^{2Kt}<W(x,t),\qquad\forall(x,t)\in\mathbf{R}\times[-\tau,t_0],$$

另外,当 $x+ct\leqslant L_0$ 时,

$$W(x,t)\geqslant 0>z(x,t;\alpha_*),\qquad \forall(x,t)\in\mathbf{R}\times[-\tau,t_0].$$

记 $Z(x,t):=W(x,t)-z(x,t;\alpha_*)$,不难发现,当 $x+ct>L_0$ 时,$Z(x,t)$ 在 $(x_1,t_1)\in\mathbf{R}\times(0,t_0]$ 处达到其下确界 0.所以

$$Z(x_1,t_1)=0,\ Z_t(x,t)\mid_{(x_1,t_1)}\leqslant 0,$$

且

$$Z_{xx}(x,t)\mid_{(x_1,t_1)}\geqslant 0.$$

所以,对任意的 $y\in\mathbf{R}$,$Z(x_1-y,t_1-\tau)\geqslant Z(x_1,t_1)=0$, 进而就有

$$W(x_1-y,t_1-\tau)\geqslant z(x_1-y,t_1-\tau;\alpha_*)+W(x_1,t_1)-z(x_1,t_1;\alpha_*)\geqslant$$
$$z(x_1-y,t_1-\tau;\alpha_*)+W(x_1,t_1),\qquad\forall y\in\mathbf{R}.$$

故由方程(10)可得

$$\begin{aligned}
&0\geqslant Z_t(x,t)\mid_{(x_1,t_1)}=\\
&\quad W_t(x_1,t_1)-z_t(x,t;\alpha_*)\mid_{(x_1,t_1)}\geqslant\\
&\quad -z_t(x,t;\alpha_*)\mid_{(x_1,t_1)}+pW_{xx}(x_1,t_1)+d(J*W-W)(x_1,t_1)+\\
&\quad p_0W(x_1,t_1)+q_0(h*W)(x_1,t_1)\geqslant\\
&\quad -2Kz(x_1,t_1;\alpha_*)+pz_{xx}(x_1,t_1)+d(J*z-z)(x_1,t_1)+\\
&\quad p_0z(x_1,t_1;\alpha_*)+q_0(h*z)(x_1,t_1)\geqslant\\
&\quad 2K\varepsilon\left(\frac{3}{4}+\alpha_*\eta(x_1)\right)\mathrm{e}^{2Kt_1}-p\varepsilon\alpha_*\eta''(x_1)\mathrm{e}^{2Kt_1}-\\
&\quad d\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}\left\{\int_{\mathbf{R}}J(y)\left(\frac{3}{4}+\alpha_*\eta(x_1-y)\right)\mathrm{d}y-\left(\frac{3}{4}+\alpha_*\eta(x_1)\right)\right\}-\\
&\quad p_0\varepsilon\left(\frac{3}{4}+\alpha_*\eta(x_1)\right)\mathrm{e}^{2Kt_1}-q_0\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}\int_{\mathbf{R}}h(y)\left(\frac{3}{4}+\alpha_*\eta(x_1-y)\right)\mathrm{e}^{-2K\tau}\mathrm{d}y\geqslant\\
&\quad K\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}-\frac{1}{4}p\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}-\frac{5}{8}d\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}-\frac{3}{2}p_0\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}-\frac{3}{2}q_0\varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}=\\
&\quad \varepsilon\mathrm{e}^{2Kt_1}\left[K-\frac{1}{4}p-\frac{5}{8}d-\frac{3}{2}p_0-\frac{3}{2}q_0\right]>0.
\end{aligned}$$

矛盾.因此

$$w^+(x,t)\geqslant w^-(x,t),\qquad\forall(x,t)\in\mathbf{R}\times[-\tau,+\infty).$$

证毕.

下面对方程(4)的特征值问题进行分析.首先考虑方程(4)在 $u=0$ 处线性化的方程:

$$\begin{aligned}u_t(x,t)&=pu_{xx}(x,t)+d(J*u-u)(x,t)+\\&\quad\partial_1f(0,0)u(x,t)+\partial_2f(0,0)(h*u)(x,t-\tau),\qquad x\in\mathbf{R},\end{aligned}\tag{11}$$

将 $u(x,t)=\mathrm{e}^{\lambda x}v(t)$ 代入方程(11)得

$$\begin{aligned}v'(t)&=p\lambda^2v(t)+dv(t)\left(\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-1\right)+\\&\quad\partial_1f(0,0)v(t)+\partial_2f(0,0)\int_{\mathbf{R}}h(y)v(t-\tau)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{12}$$

令 $v(t)=\mathrm{e}^{\mu(\lambda)t}\psi_\mu$ 是方程(12)的解,那么方程(11)对应的特征值问题

$$\begin{aligned}\mu(\lambda)\psi_\mu&=p\lambda^2\psi_\mu+d\psi_\mu\left(\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-1\right)+\\&\quad\partial_1f(0,0)\psi_\mu+\partial_2f(0,0)\mathrm{e}^{-\mu(\lambda)\tau}\psi_\mu\int_{\mathbf{R}}h(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{13}$$

存在实根 $\mu(\lambda)$.由于 $u=0$ 是不稳定平衡点,根据引理 1 可知 $\mu(\lambda)>0$.

另一方面,考虑方程(4)在 $u=K$ 处线性化的方程:

$$u_t(x,t)=pu_{xx}(x,t)+d(J*u-u)(x,t)+\partial_1 f(K,K)u(x,t)+\partial_2 f(K,K)(h*u)(x,t-\tau),\qquad x\in\mathbf{R}.\tag{14}$$

方程(14)所对应的空间齐次方程为

$$u_t(x,t)=\partial_1 f(K,K)u(x,t)+\partial_2 f(K,K)(h*u)(x,t-\tau),\qquad x\in\mathbf{R}.\tag{15}$$

将 $u(x,t)=\mathrm{e}^{\lambda x}\nu(t)$ 代入方程(15),得

$$\nu'(t)=\partial_1 f(K,K)\nu(t)+\partial_2 f(K,K)\int_{\mathbf{R}}h(y)\nu(t-\tau)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y=\partial_1 f(K,K)\nu(t)+\partial_2 f(K,K)\nu(t-\tau)G(\lambda).\tag{16}$$

令 $\nu(t)=\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}t}\tilde{\psi}$ 是方程(16)的解,则方程(15)的特征值问题

$$\tilde{\lambda}\tilde{\psi}=\partial_1 f(K,K)\tilde{\psi}+\partial_2 f(K,K)\mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}\tau}\tilde{\psi}\int_{\mathbf{R}}h(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y=\partial_1 f(K,K)\tilde{\psi}+\partial_2 f(K,K)\mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}\tau}G(\lambda)\tilde{\psi}\tag{17}$$

存在实根 $\tilde{\lambda}$.因为 $u=K$ 是不稳定的平衡点,根据引理2可知 $\tilde{\lambda}<0$.

取 $\bar{\mu}\in(0,-\tilde{\lambda})$,则存在 $\epsilon_1>0$ 使得

$$\bar{\mu}w\geqslant\epsilon_1 w+\epsilon_1 G(\lambda)w.\tag{18}$$

由于 $(\phi(-\infty),\phi(+\infty))=(0,K)$,则对充分大的 $L_0>0$,

$$(\partial_1 f(\zeta_1,\zeta_2),\partial_2 f(\zeta_1,\zeta_2))\leqslant(\partial_1 f(0,0),\partial_2 f(0,0)),\qquad x+ct\leqslant L_0,\tag{19}$$

$$(\partial_1 f(\zeta_1,\zeta_2),\partial_2 f(\zeta_1,\zeta_2))\leqslant(\partial_1 f(K,K)+\epsilon_1,\partial_2 f(K,K)+\epsilon_1),\qquad x+ct>L_0.\tag{20}$$

通过构造恰当的权函数结合比较原理,讨论方程(4)的初始波动在加权最大范数空间上一致有界,满足此初值的解与行波解之间的关系.

3　稳定性

下面给出方程(4)非临界波前解渐近稳定性的结果.

定理2　假设条件(P1)、(P2)、(P3)和(P4)成立,且 $\mu(\lambda)>0,\tilde{\lambda}<0$.在 $c>c^*$ 条件下,给定 $\phi(x+ct)$ 是方程(4)连接0和 K 的波前解.给定充分小的 $\epsilon>0$,令 $\lambda_\epsilon=\lambda_1(c)+\epsilon$.定义如下权函数:

$$\omega^\epsilon(x):=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\lambda_\epsilon(x-L_0)}, & x\leqslant L_0,\\ 1, & x>L_0.\end{cases}$$

若初值 u^0 满足

$$0\leqslant u^0(x,s)\leqslant K,\qquad\forall x\in\mathbf{R},\ s\in[-\tau,0],$$

且

$$[u^0(x,s)-\phi(x+s)]\omega^\epsilon(x)\in L^\infty(\mathbf{R}),\qquad\forall s\in[-\tau,0],\tag{21}$$

则方程(4)存在唯一解 $u(x,t;u^0)$ 并且满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant K,\qquad\forall(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+.$$

因此

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|u(x,t)-\phi(x+ct)|\leqslant M^*\mathrm{e}^{-\mu_0 t},\qquad t>0,\tag{22}$$

其中 $\mu_0>0,M^*>0$ 为常数.

证明　定义两个函数分别为

$$\begin{cases} U^{+}(x,s) := \max\{u^{0}(x,s), \phi(x+cs)\}, & \forall (x,s) \in \mathbf{R} \times [-\tau, 0], \\ U^{-}(x,s) := \min\{u^{0}(x,s), \phi(x+cs)\}, & \forall (x,s) \in \mathbf{R} \times [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{23}$$

显然有

$$0 \leqslant U^{-}(x,s) \leqslant u^{0}(x,s),\ \phi(x+cs) \leqslant U^{+}(x,s) \leqslant K, \qquad \forall (x,s) \in \mathbf{R} \times [-\tau, 0].$$

令 $U^{\pm}(x,t)$ 分别是方程(4) 具有初值 $U^{\pm}(x,s)$ 的解,则通过比较原理得

$$0 \leqslant U^{-}(x,t) \leqslant u(x,t;u^{0}),\ \phi(x+ct) \leqslant U^{+}(x,t) \leqslant K, \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

于是

$$|u(x,t;u^{0}) - \phi(x+ct)| \leqslant \max\{|U^{+}(x,t) - \phi(x+ct)|, |U^{-}(x,t) - \phi(x+ct)|\}.$$

因此,要证明此定理的结论成立,只需证明 $U^{\pm}(x,t)$ 指数收敛到 $\phi(x+ct)$.由对称性可知,仅证 $U^{+}(x,t)$ 收敛到 $\phi(x+ct)$ 即可.

记 $V(x,t) := U^{+}(x,t) - \phi(x+ct)$,显然有 $V(x,t) \geqslant 0, \forall x \in \mathbf{R}, t > 0$ 且

$$0 \leqslant V(x,s) \leqslant |u^{0}(x,s) - \phi(x+cs)|, \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ s \in [-\tau, 0],$$

于是, $V(x,s)\omega^{\epsilon}(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致有界.接下来,分两种情况进行讨论.

情形 1 $x + ct \leqslant L_0$.由于 $V(x,t) \geqslant 0$ 及 $U^{+}(x,t) \leqslant K,\ \forall x \in \mathbf{R},\ t \geqslant 0$, 则由方程(19)可得

$$\begin{aligned} V_t &= pV_{xx} + d(J*V - V) + f((U^{+}),(h*U^{+})) - f(\phi,(h*\phi)) = \\ &\quad pV_{xx} + d(J*V - V) + f((V+\phi),(h*(V+\phi))) - f(\phi,(h*\phi)) \leqslant \\ &\quad pV_{xx} + d(J*V - V) + \partial_1 f(0,0)V + \partial_2 f(0,0)(h*V), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $x \in \mathbf{R}, t > 0$.令 ψ_{ϵ} 是 $\mu(\lambda_{\epsilon})$ 的特征向量(一维).记 $\mu(\lambda_{\epsilon}) = \mu_{\epsilon}$.由于 $V(x,s)\omega^{\epsilon}(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是一致有界的,取充分大的 $C_1 > 0$, 使得

$$C_1\psi_{\epsilon}\,\mathrm{e}^{\lambda_{\epsilon}(x-L_0)+\mu_{\epsilon}s} \geqslant V(x,s), \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ s \in [-\tau, 0].$$

定义

$$\bar{V}(x,t) = C_1\psi_{\epsilon}\,\mathrm{e}^{\lambda_{\epsilon}(x-L_0)+\mu_{\epsilon}t}, \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ t > 0,$$

结合式(13),容易验证

$$\begin{aligned} \bar{V}_t(x,t) &= p\bar{V}_{xx}(x,t) + d(J*\bar{V} - \bar{V})(x,t) + \\ &\quad \partial_1 f(0,0)\bar{V}(x,t) + \partial_2 f(0,0)(h*\bar{V})(x,t-\tau), \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ t > 0. \end{aligned}$$

注意到 $\bar{V}(x,s) \geqslant V(x,s), \forall x \in \mathbf{R},\ s \in [-\tau, 0]$, 由引理 3 可得

$$V(x,t) \leqslant \bar{V}(x,t), \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ t \in [-\tau, +\infty).$$

因此,对任意的 $(x,t) \in \mathbf{R} \times [-\tau, +\infty)$,若 $x + ct \leqslant L_0$, 则

$$\begin{aligned} V(x,t) &\leqslant C_1\psi_{\epsilon}\,\mathrm{e}^{\lambda_{\epsilon}(x-L_0)+\mu_{\epsilon}t} = C_1\psi_{\epsilon}\,\mathrm{e}^{\lambda_{\epsilon}(x+ct-L_0)}\mathrm{e}^{-(c\lambda_{\epsilon}-\mu_{\epsilon})t} \leqslant \\ &\quad C_1\psi_{\epsilon}\,\mathrm{e}^{-(c\lambda_{\epsilon}-\mu_{\epsilon})t}. \end{aligned} \tag{25}$$

情形 2 $x + ct > L_0$.对任意的$(x,t) \in \Omega^{1}_{L_0}$, 由式(20)得

$$V_t \leqslant pV_{xx} + d(J*V - V) + (\partial_1 f(K,K) + \epsilon_1)V + (\partial_2 f(K,K) + \epsilon_1)(h*V). \tag{26}$$

注意到 $\bar{\mu} \in (0, -\tilde{\lambda})$.取 $\mu_0 = \min\{c\lambda_{\epsilon} - \mu_{\epsilon}, -\tilde{\lambda} - \bar{\mu}\}$,并选择足够大的 $C_2 > 0$ 使得

$$C_2\tilde{\psi} \geqslant \max\{C_1\psi_{\epsilon}, K\}.$$

定义

$$\tilde{V}(x,t)=C_2\tilde{\psi}e^{-\mu_0 t},\qquad \forall x\in\mathbf{R},t\in[-\tau,+\infty),\tag{27}$$

则 $\tilde{V}_{xx}(x,t)=0,[J*\tilde{V}-\tilde{V}](x,t)=0$.由情形 1 的结果以及 $\mu_0\leqslant-\tilde{\lambda}-\bar{\mu}$, 得

$$V(x,t)\leqslant\tilde{V}(x,t),\qquad\forall(x,t)\in\Omega_{L_0}^2\cup\Omega_{L_0}^3.$$

由式(18)得

$$\bar{\mu}\tilde{V}(x,t)\geqslant\epsilon_1\tilde{V}(x,t)+\epsilon_1 G(\lambda)\tilde{V}(x,t).$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(x,t)=&-\mu_0\tilde{V}(x,t)\geqslant(\tilde{\lambda}+\bar{\mu})\tilde{V}(x,t)=\\&C_2(\tilde{\lambda}+\bar{\mu})\tilde{\psi}e^{-\mu_0 t}=\\&\partial_1 f(K,K)\tilde{V}(x,t)+\partial_2 f(K,K)e^{-\tilde{\lambda}\tau}G(\lambda)C_2\tilde{\psi}e^{-\mu_0 t}+\bar{\mu}\tilde{V}(x,t)\geqslant\\&\partial_1 f(K,K)\tilde{V}(x,t)+\partial_2 f(K,K)G(\lambda)\tilde{V}(x,t-\tau)+\bar{\mu}\tilde{V}(x,t)\geqslant\\&p\tilde{V}_{xx}+d(J*\tilde{V}-\tilde{V})+(\partial_1 f(K,K)+\epsilon_1)\tilde{V}+\\&(\partial_2 f(K,K)+\epsilon_1)(h*\tilde{V})(x,t-\tau).\end{aligned}\tag{28}$$

因此,函数 $\tilde{V}(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(x,t)\geqslant&\ p\tilde{V}_{xx}+d(J*\tilde{V}-\tilde{V})+\\&(\partial_1 f(K,K)+\epsilon_1)\tilde{V}+(\partial_2 f(K,K)+\epsilon_1)(h*\tilde{V})(x,t-\tau).\end{aligned}\tag{29}$$

不妨令

$$p_0=\partial_1 f(K,K)+\epsilon_1,\ q_0=\partial_1 f(K,K)+\epsilon_1,$$

通过式(26)、(27)、(29)和引理 3 可以得出

$$V(x,t)\leqslant C_2\tilde{\psi}e^{-\mu_0 t}=\tilde{V}(x,t),\qquad\forall(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+.$$

结合以上两种情形可得

$$0\leqslant V(x,t)=U^+(x,t)-\phi(x+ct)\leqslant M^*e^{-\mu_0 t},\qquad\forall x\in\mathbf{R},\ t\geqslant-\tau,\tag{30}$$

其中 $M^*:=\max\{C_1\psi_\epsilon,C_2\tilde{\psi}\}$.因此,$U^+(x,t)$ 指数收敛到 $\phi(x+ct)$.

类似地,可以证明 $U^-(x,t)$ 指数收敛到 $\phi(x+ct)$.于是 $U(x,t)$ 指数收敛到 $\phi(x+ct)$.

证毕.

4 应 用 实 例

这一节将主要通过具体的生物模型进一步验证所得稳定性的理论结果.

当方程(4)的反应项为 Logistic 型,即

$$f(u(x,t),(h*u)(x,t-\tau))=r\int_{\mathbf{R}}h(y)u(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y(1-u(x,t)).$$

那么,方程(4)就变为如下非局部时滞反应扩散方程:

$$\begin{aligned}u_t(x,t)=&\ pu_{xx}(x,t)+d(J*u-u)(x,t)+\\&r\int_{\mathbf{R}}h(y)u(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y(1-u(x,t)),\end{aligned}\tag{31}$$

其中 $x\in\mathbf{R},\ d\geqslant0,\ p\geqslant0$.

对于模型(31),条件(P3)和(P4)显然成立.容易发现 $f(0,0)=f(1,1)=0,\ f(u,u)=ru(1-u)>0,\ \forall u\in(0,1)$, 且对任意的 $(u,v)\in[0,1]^2$, $\partial_2 f(u,v)=r(1-u)\geqslant0$, 即条件(P1)成立.

另一方面,总可以找到一个 $M>0$ 和 $\sigma\in(0,1]$ 使得对任意的 $(u,v)\in[0,1]^2$,

$$0 \leqslant \partial_1 f(0,0) + \partial_2 f(0,0) - f(u,v) \leqslant M(u+v)^{1+\sigma},$$

并且 $\partial_1 f(1,1) + \partial_2 f(1,1) = -r < 0$.于是条件(P2)成立.

因此,对于 $c > c^*$,如果方程(31)的初始值 u^0 满足

$$0 \leqslant u^0(x,s) \leqslant 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R},\ s \in [-\tau,0],$$

且

$$[u^0(x,s) - \phi(x+s)]\omega^\epsilon(x) \in L^\infty(\mathbf{R}), \qquad \forall s \in [-\tau,0],$$

则方程(31)的唯一解 $u(x,t;u^0)$ 满足

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant 1, \qquad \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ .$$

因此

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} | u(x,t) - \phi(x+ct) | \leqslant M_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 t}, \qquad t > 0,$$

其中 $\mu_1 > 0, M_1 > 0$ 为常数.那么,定理2对于模型(31)仍然成立.

下面考虑非局部时滞 Nicholson's blowflies 模型:

$$u_t = pu_{xx} + d(J*u-u) - ru + r\beta\int_{\mathbf{R}} h(y)u(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\int_{\mathbf{R}}h(y)u(x-y,t-\tau)\mathrm{d}y}, \tag{32}$$

其中 $p \geqslant 0, d \geqslant 0, r > 0, 1 < \beta \leqslant \mathrm{e}$.$f(u,v) = -ru + rpv\mathrm{e}^{-v}$ 满足先前的条件(P1)、(P2)、(P3)、(P4),通过类似的分析可知,定理2(稳定性定理)对于模型(32)依然成立.于是,可以得到模型(32)所有非临界波前解的渐近稳定性结果.

5 总 结

本文研究一类具有非局部时滞反应项的空间非局部扩散模型.在单稳假设条件下,通过权函数结合比较原理,证明方程(4)的非临界波前解关于时间 t 是指数渐近稳定的.值得注意的是,该方法可以应用于更一般的非局部时滞反应扩散模型.本文仅得到 $c > c^*$ 时波前解的指数渐近稳定性结果,对于 $c = c^*$ 波前解的稳定性问题需要进一步去研究.另外,对于文献[15]中具有分布时滞的反应扩散模型行波解的稳定性也是未来研究的重点.

参考文献(References):

[1] FANG J, WEI J, ZHAO X Q. Spatial dynamics of a nonlocal and time-delayed reaction-diffusion system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2008, **245**(10): 2749-2770.

[2] GOURLEY S A, WU J. Delayed non-local diffusive systems in biological invasion and disease spread[J]. *Nonlinear Dynamics & Evolution Equations*, 2006, **48**: 137-200.

[3] OU C, WU J. Persistence of wavefronts in delayed nonlocal reaction-diffusion equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2007, **235**(1): 219-261

[4] JOSEPH W H S, WU J, ZOU X. A reaction-diffusion model for a single species with age structure I: travelling wavefronts on unbounded domains[C]//*Proceedings*: *Mathematical*, *Physical and Engineering Sciences*, 2012, **457**: 1841-1853.

[5] THIEME H R, ZHAO X Q. Asymptotic speeds of spread and traveling waves for integral equations and delayed reaction-diffusion models[J]. *Journal of Differential Equations*, 2003, **195**(2): 430-470.

[6] WANG Z C, LI W T, RUAN S. Traveling fronts in monostable equations with nonlocal delayed effects[J]. *Journal of Dynamics & Differential Equations*, 2008, **20**(3): 573-607.

[7] BRITTON N F. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1990, **50**(6): 1663-1688.

[8] BRITTON N F. Aggregation and the competitive exclusion principle[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1989, **136**(1): 57-66.

[9] BATES P W, FIFE P C, REN X, et al. Traveling waves in a convolution model for phase transitions[J]. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, 1997, **138**(2): 105-136.

[10] BATES P W, CHMAJ A. A discrete convolution model for phase transitions[J]. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, 1999, **150**(4): 281-368.

[11] COVILLE J. On uniqueness and monotonicity of solutions of non-local reaction diffusion equation[J]. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2006, **185**(3): 461-485.

[12] COVILLE J, DUPAIGNE L. Propagation speed of travelling fronts in non local reaction-diffusion equations[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2005, **60**(5): 797-819.

[13] COVILLE J, DUPAIGNE L. On a non-local eqution arising in population dynamics[J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 2007, **137**(4): 727-755.

[14] YU Z, YUAN R. Existence, asymptotic and uniqueness of traveling waves for nonlocal diffusion systems with delayed nonlocal response[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2013, **17**(6): 2163-2190.

[15] GUO S, ZIMMER J. Travelling wavefronts in nonlocal diffusion equations with nonlocal delay effects[J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2018, **41**(2): 919-943.

[16] CHENG H, YUAN R. Stability of traveling wave fronts for nonlocal diffusion equation with delayed nonlocal response[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2016, **20**(4): 801-822.

[17] GUO S, ZIMMER J. Stability of travelling wavefronts in discrete reaction-diffusion equations with nonlocal delay effects[J]. *Nonlinearity*, 2015, **28**(2): 463-492.

[18] MEI M, OU C, ZHAO X Q. Global stability of monostable traveling waves for nonlocal time-delayed reaction-diffusion equations[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, **42**(6): 2762-2790.

[19] MA S, ZHAO X Q. Global asymptotic stability of minimal fronts in monostable lattice equations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2008, **21**(1): 259-275.

[20] OUYANG Z, OU C. Global stability and convergence rate of traveling waves for a nonlocal model in periodic media[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series B)*, 2012, **17**(3): 993-1007.

[21] 邢伟, 颜七笙, 杨志辉, 等. 一类具有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1247-1254.(XING Wei, YAN Qisheng, YANG Zhihui. Stability analysis of an SEIS epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(11): 1247-1254.(in Chinese))

[22] 谢英超, 程燕, 贺天宇. 一类具有非线性发生率的时滞传染病模型的全局稳定性[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1107-1116.(XIE Yingchao, CHENG Yan, HE Tianyu. Global stability of a class of delayed epidemic models with nonlinear incidence rates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1107-1116.(in Chinese))

[23] WU S L, CHEN G. Uniqueness and exponential stability of traveling wave fronts for a multi-type SIS nonlocal epidemic model[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2017, **36**: 267-277.

[24] CHEN X, GUO J S. Existence and asymptotic stability of traveling waves of discrete quasilinear monostable equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2002, **184**(2): 549-569.

[25] WANG X S, ZHAO X Q. Pulsating waves of a partially degenerate reaction-diffusion system in a periodic habitat[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **259**(12): 7238-7259.

[26] WU Y, XING X. Stability of traveling waves with critical speeds for p-degree Fisher-type equations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2008, **20**(4): 1123-1139.

Exponential Stability of Traveling Wavefronts for Reaction-Diffusion Equations With Delayed Nonlocal Responses

LI Panxiao

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi' an* 710071, *P.R.China*)

Abstract: A spatially nonlocal diffusion model with a class of delayed nonlocal responses was considered. The asymptotic stability and the convergence rate of the traveling wavefronts were mainly studied. Through construction of weighted functions and establishment of a comparison principle for the related linear equations, the conclusion that if the initial function is within a bounded distance from a certain traveling wavefront with respect to a weighted maximum norm, the solution satisfying the initial value will converge to the traveling wavefront exponentially in time, was proved, and the exponential convergence rate was also obtained.

Key words: traveling wave solution; nonlocal time delay; stability

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11671315)

引用本文/Cite this paper:

李盼晓. 非局部时滞反应扩散方程波前解的指数稳定性[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(11): 1300-1312.

LI Panxiao. Exponential stability of traveling wavefronts for reaction-diffusion equations with delayed nonlocal responses[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(11): 1300-1312.